

9^{èmes} JOURNÉES DE L'HYDRODYNAMIQUE

10 - 11 - 12 MARS 2003

POITIERS - FUTUROSCOPE

Impact hydrodynamique d'un cône élastique.

Hydrodynamic impact of elastic cone.

Y.-M. Scolan¹ V. Robic² T. Coudray³

¹ ESIM, IMT, 13451 Marseille, Cedex 20.

² DGA/DCE, Bassin d'Essais des Carènes, Val de Reuil.

³ Principia RD, 83507 La Seyne sur Mer.

Résumé

Parmi les modèles d'analyse des effets hydro-élastiques lors de l'impact hydrodynamique, le modèle de Wagner est probablement le plus simple à mettre en œuvre. C'est sur cette base que l'on procède aux calculs de la distribution de pression et des déformations d'un cône et d'un dièdre en chute libre sur une surface liquide plane. Une analyse paramétrique permet d'identifier les différentes étapes de l'immersion de la coque dans le liquide.

Les résultats obtenus pour la pression sont comparés aux résultats expérimentaux disponibles. Conformément au modèle de Wagner l'amplitude de la pression maximum est proportionnelle au carré de la vitesse d'expansion de la surface mouillée. Cela permet de montrer comment l'élasticité modifie de manière significative la distribution des pics de pression. L'étude des déformations, notamment pour le dièdre, mettent en évidence la formation de coussin d'air, voire de cavité. Le présent modèle peut être amélioré afin d'en tenir compte.

Abstract

Among the existing models for the hydroelastic effects of slamming, Wagner model is undoubtedly the simplest one to implement. On this basis, pressure distribution and deformations are evaluated for a cone and a wedge falling freely onto a horizontal free surface of liquid. A parametrical analysis makes possible to identify the different steps of the penetration into the liquid.

The obtained results for the pressure are compared to available experimental data. According to Wagner model, the amplitude of maximum pressure varies as the square of the expansion velocity of the wetted surface. This shows how elasticity significantly modifies the distribution of pressure peaks. The analysis of deformations, especially for the wedge, show that air cushion effects and entrapped air pocket may appear. The present model can be improved to take into account these phenomena.

1 Introduction

L'analyse des couplages fluide-structure prenant place durant l'impact hydrodynamique font l'objet d'une attention particulière depuis une dizaine d'années. Les raisons sont multiples. La fatigue subie par les navires conventionnels dans des états de mer difficiles a conduit à des catastrophes pour l'environnement. Ailleurs sur les sites d'exploitation pétrolière de la Mer du Nord notamment, il a été constaté des effets d'impact hydrodynamique tout à fait dimensionnants pour les FPSO. Enfin et surtout les navires rapides subissent des efforts hydrodynamiques locaux et globaux qu'il convient de bien cerner.

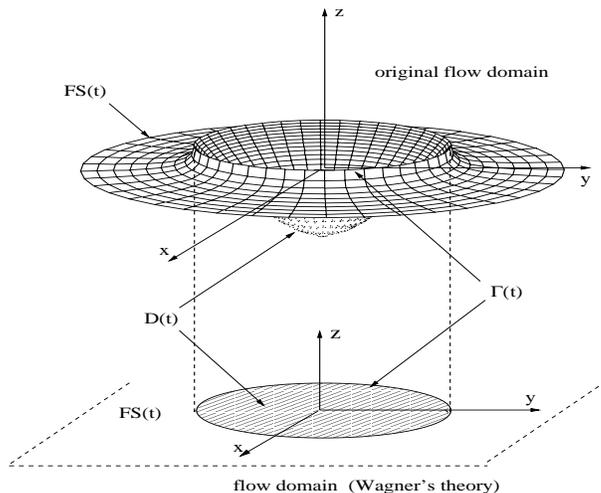
Les modèles susceptibles d'apporter une réponse ne sont pas légion. Diverses approches sont possibles et diffèrent souvent par les ressources informatiques qu'elles nécessitent. Le modèle de Wagner (1932) est sans conteste le modèle le plus simple. Il permet d'obtenir des résultats objectifs au stade de pré-design. Afin d'examiner ses performances, on s'intéresse ici au modèle de Wagner linéarisé couplé à un modèle de coque élastique. Deux formes plutôt académiques sont retenues: le dièdre et le cône.

Des modèles hydro-élastiques "à la Wagner" ont déjà fait l'objet d'applications mais uniquement pour des configurations bidimensionnelles. Dans la thèse de Kvålsvold (1995), l'objectif était d'étudier les effets de l'impact sur les liaisons entre les deux coques d'un catamaran. Korobkin et Khabakhpasheva (1999) l'ont également mis en œuvre pour l'étude des plaques élastiques de grand allongement, modélisant ainsi des structures de type aéroport flottant.

Ces démarches permettent de mener très loin les développements analytiques. On maîtrise donc assez bien les difficultés numériques qui se présentent. Dans un premier temps on décrit le problème aux limites hydrodynamique, que l'on couple ensuite à l'équation de l'élasticité. Les résultats obtenus permettent de mieux cerner le domaine d'application de telles approches. Des comparaisons avec des données expérimentales de pression montrent que le modèle de Wagner fournit des résultats tout à fait satisfaisants. Notamment on peut mettre en évidence l'effet de l'élasticité sur la variation temporelle de la distribution de pression.

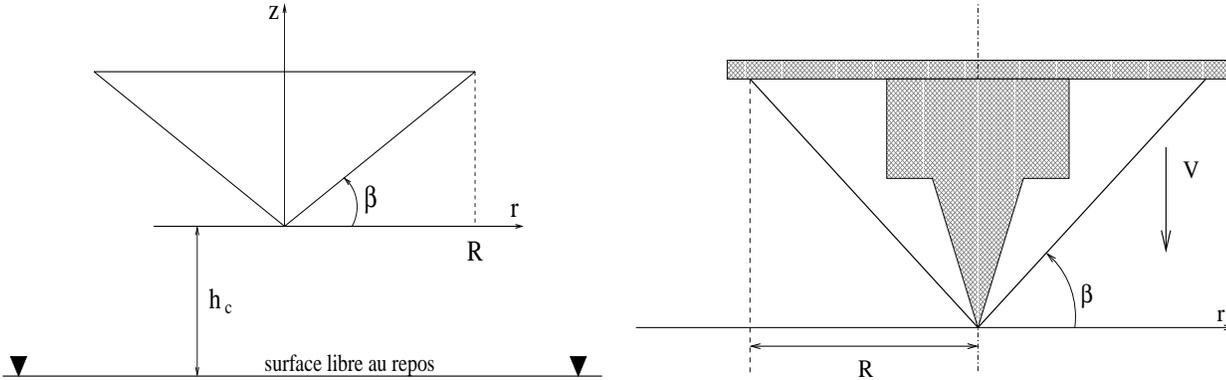
2 Configuration physique

Sous les hypothèses de Wagner linéarisé, on définit un domaine de calcul plan sur lequel on pose le problème aux limites comme illustré sur la figure suivante. Par projection sur ce plan horizontal, on divise le domaine de calcul en deux parties, la surface libre $FS(t)$ et la surface mouillée $D(t)$. Le contour commun de ces surfaces dépend du temps t ; elles sont séparées par la ligne de contact $\Gamma(t)$.



