

9<sup>èmes</sup> JOURNÉES DE L'HYDRODYNAMIQUE

10 - 11 - 12 MARS 2003

POITIERS - FUTUROSCOPE

**ETUDE NUMERIQUE ET EXPERIMENTALE  
DE LA REPONSE A LA HOULE D'UN ENSEMBLE  
FLOTTEUR + CUVES PARTIELLEMENT REMPLIES**

*NUMERICAL AND EXPERIMENTAL STUDY OF THE  
WAVE RESPONSE OF A FLOATING SUPPORT  
WITH PARTIALLY FILLED TANKS*

**B. MOLIN<sup>1</sup>, F. REMY<sup>1</sup>, TH. COUDRAY<sup>2</sup>, S. RIGAUD<sup>3</sup>, C. MARY<sup>4</sup>**

<sup>1</sup> Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Marseille, 13451 Marseille cedex 20

<sup>2</sup> Principia R.D., Athélia 1, 13705 la Ciotat cedex

<sup>3</sup> Saipem SA, 78884 Saint-Quentin Yvelines cedex

<sup>4</sup> Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau

**Résumé**

La réponse sur houle d'un système flottant avec cuves est étudiée dans le cadre de la théorie potentielle linéarisée. Le mouvement fluide dans les cuves est décomposé sur la base modale fournie par les modes propres de ballottement. On exhibe pour les amplitudes modales des équations de type masse ressort amorti, couplées à celles décrivant la dynamique du support. Le modèle numérique développé, à partir du module de diffraction-radiation de *DIODORE* et du module *DIOCUVE*, est validé sur des résultats d'essais en bassin réalisés au BGO-First. On présente pour finir une extension au deuxième ordre de la modélisation du mouvement fluide dans les cuves.

**Summary**

The wave response of a floating support with partially filled tanks is analyzed within the scope of linearized potential flow theory. The fluid motion within the tanks is decomposed on the orthogonal set provided by the natural sloshing modes. Pendulum type equations are exhibited for the modal amplitudes. Linear and quadratic damping terms are introduced to represent energy dissipation due to friction at the walls. These equations are coupled with the dynamics of the support. Results provided by the numerical model are compared with experimental data from dedicated model tests, performed at BGO-First. A good agreement is obtained. Second-order extensions of the theoretical model are finally proposed.

# 1 Introduction

L'application pratique considérée est la réponse à la houle de systèmes flottants de production de GNL (gaz naturel liquéfié). Ces «FPSO-gaz» (ou «LNG-FPSO») sont envisagés dans un futur proche pour des gisements offshore en grande profondeur. A l'inverse des cuves de méthaniers, toujours complètement pleines ou complètement vides, celles des FPSO-gaz voient leurs niveaux de remplissage varier constamment, au rythme de la production et de son évacuation. Il se pose donc le problème du ballotement du GNL, et des pressions induites aux parois, sous l'effet du mouvement propre du support induit par la houle extérieure. En fait le mouvement du support dépend aussi de celui du liquide dans les cuves et il convient de traiter le problème couplé.

Il est probable que ces LNG-FPSO seront d'abord implantés dans des zones où les états de mer sont relativement cléments, comme l'ouest africain. On peut alors espérer que les effets de ballotement dans les cuves restent limités et qu'une approche linéarisée permette de les décrire.

Une méthode pour traiter la dynamique jointe du support et du mouvement liquide dans les cuves est de résoudre des problèmes de «radiation» élémentaires pour chaque cuve, et d'en tirer des matrices de masses ajoutées intérieures, fonctions de la pulsation d'excitation. Une telle fonctionnalité est offerte par quelques codes de diffraction-radiation (Guével *et al.* 1989). Les inconvénients posés par cette méthode sont qu'il est difficile d'introduire des termes d'amortissement, représentant par exemple le frottement aux parois; que la restitution des élévations de surface libre dans les cuves demande des calculs supplémentaires; et, enfin, que les extensions possibles à l'introduction de non-linéarités, et/ou à la résolution du problème dans le domaine temporel, sont difficiles.

Une autre solution est de décomposer le mouvement fluide intérieur sur une base, par exemple celle fournie par les modes propres de ballotement. Les inconnues sont alors les amplitudes modales, pour lesquelles on peut exhiber des équations de type masse - ressort, ou de «pendule équivalent». Cette approche est appliquée depuis longtemps pour décrire le ballotement dans les réservoirs de carburant (Dodge, 1966). Il est alors facile d'introduire dans les équations modales des termes d'amortissement, linéaires ou quadratiques, représentatifs des mécanismes dissipateurs d'énergie comme le frottement aux parois, la séparation de l'écoulement sur les tours de refroidissement ou d'autres obstacles, voire le déferlement de la surface libre. Le problème peut être résolu aussi bien en temporel qu'en fréquentiel. On verra plus loin que des extensions à l'ordre deux d'approximation sont aussi facilement envisageables.

C'est donc l'approche modale qui a été choisie, avec quelques modifications par rapport à la littérature qui sont décrites dans la section 2. Des termes d'amortissement, linéaires et quadratiques, sont introduits dans les équations modales. Un terme d'amortissement quadratique est aussi introduit dans l'équation du mouvement de roulis du support. Une linéarisation dite stochastique est ensuite appliquée pour obtenir les fonctions de transfert du mouvement du support, et des amplitudes modales, sur une houle irrégulière de spectre donné.

Le développement numérique est effectué dans le logiciel *DIODORE*, qui dispose d'un module, *DIOCUVE*, donnant accès aux modes propres de ballotement d'une cuve de géométrie quelconque. Un modèle simplifié, bi-dimensionnel, restreint au cas de cuves rectangulaires sur des barges de section également rectangulaire, a aussi été développé à partir du code écrit par Geyer (1989). Quelques résultats numériques sont d'abord présentés, illustrant le rôle joué par les amortissements internes et externes aux cuves sur la limitation des résonances.

Dans la section 3 on décrit deux campagnes expérimentales, réalisées au BGO-First dans le but de fournir une base de validation aux logiciels. Dans la première campagne, deux aquariums rectangulaires, longs de 80 cm et larges de 25 cm, sont fixés transversalement sur le pont de la maquette de la Well-Head Barge de Saipem SA. Les essais sont effectués en houles de travers, régulières et irrégulières, pour différents taux de remplissage et différents états de surface des aquariums. Dans la seconde campagne, les deux aquariums sont rassemblés en un seul, fixé en long sur la barge. Les essais sont réalisés en houles irrégulières aux incidences de 0, 30 et 60 degrés.

Les résultats de la comparaison calculs-essais sont présentés dans la section 4. Enfin, on se livre à quelques réflexions sur des extensions possibles, comme la résolution du problème de ballotement au second ordre d'approximation.

## 2 Modèle théorique

### 2.1 Modes propres de ballonnement

La première étape est la détermination des modes propres de ballonnement dans les cuves, pour les niveaux de remplissage étudiés, dans le cadre de la théorie potentielle linéarisée. Mathématiquement cela signifie rechercher les solutions non triviales du problème aux limites :

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{dans le volume fluide} \quad (1)$$

$$\nabla\varphi \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur la paroi } S_C \quad (2)$$

$$g\varphi_z - \omega^2\varphi = 0 \quad \text{sur la surface libre } S_F (z=0) \quad (3)$$

où

$$\Phi(x,y,z,t) = \varphi(x,y,z) \sin(\omega t + \theta)$$

On obtient ainsi une suite discrète de pulsations propres  $\omega_n$  et de modes  $\varphi_n$  associés.

Par exemple, pour une cuve rectangulaire, de largeur  $b$  et de hauteur de liquide  $h$  (en deux dimensions), les modes propres sont donnés par :

Pulsations propres :

$$\omega_n^2 = g \lambda_n \tanh \lambda_n h \quad \text{où} \quad \lambda_n = \frac{n \pi}{b} \quad (4)$$

Élévation de surface libre :

$$\eta_n(y,t) = A_{n0} \cos \lambda_n y \cos(\omega_n t + \theta_n) \quad (5)$$

Potentiel des vitesses :

$$\Phi_n = -\frac{A_{n0} g}{\omega_n} \frac{\cosh \lambda_n (z+h)}{\cosh \lambda_n h} \cos \lambda_n y \sin(\omega_n t + \theta_n) \quad (6)$$

(le référentiel  $Oyz$  utilisé étant centré à l'intersection paroi gauche surface libre).

Les potentiels  $\varphi_n$  forment une base orthogonale sur la surface libre. En effet :

$$\iint_{S_F} \varphi_m \varphi_n \, dS = \frac{g}{\omega_n^2} \iint_{S_F} \varphi_m \frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \, dS = \frac{g}{\omega_n^2} \iint_{S_F} \varphi_n \frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \, dS = \frac{\omega_m^2}{\omega_n^2} \iint_{S_F} \varphi_m \varphi_n \, dS \quad (7)$$

Donc  $\iint_{S_F} \varphi_m \varphi_n \, dS = 0$  si  $\omega_m \neq \omega_n$ . Dans le cas où  $\omega_m = \omega_n$  (cas par exemple d'un cube ou d'un cylindre vertical), il faut choisir les potentiels  $\varphi_m$  et  $\varphi_n$  en préservant l'orthogonalité.

On admettra que la base modale est complète.

Le mouvement vertical de la surface libre dans chaque cuve est alors représenté sous la forme :

$$\eta(x,y,t) = \sum_{n=1}^N A_n(t) \zeta_n(x,y) \quad (8)$$

où :

$$\zeta_n(x,y) = \frac{\omega_n}{g} \varphi_n(x,y,0) \quad (9)$$

(on normalise les  $\varphi_n$  de manière que, par exemple,  $\max \zeta_n(x,y) = 1$ ).

Le potentiel associé dans la cuve étant :

$$\Phi(x,y,z,t) = -\sum_n \left( \int_0^t A_n(\tau) \, d\tau \right) \omega_n \varphi_n(x,y,z) \quad (10)$$

## 2.2 Problèmes élémentaires de «radiation»

La deuxième étape est de résoudre le problème du mouvement forcé de la cuve, de vitesse unitaire, suivant chacun de ses degrés de liberté. On suppose toujours que les mouvements sont petits, on écrit donc les conditions aux limites sur leurs positions de référence comme pour les problèmes de radiation extérieurs. Pour le degré de liberté  $j$  le problème à résoudre est donc le suivant :

$$\Delta\varphi_j = 0 \quad \text{dans le volume fluide} \quad (11)$$

$$\nabla\varphi_j \cdot \vec{n} = N_j \quad \text{sur } S_C \quad (12)$$

$$g\varphi_{jz} - \omega^2\varphi_j = 0 \quad \text{sur } S_F (z = 0) \quad (13)$$

la pulsation  $\omega$  étant ici donnée.  $N_j$  désigne la  $j$ -ième composante de la normale dite généralisée.

Le potentiel  $\varphi_j$  est alors recherché comme une combinaison de modes propres, plus un potentiel auxiliaire  $\tilde{\phi}_j$  qui vérifie la condition de glissement à la paroi. C'est sur le choix de ce potentiel auxiliaire que des divergences apparaissent dans la littérature.

Si l'on se réfère à l'article de Dodge (1966), on y lit que le potentiel auxiliaire est celui d'un liquide qui remplit complètement une cuve formée de la carène liquide et de son symétrique par rapport au plan de surface libre. Pour les mouvements élémentaires de cavement, embardée et lacet cela revient à afficher une condition de Neumann à la surface libre  $\partial\tilde{\phi}_j/\partial z = 0$  ou, en d'autres termes, c'est le potentiel de «radiation» à pulsation nulle. En cavement et en embardée, de plus, la solution est très simple :

$$\tilde{\phi}_1 = x \quad \tilde{\phi}_2 = y \quad (14)$$

Pour les mouvements élémentaires de roulis et tangage, symétriser la carène revient en fait à prendre comme condition de surface libre  $\tilde{\phi}_j = 0$  ( $j=4,5$ ) : les potentiels auxiliaires  $\tilde{\phi}_j$  ( $j=4,5$ ) sont les potentiels de «radiation» à pulsation infinie ! Il y a un manque de cohérence.