La linéarisation des surfaces suppose que l'angle mort entre le corps et la surface libre est petit. Pour autant, l'angle ne peut être inférieur à $\beta = 4^\circ$. En deçà de cet angle, se produisent des effets de ventilation et de coussin d'air pouvant conduire notamment à une forte inhomogénéité du fluide. Les équations sont formulées dans le cadre de la théorie potentielle. Le fluide est donc incompressible et l'écoulement est irrotationnel. Les effets de tension de surface libre et de gravité sont négligés.

On considère un cône ou un dièdre élastique en chute libre d'une hauteur h_c sur une surface libre plane selon le schéma ci-dessous



Le corps est encastré à son sommet ainsi que sur sa frontière extérieure. Pour le dièdre, cela signifie que, du point de vue comportement élastique, les deux côtés sont complètement décorrélés. Pour le cône, seuls les modes axisymétriques de déformations sont calculés.

A partir du choix des conditions aux limites on peut calculer les modes de déformations du corps dans le cadre de la théorie d'élasticité linéaire. D'autres modèles sont envisageables. Kvålsvold (1995) a utilisé le modèle de Timoshenko. Ce modèle couple deux équations pour la déformation et l'angle de rotation. La mise en œuvre devient plus compliquée sans que les résultats soient significativement différents.

3 Problème structural élastique

Les déformations du corps sont calculées à partir d'une décomposition modale du type

$$w(r,t) = \sum_n^{\infty} A_n(t)w_n(r). \quad (1)$$

Les coefficients $A_n(t)$ sont les inconnues du problème. On cherche à formuler le système différentiel qui rend compte de leur variation dans le temps. Du fait de la linéarisation, les fonctions de forme $w_n(r)$ ne sont pas celles de la géométrie exacte, mais celles d'une coque plane. Ces fonctions sont complètement déterminées grâce aux conditions aux limites appliquées sur les frontières du corps, à savoir au sommet et sur la frontière extérieure. On associe à chaque fonction $w_n(r)$ une période propre T_n et un nombre d'onde k_n . La première période T_1 est la plus grande et elle doit être comparée à la durée de pénétration du corps dans le liquide. Cela permet de justifier cette décomposition sur les modes secs. Dans la plupart des cas ces quantités sont du même ordre de grandeur. Faltinsen (2000) a identifié deux phases distinctes: une phase dite "d'inertie structurale" suivie d'une phase de vibration libre. Ici, pour la taille des coques étudiées et pour la durée de simulation correspondante, il n'est pas possible d'atteindre la deuxième phase. En effet la séparation de l'écoulement sur la frontière extérieure n'est pas modélisée. Néanmoins à partir du système différentiel et sous certaines hypothèses simplificatrices, il est possible d'estimer les fréquences propres du système mécanique au moment précis où doit commencer la phase de vibration libre.

Le modèle de comportement élastique des coques est le plus simple. L'équation aux dérivées partielles se formule pour $w(r,t)$ comme

$$D\Delta\Delta w + \rho_d H(\ddot{w} - \dot{V}) = p(r,t), \quad D = \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (2)$$

où ρ_d est la masse volumique du matériau et H est l'épaisseur. On fait l'hypothèse supplémentaire selon laquelle le centre de gravité du corps élastique n'est pas affecté par ses déformations; par conséquent l'accélération \dot{V} ne dépend que du temps. Au second membre figure la pression hydrodynamique. La constante D contient les informations sur la raideur du matériau notamment E et ν sont le module d'Young et le coefficient de Poisson respectivement ($\nu = 0$ pour le dièdre). Les fonctions de forme $w_n(r)$ s'expriment comme des combinaisons linéaires des fonctions trigonométriques (\cos, \sin, \cosh, \sinh) pour le dièdre et des fonctions de Bessel d'ordre zéro (J_0, I_0, Y_0, K_0) pour le cône. Ces fonctions de forme constituent une famille complète orthogonale munie d'un produit scalaire adapté. On note $\langle w_n, w_m \rangle$ le produit scalaire de deux fonctions w_n et w_m . Il vérifie $\langle w_n, w_m \rangle = U_m \delta_{mn}$ où δ_{mn} est le symbole de Kronecker.

Toute la difficulté du problème résulte de la projection de $p(r,t)$ sur la base de fonctions $w_n(r)$. Pour les formes étudiées ici, les calculs sont complètement analytiques. Curieusement ces développements sont plus lourds pour le dièdre que pour le cône. Les seuls problèmes numériques se réduisent à l'analyse de convergence de séries. Certaines intégrales, admettant pourtant des expressions sous forme de séries, sont calculées numériquement pour éviter des difficultés de convergence.

4 Problème aux limites hydrodynamique

Le problème aux limites est formulé dans le cadre de la théorie potentielle. Dans un premier temps on choisit de représenter la solution à l'aide du potentiel de déplacement ϕ , c'est l'intégrale en temps du potentiel des vitesses. Du fait de cette intégration en temps, on manipule une variable plus régulière (que le potentiel des vitesses) non seulement en temps mais aussi en espace notamment aux abords de la ligne de contact $r = a(t)$. On peut effectivement noter que dans le modèle de Wagner, le temps et l'espace jouent à peu près le même rôle puisque l'on cherche à déterminer une ligne de contact en expansion uniforme.

Le potentiel des déplacements vérifie dans le demi plan inférieur $z < 0$, les équations suivantes

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & z < 0, \\ \phi = 0 & \text{pour } r > a(t) \text{ et } z = 0, \\ \phi_{,z} = -h(t) + f(r) + w(r,t) & \text{pour } r < a(t) \text{ et } z = 0, \\ \phi \rightarrow 0 & (r^2 + z^2) \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (3)$$

où $a(t)$ désigne la correction mouillée, c'est à dire le rayon du cercle qui détermine l'intersection de la surface mouillée et de la surface libre. C'est une inconnue du problème.

Les méthodes de calcul de ϕ pour le cône et le dièdre sont clairement différentes. Pour le dièdre, on applique la technique exposée dans Scolan *et al.* (1999). Pour le cône, du fait de l'axisymétrie de la géométrie et des variables, on formule le problème aux limites pour la transformée de Hankel du potentiel (voir Korobkin et Scolan, 2002).

La linéarité de la condition de Neumann sur la surface mouillée permet de décomposer la solution en plusieurs contributions. Celle qui résulte de $-h(t) + f(r)$ est facilement calculable car elle correspond au cas rigide. L'autre contribution vient de $w(r,t)$ et se décompose sur la base modale. On peut donc identifier des composantes modales du potentiel; on les désigne par ϕ_m . Il convient de noter que ces composantes modales sont identiques pour le potentiel des vitesses et le potentiel des déplacements. En fait désormais il vaut mieux éviter d'utiliser le potentiel des déplacements car le calcul de la pression nécessiterait une double différentiation en temps de ce

potentiel. On donne donc directement l'expression du potentiel des vitesses pour chaque corps sous la forme

$$\varphi(r,t) = \varphi_0(r,t) + \sum_n^{\infty} \dot{A}_n(t) \phi_m(r,a) \quad \text{avec,} \quad \varphi_0(r,t) = \begin{cases} -V(t)\sqrt{a^2 - r^2} & \text{dièdre,} \\ -\frac{2V(t)}{\pi}\sqrt{a^2 - r^2} & \text{cône,} \end{cases} \quad (4)$$

où $\dot{A}_n(t)$ désigne la dérivée de $A_n(t)$ par rapport au temps t . Pour le cône on obtient

$$\phi_m(r,a) = \frac{2r}{\pi} \int_1^{a/r} \frac{\nu d\nu}{\sqrt{\nu^2 - 1}} \int_0^1 \frac{xw_m(rx\nu)dx}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (5)$$

Pour le dièdre l'expression fait intervenir une intégrale par valeur principale

$$\phi_m(r,a) = - \int_r^a \frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} PV \int_{-a}^a \frac{w_m(\xi)\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi - x} d\xi. \quad (6)$$

A ce stade la correction mouillée est encore une inconnue du problème. Sa détermination résulte de la condition dite de Wagner qui stipule que le déplacement (vertical) du fluide en $r = a(t)$ doit être fini. Cela se traduit par les conditions suivantes

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) \begin{cases} \int_0^{\pi/2} w_m(a \sin \theta) d\theta \\ \int_0^{\pi/2} \sin \theta w_m(a \sin \theta) d\theta \end{cases} = \begin{cases} \frac{\pi h(t)}{2} - a \tan \beta & \text{pour le dièdre,} \\ h(t) - a \frac{\pi}{4} \tan \beta & \text{pour le cône.} \end{cases} \quad (7)$$

Par la suite on notera $Q_m(a)$ les intégrales du premier membre de cette équation.

5 Résolution du problème couplé hydro-élastique

5.1 Formulation du système différentiel

On souhaite formuler un système différentiel pour suivre les variations temporelles des amplitudes des modes $\underline{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n, \dots)$. Pour cela on introduit une nouvelle variable $q(r,t)$ telle que

$$Dq(r,t) = -\rho_d H(\dot{w} - V + V_{ini}) - \rho_f \varphi, \quad \text{avec} \quad \dot{q} = \Delta \Delta w, \quad (8)$$

où V_{ini} est la vitesse initiale d'impact. On décompose ensuite $q(r,t)$ sur la base des fonctions propres

$$q(r,t) = \sum_n^{\infty} q_n(t) (k_n/R)^4 w_n(r). \quad (9)$$

On reporte les expressions (4), (5), (6) et (9) dans (8) et on en prend le produit scalaire avec chacune des fonctions de forme $w_m(r)$ pour $m \geq 1$. Cela conduit au système matriciel suivant

$$\begin{cases} \dot{\underline{A}} &= [\lambda - W(a)]^{-1} [Z\underline{q} + \underline{g}(a) - \underline{O}(V - V_{ini})], \\ \underline{\dot{q}} &= \underline{A}, \end{cases} \quad (10)$$

avec

$$g_m(a) = \langle \varphi_0, w_m \rangle, \quad W_{mn}(a) = \langle \phi_n, w_m \rangle, \quad \lambda_{mm} = -H \frac{\rho_d}{\rho_f} U_m, \quad (11)$$

$$Z_{mm} = \frac{D}{\rho_f} \left(\frac{k_m}{R} \right)^4 U_m, \quad O_m = -\frac{\rho_d H}{\rho_f} \langle 1, w_m \rangle. \quad (12)$$

Korobkin et Khabakhpasheva (1999) proposent de modifier le système différentiel (10) par un changement de variable judicieux. Cela est suggéré par le fait que $a(t)$ est une fonction strictement monotone croissante du temps. Comme a est également une inconnue du problème, on peut avantageusement utiliser a plutôt que t comme variable d'évolution. Le Jacobien de cette transformation est fourni par la condition de Wagner (7)

$$\left(\frac{dt}{da}\right)_{\text{dièdre}} = \frac{\tan \beta + \underline{Q}'(a)\underline{A}}{\frac{\pi V(t)}{2} - \underline{Q}(a)\underline{\dot{A}}}, \quad \left(\frac{dt}{da}\right)_{\text{cône}} = \frac{\frac{\pi \tan \beta}{4} + \underline{Q}'(a)\underline{A}}{V(t) - \underline{Q}(a)\underline{\dot{A}}}, \quad (13)$$

où le $'$ désigne la dérivée par rapport à l'argument a . Puisque $\frac{dt}{da}$ ne peut devenir négatif ou nul, il est intéressant de noter que le dénominateur de $\frac{dt}{da}$ reste strictement positif. Comme on pourra le constater plus loin, cela a des conséquences notoires sur les caractéristiques du jet.

C'est la loi de Newton qui fournit l'expression de la vitesse pour la chute libre

$$M_c \dot{V} = M_c \gamma - F(t), \quad (14)$$

où M_c est la masse totale du corps, $F(t)$ est la force verticale d'impact et γ est l'accélération de la pesanteur que l'on peut en général négliger. En toute rigueur la force hydrodynamique $F(t)$ a pour expression

$$\vec{F} = -\rho_f \frac{d}{dt} \int_{D(t)} \varphi \vec{n} ds, \quad (15)$$

mais du fait des conditions aux limites du problème hydrodynamique (potentiel nul sur la surface libre), la force s'identifie à une intégrale de la pression sur toute la surface mouillée $D(t)$, c'est à dire

$$F(t) = \int_{D(t)} p(r,t) ds \quad \text{avec} \quad p(r,t) = -\rho_f \varphi_{0,t} - \rho_f \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt} [\dot{A}_n \phi_n]. \quad (16)$$

On retrouve donc des résultats classiques. La force est composée de deux contributions, l'une relative au corps rigide qui fait intervenir la masse ajoutée¹ du corps M_a

$$F_{\text{rigide}} = \frac{d}{dt} (M_a V), \quad \text{avec} \quad M_a = \begin{cases} \frac{1}{2} \rho_f \pi a^2 \ell_{ref} & \text{pour le dièdre,} \\ \frac{4}{3} \rho_f a^3 & \text{pour le cône,} \end{cases} \quad (17)$$

l'autre contribution résulte de l'élasticité

$$F_{\text{élastique}} = -\frac{d}{dt} (\underline{\dot{A}R}(a)) \quad \text{avec} \quad R_n(a) = \rho_f \int_{D(t)} \phi_n(r,a) ds. \quad (18)$$

Ces expressions permettent d'intégrer l'équation (14) pour obtenir une expression explicite de la vitesse de chute

$$V(t) = \frac{M_c(\gamma t + V_{ini}) + \underline{\dot{A}R}(a)}{M_c + M_a}, \quad (19)$$

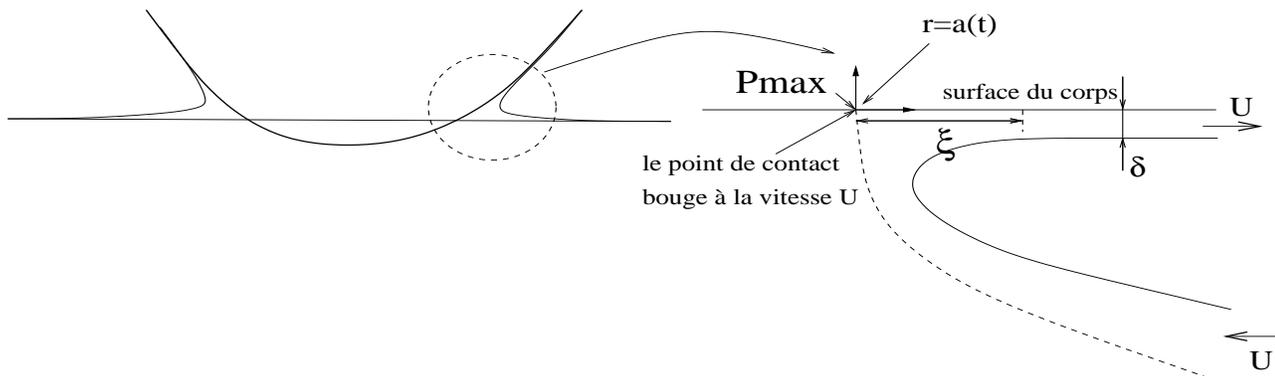
que l'on reporte dans le système différentiel pour \underline{A} et \underline{q} .