Malheureusement, dans son article, Dodge ne développe pas le cas de la rotation. Il est possible qu'il ait simplement mal exprimé son principe de symétrisation et qu'il utilise les potentiels élémentaires à pulsation nulle pour tous les degrés de liberté. C'est aussi ce que font, par exemple, Faltinsen *et al.* (2000), qui réfèrent aux potentiels de pulsation nulle en roulis, tangage et lacet comme aux «potentiels de Stokes-Joukowski».

On s'est donc livré à quelques réflexions sur les avantages comparés des potentiels auxiliaires à pulsation nulle ou infinie. En fin de compte, et à l'encontre, apparemment, du choix des précédents investigateurs, on a opté pour le potentiel à pulsation infinie, les justifications étant les suivantes :

1. Si, pour les translations, les potentiels à pulsation nulle sont beaucoup plus simples (14) que ceux à pulsation infinie, pour les rotations la complexité est comparable. Dans le cas d'une géométrie quelconque une résolution numérique est nécessaire dans les deux cas.

2. Les potentiels à pulsation infinie caractérisent la réponse impulsionnelle de la cuve. La représentation modale traduit l'histoire passée du mouvement. Cette décomposition nous paraît donc plus physique.

3. La condition  $\tilde{\phi}_j = 0$  à la surface libre signifie qu'il n'y a pas de déformation associée : il n'y a pas de redondance avec la décomposition sur la base modale.

4. Le choix du potentiel à pulsation infinie entraîne que le terme source dans l'équation du pendule équivalent est l'accélération de la cuve. Celui du potentiel à pulsation nulle que c'est la dérivée seconde de l'accélération.

5. Le module *DIOCUVE* calcule aussi bien les deux potentiels auxiliaires.

Revenant au problème (11) (12) (13) on exprime donc le potentiel  $\varphi_j$  sous la forme :

$$\varphi_j = \tilde{\phi}_j + \psi_j \quad (15)$$

où  $\tilde{\phi}_j$  est le potentiel à pulsation infinie qui vérifie :

$$\Delta\tilde{\phi}_j = 0 \quad \text{dans le volume fluide} \quad (16)$$

$$\nabla\tilde{\phi}_j \cdot \vec{n} = N_j \quad \text{sur } S_C \quad (17)$$

$$\tilde{\phi}_j = 0 \quad \text{sur } S_F (z = 0) \quad (18)$$

Le potentiel  $\psi_j$  est solution de

$$\Delta\psi_j = 0 \quad \text{dans le volume fluide} \quad (19)$$

$$\nabla\psi_j \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{sur } S_C \quad (20)$$

$$g\psi_{jz} - \omega^2\psi_j = -g\tilde{\phi}_{jz} \quad \text{sur } S_F (z = 0) \quad (21)$$

Il suffit alors de projeter  $\tilde{\phi}_{jz}(x,y,0)$  sur la base  $\varphi_n(x,y,0)$  :

$$\tilde{\phi}_{jz}(x,y,0) = \sum_n \frac{\iint_{S_F} \tilde{\phi}_{jz} \varphi_n \, dS}{\iint_{S_F} \varphi_n^2 \, dS} \varphi_n(x,y,0) = \sum_n \gamma_{jn} \varphi_n(x,y,0) \quad (22)$$

pour obtenir la solution

$$\psi_j(x,y,z) = -g \sum_n \frac{\gamma_{jn}}{\omega_n^2 - \omega^2} \varphi_n(x,y,z) \quad (23)$$

La combinaison  $\tilde{\phi}_j + \psi_j$  est le potentiel associé à une **vitesse** d'amplitude unitaire suivant le degré de liberté  $j$  de la cuve. Pour obtenir celui relatif à un **mouvement** d'amplitude unitaire, il faut le multiplier par  $-i\omega$ . Pour obtenir l'élévation de surface libre il faut encore multiplier par  $i\omega/g$ , puis par  $g/\omega_n$  pour la normaliser par rapport à  $\zeta_n$ . La fonction de transfert qui relie le mouvement suivant le degré de liberté  $j$  de la cuve à l'amplitude  $A_n$  du clapotis  $n$  est donc :

$$A_n/X_j = -\frac{\omega^2 g \gamma_{jn}}{\omega_n (\omega_n^2 - \omega^2)} = -\frac{\omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2} D_{nj} \quad (24)$$

( $\tilde{\phi}_j$  étant nul à la surface libre).

Il revient au même de considérer que  $A_n(t)$  est régi par l'équation différentielle :

$$\ddot{A}_n + \omega_n^2 A_n = D_{nj} \ddot{X}_j \quad (25)$$

équation du «pendule équivalent» dans laquelle on introduira, plus loin, des termes d'amortissement. Il est important de remarquer que les coefficients  $D_{nj}$  ne dépendent pas de la pulsation  $\omega$ . Cette équation est donc valable pour un mouvement imposé  $X_j(t)$  quelconque.

Il reste à évaluer les coefficients  $D_{nj}$  définis par

$$D_{nj} = \frac{g}{\omega_n} \frac{\iint_{S_F} \tilde{\phi}_{jz} \varphi_n \, dS}{\iint_{S_F} \varphi_n^2 \, dS} \quad (26)$$

Pour cela on peut mettre à profit les transformations :

$$\iint_{S_F} \tilde{\phi}_{jz} \varphi_n \, dS = \iint_{S_F} (\tilde{\phi}_{jz} \varphi_n - \tilde{\phi}_j \varphi_{nz}) \, dS \quad (27)$$

$$= - \iint_{S_C} (\nabla \tilde{\phi}_j \cdot \vec{n} \varphi_n - \nabla \varphi_n \cdot \vec{n} \tilde{\phi}_j) \, dS \quad (28)$$

$$= - \iint_{S_C} N_j \varphi_n \, dS \quad (29)$$

terme que l'on va relier à l'expression des efforts hydrodynamiques dans le paragraphe suivant.