1. Pour le dièdre, défini uniquement par sa section bidimensionnelle, par souci d'homogénéité des dimensions des variables, on introduit ℓ_{ref} comme longueur de référence dans la troisième direction de l'espace.

5.2 Formulation pour la pression

La pression peut être calculée, comme toutes les autres variables, par décomposition modale. Néanmoins on sait que la pression présente un pic très important (en fait la pression est singulière) au voisinage de $r = a(t)$ et par conséquent il faudrait beaucoup de modes pour capter cette forte discontinuité. Il est donc préférable de calculer directement la pression à partir de la relation de Bernoulli.

Pour lever le problème de singularité de la pression le long de la ligne de contact, on utilise la solution de Wagner (1932) valable à la racine du jet. La figure suivante décrit l'écoulement local dans un repère qui bouge avec le point de contact $r = a(t)$.



On procède à un raccord asymptotique de la solution dite extérieure au jet à celle valable asymptotiquement à la racine du jet en $r = a$ représentée par les expressions suivantes du potentiel des vitesses et de la pression

$$\varphi_{root} \approx -4U\sqrt{\frac{\delta|\xi|}{\pi}}, \quad p_{root} \approx 2\rho_f U^2 \sqrt{\frac{\delta}{\pi|\xi|}}, \quad (20)$$

où U est la vitesse de déplacement du point de contact et δ l'épaisseur du jet; ces deux quantités sont inconnues. L'identification des expressions asymptotiques fournit

$$U = \dot{a}, \quad \delta = \begin{cases} \frac{\pi a}{8\dot{a}^2} \left(V - \frac{2}{\pi} \dot{A}(t) \underline{Q}(a) \right)^2, & \text{dièdre} \\ \frac{a}{2\pi\dot{a}^2} \left(V - \underline{Q}(a) \dot{A} \right)^2, & \text{cône} \end{cases} \quad (21)$$

L'expression de U est identique à celle du corps rigide. C'est une conséquence de la linéarisation du problème aux limites. La distribution de pression dans la racine du jet prédit un maximum au point de stagnation (dans le repère en mouvement à la vitesse U). Cette pression maximum vaut

$$P_{max} = \frac{1}{2} \rho_f \dot{a}^2. \quad (22)$$

Afin de définir une distribution de pression uniformément valide jusqu'en $r = a$, on choisit la formulation composite de Zhao et Faltinsen (1992) plutôt que celle de Cointe et Armand (1987). La raison est que, pour le cône², cette dernière n'est pas continue en $r = a(t)$. La pression se décompose donc selon

$$p(r,t) = -\rho_f \dot{\varphi}_0 - \rho_f \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{dt} \left(\dot{A}_m(t) \phi_m(r,a) \right) + P_{root} - P_{comp}, \quad (23)$$

2. On peut effectivement montrer que l'erreur pour le dièdre décroît comme $\tan \beta$ mais reste finie pour le cône.

où P_{root} désigne la solution de Wagner (1932) valable à la racine du jet

$$P_{root} = 2\rho\dot{a}^2 \frac{|\tau|^{1/2}}{(1+|\tau|^{1/2})^2} \quad \text{pour } r - a = \frac{\delta}{\pi} \left(-\log |\tau| - 4|\tau|^{1/2} - |\tau| + 5 \right) \quad r > a, \quad (24)$$

et P_{comp} est la pression composite qui annule la singularité au point de contact $r = a(t)$

$$P_{comp} = \rho_f \dot{a} \sqrt{\frac{2a}{a-r}} \begin{cases} \frac{1}{2} \left[V - \frac{2}{\pi} \underline{\dot{A}Q} \right] & \text{pour le dièdre,} \\ \frac{1}{\pi} \left[V - \underline{\dot{A}Q} \right] & \text{pour le cône.} \end{cases} \quad (25)$$

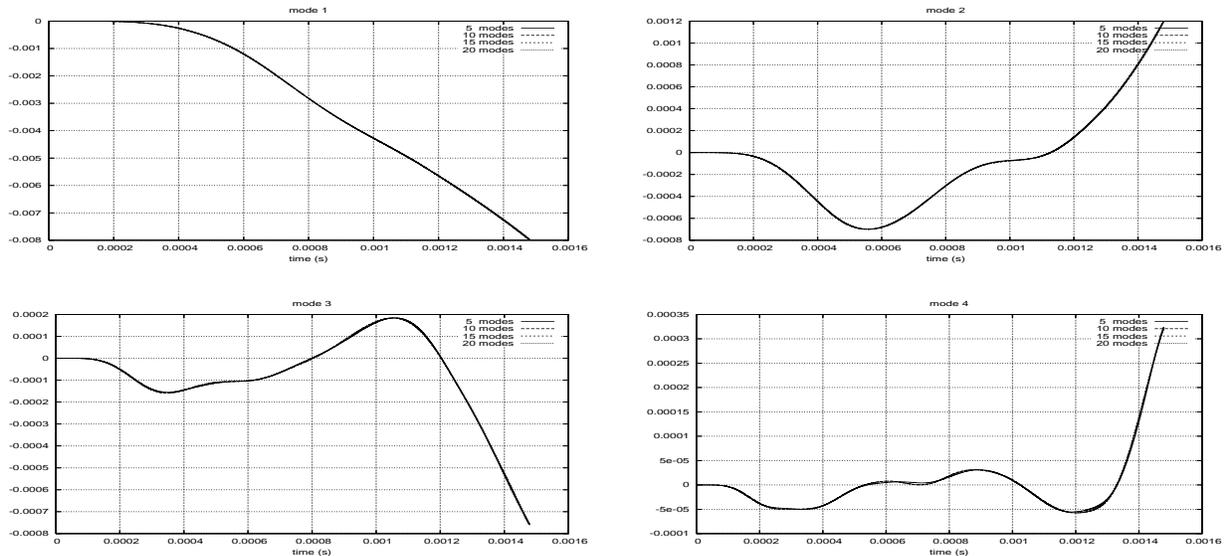
6 Résultats et discussions

La correction mouillée a est la variable qui contrôle tout le phénomène décrit par le modèle de Wagner linéarisé. Sa variation temporelle décrit en plus la vitesse d'expansion de la surface mouillée. C'est pourquoi on procède à une étude paramétrique en fonction de \dot{a} .

Autant dans le cas rigide, la variation de \dot{a} ne présente aucun mystère puisque \dot{a} est proportionnelle à la vitesse de chute³, autant dans le cas élastique, on peut mettre en évidence l'influence de la déformation du corps sur les différents phénomènes qui peuvent se produire lors de l'impact. On examine en particulier l'influence de différents paramètres sur \dot{a} , comme l'épaisseur, la hauteur de chute ainsi que l'angle mort. Au préalable il convient de justifier le choix du nombre de modes pour s'assurer de la convergence des résultats.