### 2.3 Réaction fluide à la paroi

L'écoulement dans la cuve est défini par les amplitudes  $A_n(t)$  des différents modes de ballonnement, et par les potentiels impulsions  $\tilde{\phi}_j$  associés aux vitesses instantanées. Le potentiel global est donc :

$$\Phi(x,y,z,t) = - \sum_n \left( \int_0^t A_n(\tau) \, d\tau \right) \omega_n \varphi_n(x,y,z) + \sum_{j=1}^6 \dot{X}_j(t) \tilde{\phi}_j \quad (30)$$

La pression hydrodynamique dans le fluide est :

$$p = -\rho \Phi_t = \rho \sum_n A_n(t) \omega_n \varphi_n(x,y,z) - \rho \sum_{j=1}^6 \ddot{X}_j(t) \tilde{\phi}_j \quad (31)$$

Les efforts hydrodynamiques sont donnés par :

$$\vec{F} = \iint_{S_C} p \vec{n} \, dS \quad (32)$$

$$\vec{C} = \iint_{S_C} p \vec{r} \wedge \vec{n} \, dS \quad (33)$$

la normale  $\vec{n}$  étant dirigée vers l'extérieur.

Soit, en introduisant le vecteur effort généralisé  $\vec{F} = (\vec{F}, \vec{C})$  :

$$\vec{F} = \sum_n A_n(t) \vec{f}_n - \mathbf{M}_a(\infty) \ddot{\vec{X}} \quad (34)$$

où  $\mathbf{M}_a(\infty)$  est la matrice de masses et inerties ajoutées de la cuve, à pulsation infinie, et

$$f_{nj} = \rho \omega_n \iint_{S_C} \varphi_n N_j dS \quad (35)$$

On remarque que les coefficients  $f_{nj}$  et  $D_{nj}$  s'expriment à partir des mêmes intégrales sur  $S_C$ , et qu'ils se relient par :

$$D_{nj} = -\frac{g}{\rho} \frac{f_{nj}}{\omega_n^2 \iint_{S_F} \varphi_n^2 dS} \quad (36)$$

Passant à la limite  $\omega \rightarrow 0$  dans (25) et (34) on obtient la relation, entre masses-inerties ajoutées à pulsation infinie et masses-inerties ajoutées à pulsation nulle :

$$\mathbf{M}_{a_{ij}}(\infty) = \mathbf{M}_{a_{ij}}(0) + \sum_n \frac{f_{ni} D_{nj}}{\omega_n^2} = \mathbf{M}_{a_{ij}}(0) - \rho g \sum_n \frac{\left[ \iint_{S_C} \varphi_n N_i dS \right] \left[ \iint_{S_C} \varphi_n N_j dS \right]}{\omega_n^2 \iint_{S_F} \varphi_n^2 dS} \quad (37)$$

## 2.4 Résolution des équations couplées

On introduit, dans les équations modales, des termes d'amortissements linéaires et quadratiques. Elles prennent donc la forme :

$$\ddot{A}_{in} + B_{1in} \dot{A}_{in} + B_{2in} \dot{A}_{in} |\dot{A}_{in}| + \omega_{in}^2 A_{in} = \sum_{j=1}^6 D_{inj} \ddot{X}_{ij} \quad (38)$$

où  $i$  est le numéro de la cuve,  $n$  le numéro du mode et  $X_{ij}$  est la  $j$ -ième composante du mouvement du support, exprimé au point de référence de la cuve  $i$ .

La manière suivant laquelle les coefficients  $B_{1in}$  et  $B_{2in}$  peuvent être reliés au frottement à la paroi, lisse ou rugueuse, est décrite dans Molin *et al.* (2002).

Réciproquement, les efforts de réaction, exprimés sous la forme (34), sont introduits dans les équations du mouvement du support, en sommant sur toutes les cuves. Ces équations sont écrites avec, pour le support, des matrices de masse et inerties à cuves **vides**. Les efforts de diffraction, masses-inerties ajoutées et amortissements de radiation extérieurs sont, eux, calculés au tirant d'eau cuves remplies. Les raideurs hydrostatiques en roulis et tangage sont modifiées pour tenir compte des effets statiques de carènes liquides.

Un couple d'amortissement quadratique est introduit dans l'équation du mouvement du roulis, sous la forme :

$$C_{v4} = -\frac{1}{2} \rho C_d B^4 L |\dot{\alpha}| \dot{\alpha} \quad (39)$$

où  $C_d$  est un coefficient de traînée,  $B$  est la largeur,  $L$  la longueur et  $\dot{\alpha}$  la vitesse en roulis.

Dans la résolution, ce terme est transformé suivant la procédure dite de «linéarisation stochastique», qui assure une même dissipation d'énergie pour un processus gaussien. On écrit ainsi

$$C_{v4} \simeq -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \rho C_d B^4 L \sigma_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} \quad (40)$$

où  $\sigma_{\dot{\alpha}}$  est l'écart type de la vitesse en roulis.

La même linéarisation stochastique est appliquée au terme d'amortissement quadratique de l'équation modale (38).

Les équations décrivant la dynamique du support plus cuves sont donc au nombre de 6 pour le support plus  $N_i$  par cuve. Elles sont résolues en fréquentiel, pour un spectre de houle donné, suivant une procédure itérative où les écarts types de la vitesse en roulis  $\sigma_{\dot{\alpha}}$  et des vitesses modales  $\sigma_{\dot{A}_{in}}$  sont réactualisés à chaque itération. On obtient donc des fonctions de transfert dépendant de l'état de mer.