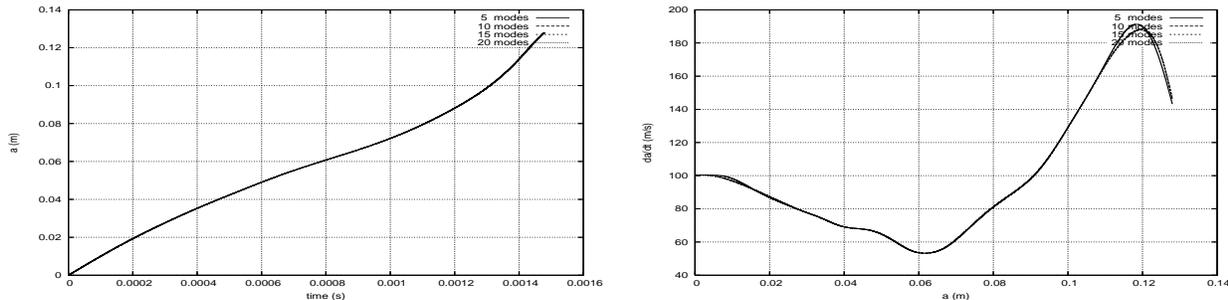
6.1 Convergence avec le nombre de modes

Il est raisonnable de penser que le nombre de modes à utiliser dépend de la rigidité du matériau. C'est l'épaisseur qui contrôle ici cette caractéristique. On considère un cône pénétrant le liquide à vitesse constante égale à la vitesse au point de contact initial fixée par la hauteur de chute $h_c = 3.5m$. L'épaisseur vaut $H = 1.5mm$ et l'angle mort est $\beta = 6^\circ$. Le rayon extérieur du cône est $R = 0.128m$. Le matériau retenu est de l'aluminium dont les caractéristiques mécaniques sont: module d'Young $E = 1.2 \cdot 10^{11} N/m^2$, coefficient de Poisson $\nu = 0.3$ et masse volumique $\rho_d = 2700 Kg/m^3$. Le liquide est de l'eau de masse volumique $\rho_f = 1000 Kg/m^3$. Quatre simulations sont effectuées respectivement avec 5, 10, 15 et 20 modes. Les figures suivantes montrent l'évolution de l'amplitude A_m en fonction du temps, pour m variant de 1 à 4.



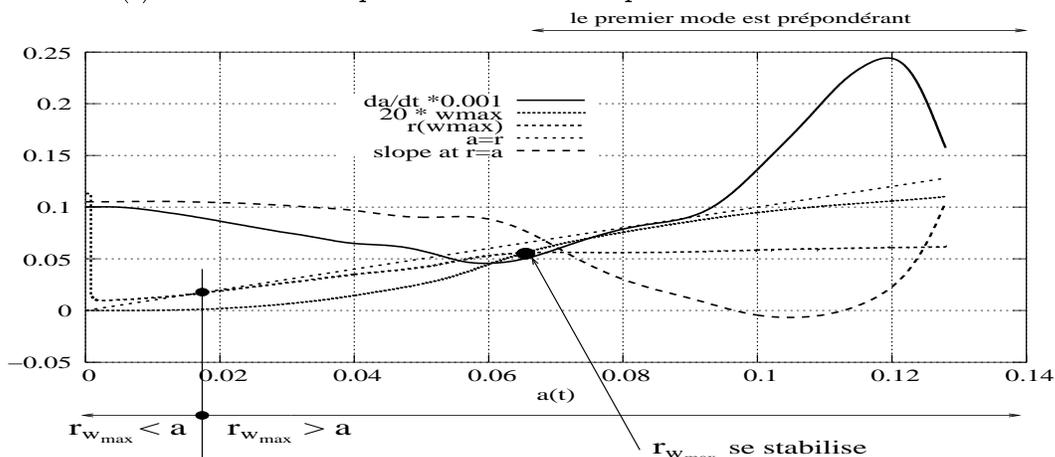
3. C'est le cas pour les seuls corps considérés ici; le dièdre et le cône. La raison est que la fonction $f(r)$ qui décrit leur génératrice, est linéaire avec r .

On constate que le rapport entre le mode 1 et les suivants décroît rapidement. Sur les figures suivantes, on examine l'influence du nombre de modes sur la variation temporelle de a (à gauche) et la variation \dot{a} avec a (à droite), il est clair que 10 modes semblent amplement suffisants. Les tests effectués à épaisseur plus importante confirment ce choix.



6.2 Effets de l'élasticité et limites du modèle

On décrit les différentes étapes du processus d'immersion pour une épaisseur de $H = 1.5\text{mm}$, un angle mort $\beta = 6^\circ$, une masse du corps mobile $M_c = 30\text{Kg}$ et en chute libre d'une hauteur $h_c = 3.50\text{m}$. Cela permet, entre autre, de corréler les variations de la déformation d'une part à la vitesse de déplacement de la ligne de contact d'autre part. Sur la figure suivante sont tracées les variations avec $a(t)$ des différentes quantités caractéristiques de l'état du cône.

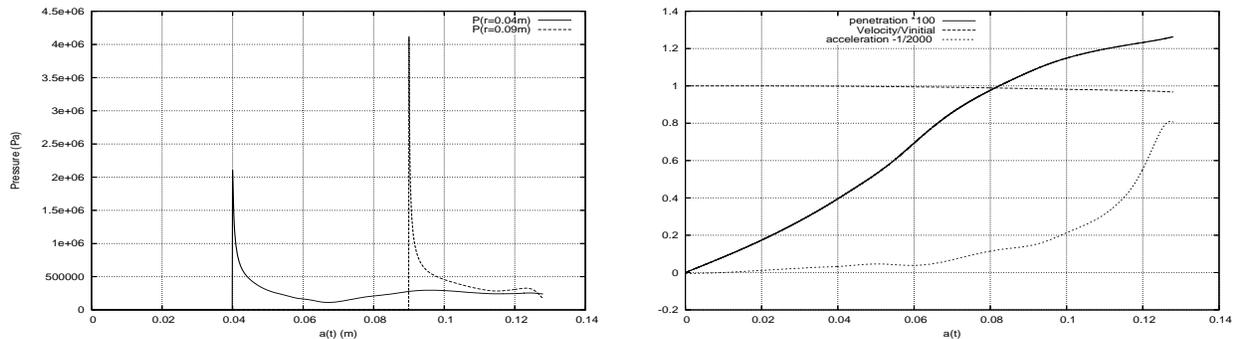


La vitesse d'expansion de la surface mouillée est ici clairement irrégulière. On peut distinguer le point où le premier mode devient dominant. En deçà de ce point, \dot{a} décroît monotoniquement. Cela est dû à la déformation croissante du corps même si l'angle mort local décroît aussi légèrement. A mi-immersion, aux environs de $a = 0.06\text{m}$, le point $r_{w_{max}}$ semble se stabiliser; c'est l'endroit le long du cône où se produit le maximum de déformation. A partir de ce point, l'immersion s'accélère avec la diminution de l'angle mort local. Un maximum est atteint avant l'immersion complète tandis que l'angle mort doit rejoindre sa valeur initiale β du fait de l'encastrement du cône en ce point. On note que la vitesse \dot{a} peut atteindre 250m/s . Pour des coques plus fines, elle peut être bien plus grande.