Cette méthode de couplage a été introduite dans le logiciel *DIODORE* de Principia. Il existait déjà un module, *DIOCUVE*, qui détermine les modes propres de ballottement dans une cuve 3D de géométrie

quelconque, ainsi que les masses-inerties ajoutées à pulsation infinie. Il a donc suffi d'un nombre de développements minime (calcul des coefficients  $f_{inj}$  et  $D_{inj}$ ). Un nouveau post-processeur mécanique a été réalisé, utilisant d'une part les résultats fournis par *DIOCUVE*, et d'autre part les caractéristiques hydrodynamiques calculées par le module de diffraction-radiation de *DIODORE*. Le temps d'exécution de ce nouveau post-processeur est très rapide, ce qui permet, à tirant d'eau du support et remplissages des cuves donnés, de balayer rapidement des paramètres comme l'incidence de houle, la hauteur significative et la période moyenne de l'état de mer. On peut ainsi identifier des combinaisons critiques qui feront l'objet, éventuellement, d'investigations plus poussées à l'aide d'outils non-linéaires.

Un deuxième modèle a été développé à l'ESIM, bidimensionnel, restreint à des cuves rectangulaires posées sur une barge de section également rectangulaire. Les coefficients hydrodynamiques relatifs aux cuves s'obtiennent alors de manière complètement analytique. Ce modèle a surtout servi comme outil de définition et de première analyse des essais, et comme base de validation des extensions entreprises dans *DIODORE*.

### 3 Campagnes expérimentales

Elles ont été réalisées dans le bassin de génie océanique BGO-First, à la Seyne sur mer, dans le cadre des recherches menées par le GIS-HYDRO (groupeement d'intérêt scientifique réunissant l'ESIM, l'ISTV/UTV et l'IRPHE). Un modèle de barge existant, mis à disposition par Bouygues-Offshore (devenu depuis Saipem SA), a été utilisé. Il s'agit d'une barge rectangulaire, longue de 3 m, large de 1 m. Un tirant d'eau constant de 10.8 cm a été conservé lors des essais, correspondant à un déplacement de 285 litres (l'avant et l'arrière de la barge étant chanfreinés).

Dans la première campagne, deux aquariums identiques ont été placés côte à côte sur le pont, dans le sens transverse. Leur longueur intérieure est de 80 cm et leur largeur de 25 cm. Six configurations d'essais ont été réalisées, correspondant à différents niveaux de remplissage et différents états de surface intérieure. Elles sont répertoriées dans le tableau 1. Dans les cas «rugueux», la rugosité était réalisée par un «brise-vue» d'une épaisseur de 2 mm, avec des mailles carrées de 1 cm de côté, collé aux 4 parois verticales et sur le fond.

Numéro	Cuve 1	Cuve 2	Masse add.
1	5 cm, lisse	10 cm, lisse	86 kg
2	19 cm, lisse	19 cm, lisse	40 kg
3	29 cm, lisse	29 cm, lisse	0 kg
4	19 cm, lisse	39 cm, lisse	0 kg
5	19 cm, lisse	19 cm, rugueuse	40 kg
6	29 cm, lisse	29 cm, rugueuse	0 kg

Tableau 1: Configurations d'essais (campagne 1).

La masse de la barge avec les aquariums vides était de 169 kg, le centre de gravité étant à 24 cm au-dessus de la quille et le rayon d'inertie en roulis étant de 41.4 cm. Le tirant d'eau nominal de 10.8 cm était atteint avec une hauteur d'eau cumulée (cuve 1 + cuve 2) de 58 cm. Dans les configurations 1, 2 et 5 des masses additionnelles étaient placées sur le pont pour conserver le déplacement.

L'instrumentation consistait en la mesure des 6 composantes du mouvement de la barge, par un système optique, et celle des niveaux d'eau dans les cuves par 5 sondes embarquées, de type capacitif: 3 sondes dans la cuve 2, à la paroi (côté batteur), au quart de la longueur et au centre; 2 sondes dans la cuve 1, à la paroi et au quart de la longueur (plus exactement, les distances des sondes à la paroi sont de 25, 180 et 350 mm).

Les essais ont été effectués par houles de travers, régulières et irrégulières, de type JONSWAP avec un paramètre d'élanement  $\gamma$  égal à 2. Les combinaisons de hauteurs significatives et périodes de pic sont données dans le tableau 2. A une échelle de l'ordre du soixantième, les états de mer réalisés correspondent à des condition de type «Brésil».

$T_P$ (s)	1.2	1.2	1.2	1.6	1.6	1.6	2.0	2.0	2.0
$H_S$ (cm)	1.1	3.9	5.7	3.4	6.6	9.5	4.9	9.5	14.

Tableau 2: Cas de houles irrégulières (valeurs tirées des essais de calibration).

Une deuxième campagne a été réalisée, où les deux cuves ont été rassemblées en une seule, longue de 80 cm et large de 50 cm, placée en long sur le pont de la même barge. Les essais ont été effectués pour un seul niveau de remplissage, de 19 cm, avec des parois lisses. Les neuf cas de houles irrégulières du tableau 2 ont été reproduits, pour trois incidences: 0, 31.5 et 55 degrés.

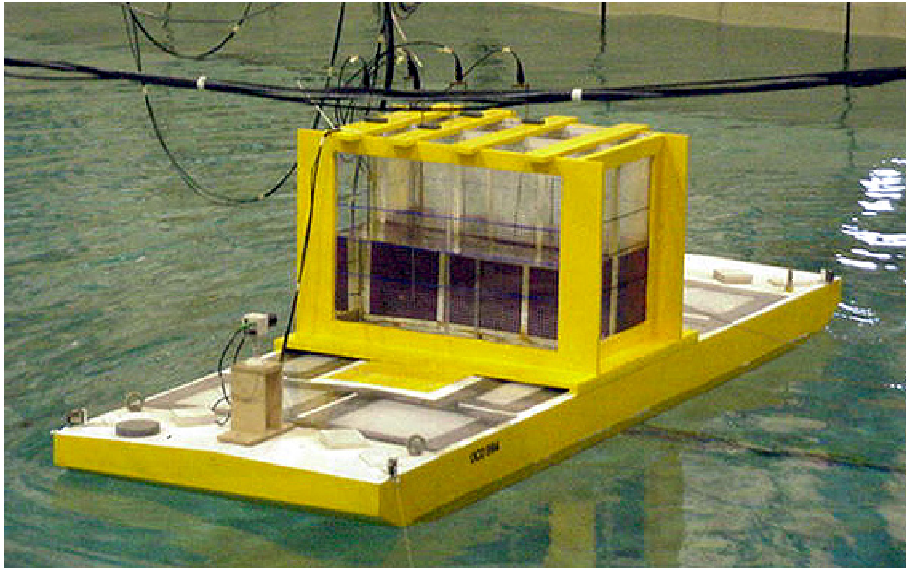


FIG. 1 – *Le premier modèle expérimental.*

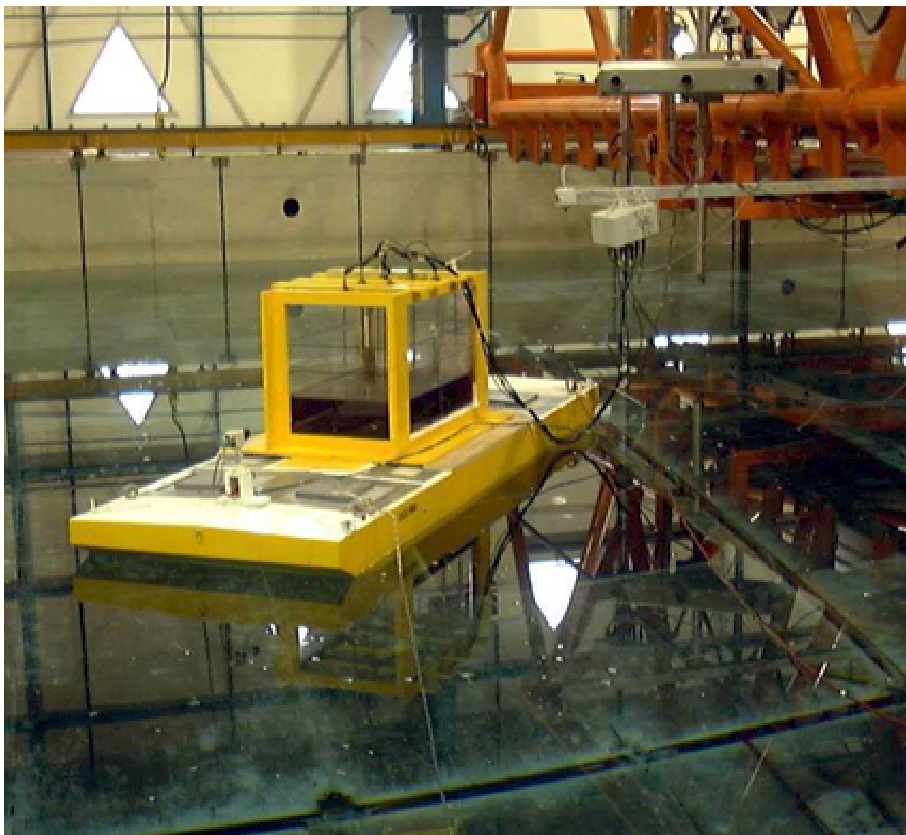


FIG. 2 – *Le second modèle expérimental.*



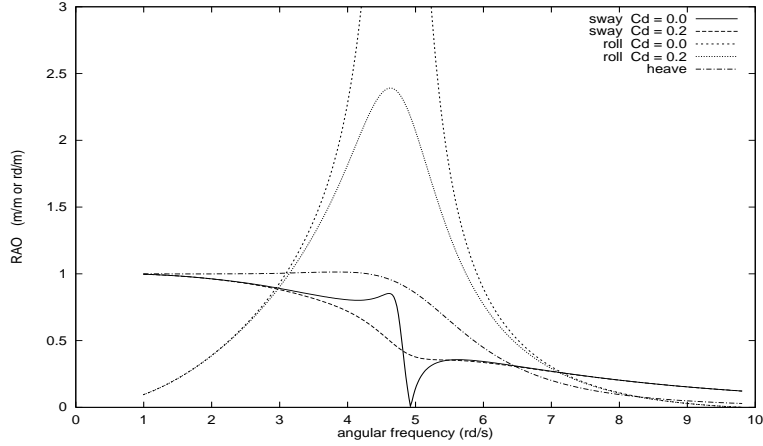


FIG. 3 – Configuration 2. Chargement solide. Fonctions de transfert en embardée, roulis et pilonnement.

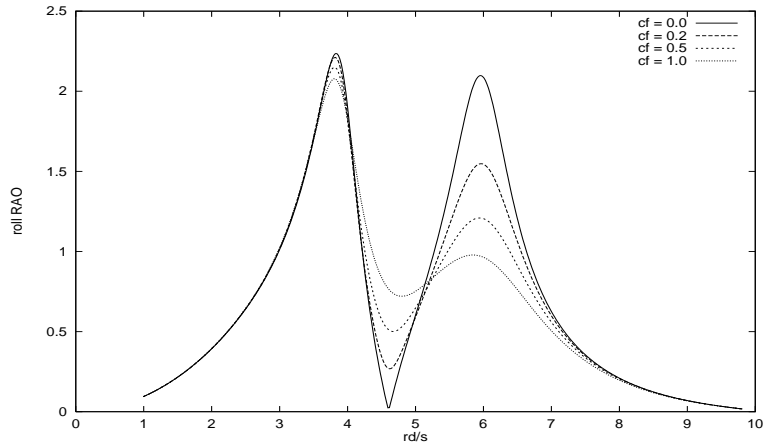


FIG. 4 – Effet du coefficient de frottement à la paroi sur la fonction de transfert en roulis.