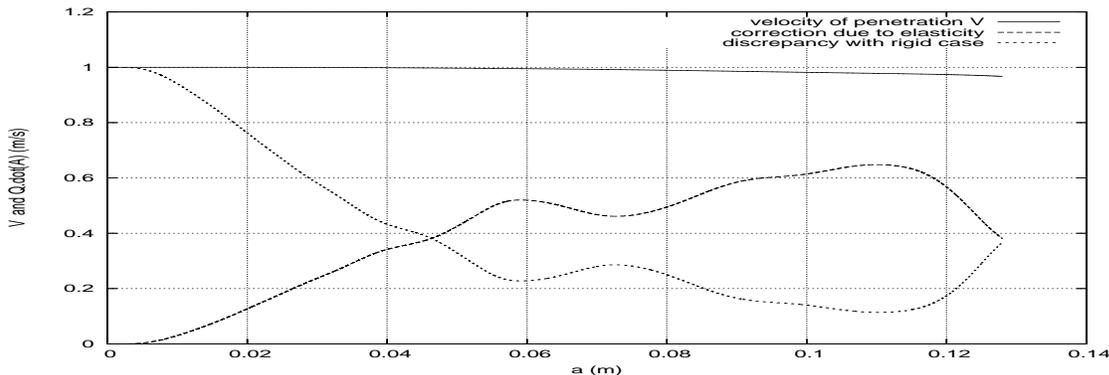
La simulation se termine avec un maximum de déformation de l'ordre de $w_{max} \approx 5.5\text{mm}$. Avant ça, il apparaît que la pente locale le long d'une génératrice devient plus petite que 4° notamment dès que $a(t) > 0.07\text{m}$. La valeur de 4° définit généralement la limite inférieure du domaine de validité du modèle de Wagner. Cela confirme le fait que peuvent se produire des phénomènes de ventilation, à savoir la formation d'un liquide inhomogène contenant des bulles d'air. Dans ce cas la pression, telle qu'elle est calculée dans ce modèle, n'est plus valable. On examine la variation de la pression en deux points de mesure $r = 0.04\text{m}$ et $r = 0.09\text{m}$ c'est à dire de part et d'autre de la limite

$a(t) = 0.07m$. Sous les hypothèses de Wagner la pression au deuxième point est largement plus importante qu'au premier point. Cela s'explique simplement par le fait que le pic est proportionnel au carré de \dot{a} . La réalité physique d'un tel comportement est discutable pour la raison évoquée plus haut. S'il se forme un coussin d'air, la pression devrait être plus faible. De surcroît on peut noter que l'amplitude de la pression au second point est divisée par un facteur 4 sur un intervalle de temps de $3 \cdot 10^{-5}s$ difficilement captable par des capteurs couramment utilisés pour ce genre d'expérience.

Pour la même simulation, on examine les variations de la hauteur de pénétration $h(t)$, de la vitesse $V(t)$ et de l'accélération $\dot{V}(t)$ avec $a(t)$. La diminution de la vitesse est de l'ordre de 6 %, tout à fait semblable au cas rigide. En fin d'immersion l'accélération atteint des valeurs très importantes de l'ordre de 165 fois la gravité⁴. Il est aussi intéressant de noter que le rapide changement d'angle mort local provoque une diminution de la décélération c'est à dire une diminution de l'effort d'impact.



Même si cela reste pratiquement très difficile à mettre en évidence expérimentalement, on peut estimer l'influence de l'élasticité sur l'épaisseur du jet. Pour l'illustrer on trace sur la figure suivante la variation temporelle de $V(t)$ et $\frac{\dot{A}Q}{V}$. Pour le cône, le carré de l'écart entre ces deux termes (ramené au carré de la vitesse $V(t)$) fournit une indication quantitative sur la diminution de l'épaisseur du jet du fait de l'élasticité. Il y a effectivement une diminution si $\frac{\dot{A}Q}{V}$ reste constamment positif, ce qui est le cas. On constate ici que l'épaisseur du jet diminue de 30% par rapport au cas rigide.



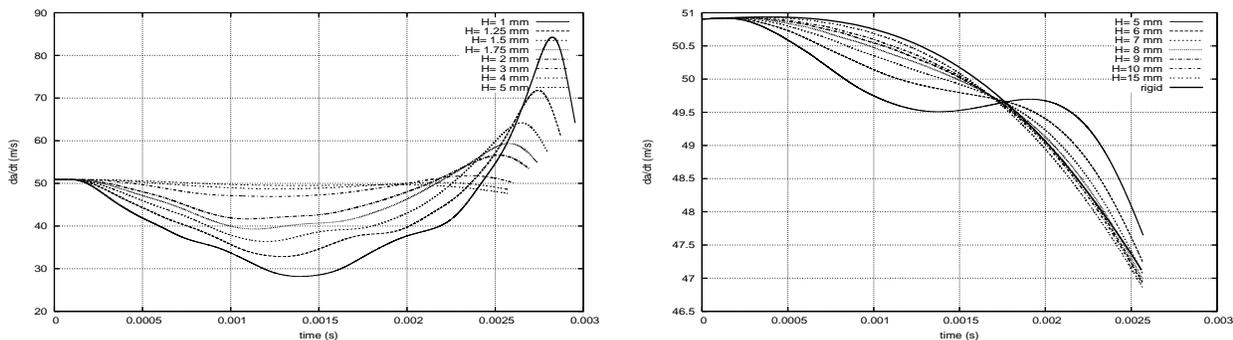
Ces résultats sont en accord avec les variations de \dot{a} définies par les équations (13). L'élasticité du corps induit une diminution de l'épaisseur du jet mais aussi une augmentation de la vitesse du fluide dans le jet⁵. Au final il faudrait examiner plus précisément la répartition d'énergie d'une part transmise au fluide, d'autre part évacuée dans le jet et surtout emmagasinée par la coque. Ce point fera l'objet d'une étude ultérieure.

4. Entre l'accélération et l'effort hydrodynamique d'impact, il y a un facteur M_c la masse totale du corps dans l'air.

5. On sait que cette vitesse est la somme de la vitesse du point de contact \dot{a} plus la vitesse du fluide dans le jet \dot{a} . Au total la vitesse du fluide dans le jet vaut $2\dot{a}$.

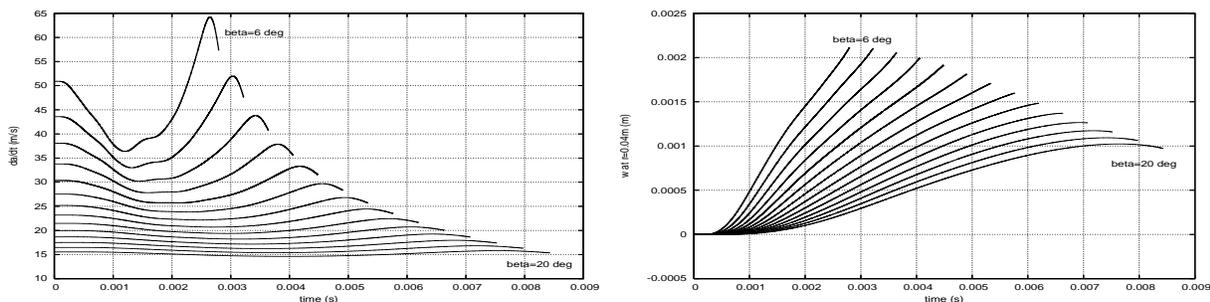
6.3 Etude paramétrique de l'élasticité de la coque

L'influence de l'épaisseur de la coque sur la variation de \dot{a} est illustrée sur les deux figures suivantes relatives au cône d'angle mort 6° chutant d'une hauteur $h_c = 0.9m$. L'épaisseur varie de $H = 1mm$ jusqu'à $H = 15mm$.