## 4 Comparaisons calculs-essais

### 4.1 Calculs préliminaires

Avant de passer à la comparaison entre les valeurs calculées et mesurées, on présente quelques résultats fournis par le modèle numérique simplifié. Le module de diffraction-radiation de Geyer étant bi-dimensionnel, on applique une théorie des tranches, en multipliant les grandeurs hydrodynamiques par une longueur équivalente de 2.64 m. On considère la configuration 2 (les deux cuves lisses à 19 cm) et l'état de mer de  $H_S = 9.5$  cm et  $T_P = 1.6$  s.

La figure 3 présente les fonctions de transfert des mouvements de roulis, embardée et pilonnement lorsque les effets de carènes liquides sont ignorés, plus exactement lorsqu'on les remplace par un chargement solide. Les mouvements de roulis et embardée sont calculés deux fois, d'abord sans amortissement quadratique additionnel dans l'équation du mouvement de roulis, puis avec un coefficient  $C_d$  (cf la relation (39)) égal à 0.2. Le choix de cette valeur résulte de l'analyse d'essais antérieurs sur la même maquette; elle est cohérente avec les enseignements tirés du projet CLAROM sur le roulis des barges à la résonance.

On liquéfie maintenant le chargement des cuves. On garde le coefficient  $C_d$  de l'amortissement quadratique en roulis égal à 0.2, et on fait varier le coefficient de frottement à la paroi, donc le coefficient  $B_{2in}$  de l'équation (38), le coefficient  $B_{1in}$  étant pris égal à zéro.

On constate sur la figure 4 que la fonction de transfert en roulis présente maintenant deux pics, de part et d'autre d'un minimum à une pulsation de l'ordre de 4.7 rd/s. Cette pulsation est très voisine de la pulsation du premier mode propre de ballonnement (4.95 rd/s). Sur cette figure on constate que l'augmentation de la dissipation d'énergie dans la cuve a peu d'effet sur le premier pic, et tend à gommer le minimum et le second pic. *A contrario* on peut avancer que la valeur du minimum de la fonction de

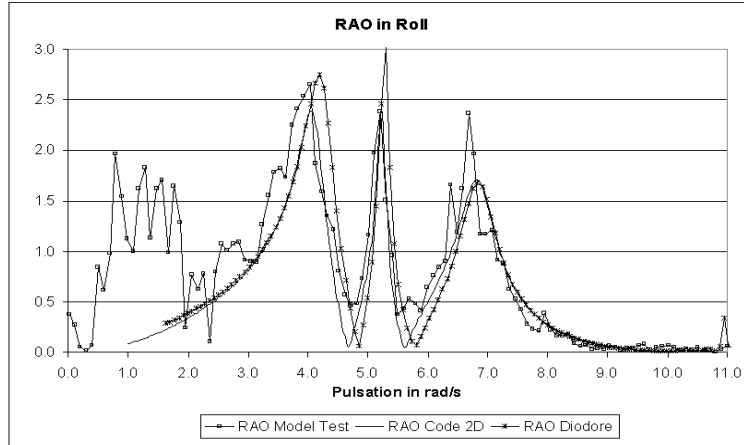


FIG. 5 – 19 cm + 39 cm. Fonction de transfert du roulis (rd/m).

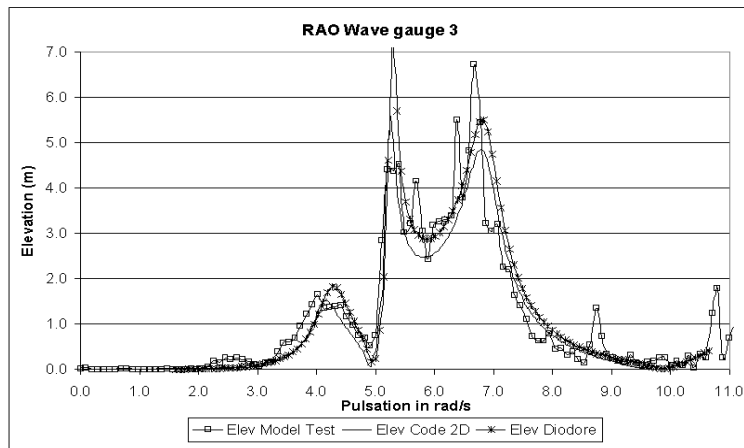


FIG. 6 – 19 cm + 39 cm. Fonction de transfert de l'élévation relative à la paroi de la cuve 2 (39 cm).

transfert en roulis, obtenu expérimentalement, est représentative de la dissipation d'énergie qui prend place dans la cuve.

## 4.2 Première campagne d'essais

De nombreux résultats issus de la comparaison calculs-essais ont déjà été présentés (Molin *et al.*, 2002). On reproduit ici d'abord une figure relative à la configuration 4, donc avec deux niveaux de remplissage différents : 19 cm dans la cuve 1, et 39 cm dans la cuve 2. Soit des pulsations propres du premier mode de ballotement de 4.95 rd/s et 5.92 rd/s. On se place dans l'état de mer le plus intermédiaire ( $H_S = 6.6$  cm,  $T_P = 1.6$  s).

La figure 5 présente la fonction de transfert du roulis, tirée des essais et obtenue numériquement avec *DIODORE* et avec le modèle simplifié. On note un bon accord entre les trois séries de valeurs (sauf aux pulsations inférieures à 2 rd/s, où l'on a surtout du bruit), avec deux minima à des pulsations, à nouveau, légèrement inférieures à 4.95 et 5.92 rd/s. Dans le calcul, on n'a introduit aucun amortissement dans les cuves, on trouve que les deux minima sont nuls. Expérimentalement ils ne sont pas nuls, ce qui suggère qu'un peu de dissipation prend place dans les cuves. Mais il pourrait aussi s'agir de la manifestation d'effets non linéaires.