Il semble que, pour cette configuration précise, l'épaisseur $H = 5mm$ limite deux types de comportement élastique. En deçà de $H = 5mm$, l'élasticité influence fortement les étapes successives de l'immersion comme on vient de le décrire plus haut. Au delà de $H = 5mm$, les comportements élastiques et rigides diffèrent peu. En particulier, le temps d'immersion est très peu affecté. Une analyse en terme de paramètres nondimensionnels devrait être menée pour généraliser ce résultat.

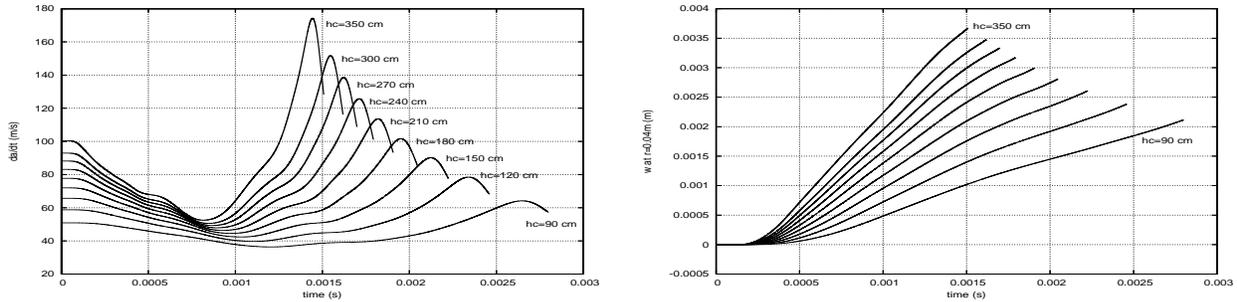
Si on permet à l'angle de varier entre 6° et 20° (limite supérieure admise dans l'approximation de Wagner) par pas de 1° . La figure suivante illustre –pour une épaisseur de $H = 1.5mm$ – l'influence de β sur la variation temporelle de la vitesse d'immersion \dot{a} .



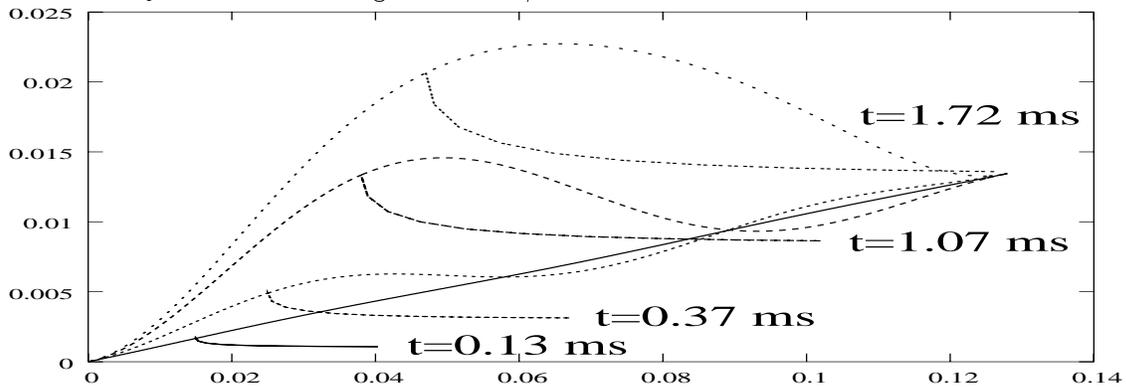
La figure de droite montre les déformations correspondantes calculées au point $r = 0.04m$ mesuré à partir du sommet du cône. On constate que la durée de simulation est d'autant plus courte que l'angle est faible. Plus l'angle est important, moins l'élasticité du matériau se fait sentir. En particulier, pour les grandes valeurs de β il semble que la déformation atteigne un maximum. Cela indique que la phase de vibration libre commence.

La hauteur de chute accentue clairement les effets de l'élasticité plus encore qu'une diminution de l'angle mort. La figure suivante (celle de gauche) montre la variation temporelle de \dot{a} pour une hauteur de chute variant de $h_c = 90cm$ jusqu'à $h_c = 350cm$ et pour un angle mort $\beta = 6^\circ$. A droite,

sont tracées les déformations correspondantes calculées au point $r = 0.04m$.



Quand l'épaisseur du matériau devient faible on constate la formation d'une cavité. Quatre états successifs du dièdre sont tracés sur la figure suivante pour le dièdre d'épaisseur $H = 0.5mm$ tombant d'une hauteur $h_c = 3.5m$ et un angle mort de $\beta = 6^\circ$.

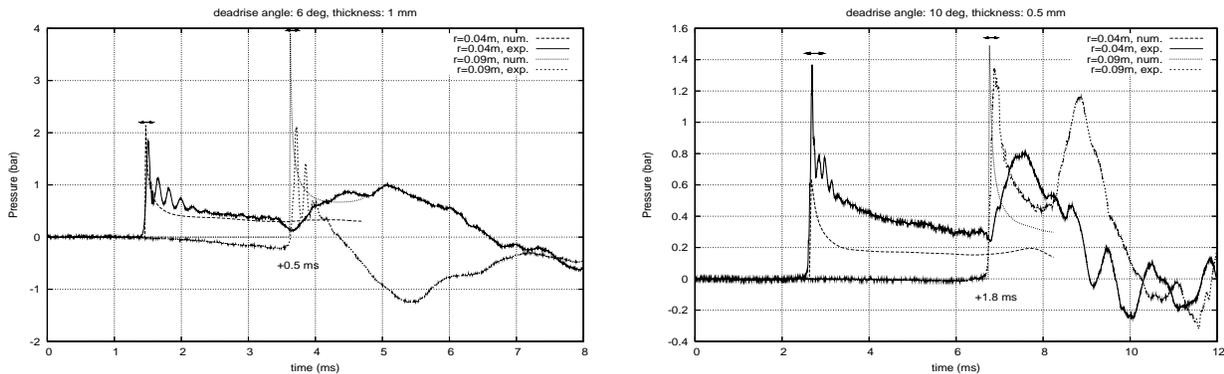


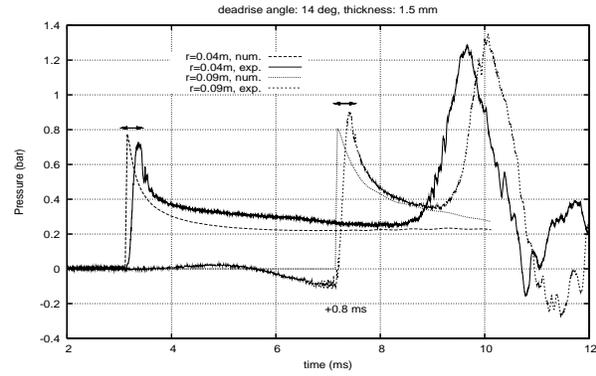
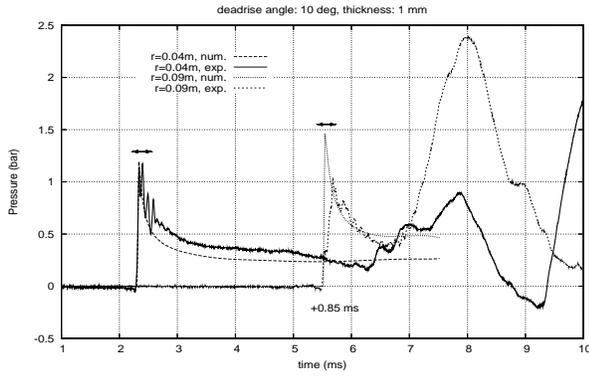
A partir de $t \approx 1ms$, on peut raisonnablement penser que des effets de coussin d'air vont se produire. Ultérieurement il se forme une poche d'air. Ce phénomène peut très bien être pris en compte par le présent modèle. Cela suppose qu'un nouveau contact est modélisé sur le bord extérieur (voir Korobkin et Khabakhpasheva, 1999).

6.4 Comparaisons avec des résultats expérimentaux

Il ne semble pas exister de résultats expérimentaux concernant le dièdre tel qu'il a été configuré ici, à savoir encasté au centre et sur sa frontière extérieure. Pour le cône, par contre, on dispose des résultats de Donguy (2002). Le dispositif expérimental permet de mesurer la pression en deux points sur une même génératrice du cône, à des distances $r = 0.04m$ et $r = 0.09m$ du sommet. Les déformations sont également disponibles mais ces résultats ne sont pas exploités ici.

Les figures suivantes montrent les variations temporelles de la pression aux deux points de mesure. Différents paramètres d'angle mort et d'épaisseur sont considérés. La vitesse initiale au point de contact est $V_{ini} = 2.5m/s$.





On ajuste les instants où le fluide touche les capteurs de pression. Cet ajustement des instants est évidemment discutable –surtout pour la pression en $r = 0.09m$ – mais il faut bien définir une origine en temps. On indique sur la figure l'écart en temps à ajouter pour procéder à cet ajustement. Les raisons peuvent être attribuées à des défauts de colinéarité de l'axe de chute et de l'axe d'axisymétrie. De plus à l'instant de contact du capteur, la vitesse de croissance de la pression dépend de la vitesse de déplacement \dot{a} . Le capteur a un diamètre de $5mm$. Cela permet de définir une durée de phase de croissance de l'ordre de $0.2ms$ à $0.45ms$. Cette durée de phase de croissance est illustrée par une double flèche au dessus des pics de pression. Les résultats expérimentaux révèlent de nombreux phénomènes qui ne sont pas pris en compte dans le modèle. Par exemple, il peut se produire une décroissance de la pression avant que le capteur ne soit théoriquement touché par le fluide. On observe aussi ce phénomène pour un cône rigide. Des effets de ventilation sont probablement présents. Sans connaître précisément l'erreur de mesure commise lors des expériences et surtout en absence d'une estimation précise de l'erreur de répétabilité des essais, on peut quand même conclure que le modèle reproduit assez bien le pic de pression. En particulier on peut dorénavant expliquer pourquoi le pic de pression en $r = 0.09m$ est plus important qu'en $r = 0.04m$. On note aussi que, bien après l'immersion des capteurs, il se produit un accroissement de la pression particulièrement important aux deux points de mesure. Ces phénomènes n'ont pas encore reçu d'explication physique claire mais ils semblent toutefois se produire en même temps que l'immersion complète du cône *i.e.* quand $a(t) = R$.

7 Conclusion

L'approche qui a été développée, est très riche d'enseignements quant à l'influence de l'élasticité d'une coque au moment de son impact sur une surface libre. Il est clair que ce modèle fournit des éléments objectifs de dimensionnement dans le cadre d'études de conception préliminaire. Un point essentiel qui milite en faveur ce modèle est son faible coût informatique. On a ainsi accès aux déformations ainsi qu'aux contraintes supportées par le matériau. Des comparaisons supplémentaires avec des résultats expérimentaux sont désormais nécessaires pour mieux cerner les limites d'application d'un tel modèle.

Ces travaux semblent aussi ouvrir de nombreuses directions d'étude complémentaires:

1. On peut envisager de traiter le cas quasi axisymétrique en introduisant une base modale où la variation suivant l'azimuth serait prise en compte. Une linéarisation autour du corps axisymétrique reste possible (voir Korobkin et Scolan 2002). L'ordre zéro correspond à la géométrie axisymétrique. L'ordre un permet d'introduire une petite variation géométrique et de calculer la correction mouillée correspondante. Les difficultés viennent du fait que la correction de l'effort d'impact est du deuxième ordre; cela devient clairement très compliqué.
2. L'alternative est de s'affranchir de la linéarisation dite de "corps épais". Cela signifie qu'une autre approche numérique doit être employée: par exemple une méthode intégrale dans la-

quelle la condition de Neumann sur la surface mouillée est exacte. On peut alors ajouter des termes dans l'équation de déformation afin de prendre en compte la géométrie exacte. Dans ce cas on peut toujours envisager d'utiliser la base de fonctions propres, mais les équations couplées hydro-élastiques deviennent fortement non-linéaires.

3. Concernant la prise en compte d'une cavité, le modèle de Wagner est tout à fait adapté. Pour cela il faut résoudre deux problèmes d'impact locaux de part et d'autre de la cavité. On doit s'attendre malheureusement à des effets de compressibilité de la poche d'air ce qui constitue une difficulté supplémentaire non négligeable.
4. Il reste beaucoup d'incertitude sur la validité du raccord entre la solution dite extérieure au jet et la solution valable à la racine du jet. On sait que ce raccord donne accès à des informations importantes comme la pression maximum ainsi qu'à l'épaisseur du jet. Néanmoins il n'est pas sûr que la physique que l'on modélise ainsi soit effectivement le phénomène que l'on doit observer. Comme analyse complémentaire, il serait souhaitable de procéder à une étude paramétrique concernant les caractéristiques du jet pour s'assurer de l'applicabilité du modèle sur ce point.
5. Enfin certaines configurations laissent penser que des phénomènes de cavitation peuvent se produire notamment près du sommet du cône ou du coin. Il conviendrait de recenser ces configurations et de réaliser des expériences afin de justifier leur réalité physique.

Ces travaux sont réalisés dans le cadre du Plan d'Etude Amont "Simulation numérique de l'impact vertical d'un corps élastique sur une surface fluide." initié par le Bassin d'Essais des Carènes. Les développements théoriques sont également supportés par le CEPM (projet M6404/01) en partenariat avec le Bureau Veritas, Principia RD, et Saipem SA (ex Bouygues Offshore).

4. Références

- Cointe, R. & Armand, J.-L., 1987 Hydrodynamic Impact Analysis of a Cylinder. *Journal of Offshore Mechanical and Arctic Engineering*, **109**, 3, 237-243.
- Donguy B, 2002, Etude de l'interaction fluide structure lors de l'impact hydrodynamique. PhD Thesis, University of Nantes.
- Faltinsen O.M., 2000, "Hydroelastic slamming", *J. Mar. Sci. Technol.* Vol. 5, No 2, pp 49-65.
- Korobkin A.A. & Khabakhpasheva T.I., 1999, Periodic wave impact onto an elastic plate. 7th Conf. of Numerical Ship Hydrodynamics, Nantes.
- Kvålsvold J., 1994, Hydroelastic modelling of wetdeck slamming on multihull vessels. PhD Thesis; University of Trondheim.
- Scolan Y.-M. & Korobkin A., 2001, "The energy distribution from impact of a three-dimensional body onto a liquid free surface." 16th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Hiroshima.
- Wagner H., 1932, Über Stoss- und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten., *ZAMM* 12, pp 193-215.
- Zhao, R. & Faltinsen, O., 1992 Water entry of two-dimensional bodies. *J. Fluid Mech.*, 246, pp 593-612.
- Donguy B, 2002, "Etude de l'interaction fluide structure lors de l'impact hydrodynamique.", Thèse de Doctorat, Université de Nantes.