La figure 6 présente la fonction de transfert de l'élévation relative à la paroi dans la cuve la plus remplie. On constate que l'accord entre les essais et les deux modèles numériques est excellent.

Puis on présente des résultats relatifs à la configuration 5 où la cuve 1 est à parois lisses et la cuve 2 à parois rugueuses. Pour les calculs, on a pris un coefficient de frottement à la paroi rugueuse de 0.5, et aucun amortissement dans la cuve 1. La figure 7 montre les densités spectrales, expérimentales et théoriques, de l'élévation relative à la paroi dans les deux cuves. Pour la cuve rugueuse (gauche), les densités calculées

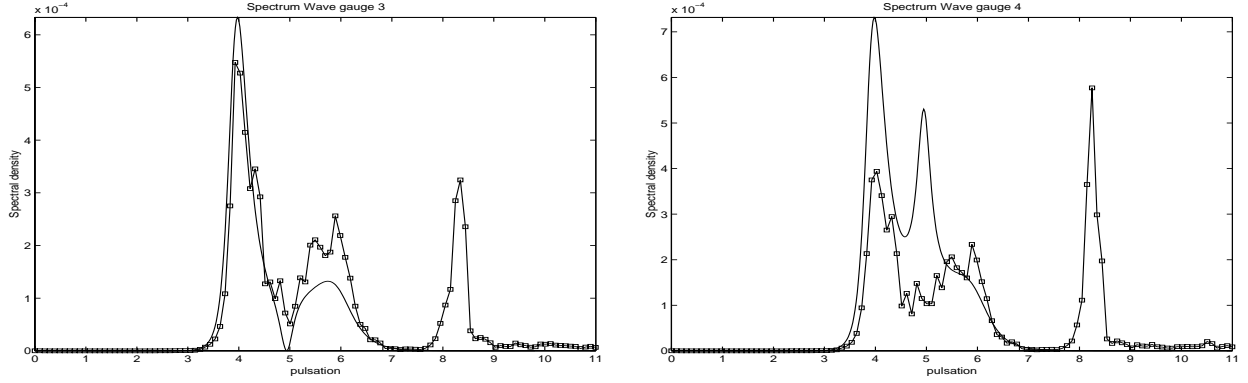


FIG. 7 – Configuration 5. Densité spectrale de l’élévation à la paroi dans la cuve rugueuse (gauche) et dans la cuve lisse (droite). Valeurs expérimentales ( $\square$ ) et numériques.

sont en deçà des densités mesurées, on a apparemment sur-estimé la dissipation d’énergie dans le modèle numérique. Pour la cuve lisse, c’est le contraire, on aurait dû introduire un peu d’amortissement. Sur cette figure on note aussi des maxima expérimentaux, d’énergie non négligeable, à la pulsation du premier mode pair de la cuve (8.34 rd/s). Ces pics ne sont pas prévus par notre modèle linéaire. Pour les faire apparaître il faut pousser le modèle théorique au moins à l’ordre deux, ce que l’on ébauche dans la section 5.

### 4.3 Seconde campagne d’essais

Faute de place, on ne présente de résultats que pour un seul cas d’essais, soit l’état de mer  $H_S = 6.6$  cm,  $T_P = 1.6$  s, pour l’incidence de 30 degrés. Les fonctions de transfert numériques et expérimentales des mouvements de cavalement, embardée, roulis et tangage (en dg/m) sont présentées sur la figure 8, en fonction de la période en s, à l’échelle du réel en supposant un facteur d’échelle de 1:60. On note un pic impressionnant de la fonction de transfert en cavalement à la période de 9 s, voisine de celle du premier mode de ballonnement (9.8 s). Ce pic est bien rendu par le modèle numérique. L’accord calcul-essais est globalement bon.

## 5 Extension au deuxième ordre du modèle théorique

Dans le cadre de l’approche linéaire suivie ici, seuls les modes impairs sont susceptibles d’apparaître. Une théorie non-linéaire est nécessaire pour rendre compte de l’apparition des modes pairs. (Par mode «pair» on entend ici tel que tous les coefficients  $D_{nj}$  et  $f_{nj}$  soient nuls, donc qu’il n’y ait pas de couplage avec les mouvements de la cuve). Sur la figure 7, on constate que le premier mode pair (à 8.3 rd/s) représente une contribution significative à l’élévation de surface libre dans les cuves. Dans cette configuration de faible remplissage (19 cm d’eau), les effets non linéaires entrent rapidement en jeu. Il paraît donc intéressant de pouvoir quantifier les phénomènes de deuxième ordre: si les amplitudes de ballonnement associées restent faibles devant celles de premier ordre, on peut avoir quelque confiance dans l’approche linéaire.

Un autre aspect intéressant de l’apparition des modes pairs est que, n’étant pas couplés au mouvement du support, ils ne peuvent s’amortir que par dissipation interne aux cuves (ou par des mécanismes non linéaires d’ordre supérieur). Leur étude devrait donc permettre d’affiner la connaissance, relativement sommaire, des mécanismes de dissipation interne.

On propose ici une extension «au deuxième ordre d’approximation» de la théorie exposée dans la section 2.

On écrit le potentiel de l’écoulement dans la cuve considérée sous la forme:

$$\Phi = \epsilon \Phi^{(1)} + \epsilon^2 \Phi^{(2)} + \dots \quad (41)$$

où  $\epsilon$  est un petit paramètre.

Le potentiel de deuxième ordre  $\Phi^{(2)}$  vérifie la condition de surface libre:

$$\Phi_{tt}^{(2)} + g \Phi_z^{(2)} = \frac{1}{g} \Phi_t^{(1)} \left[ \Phi_{ttz}^{(1)} + g \Phi_{zz}^{(1)} \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \Phi^{(1)} \right)^2 \Big|_{z=0} \quad (42)$$

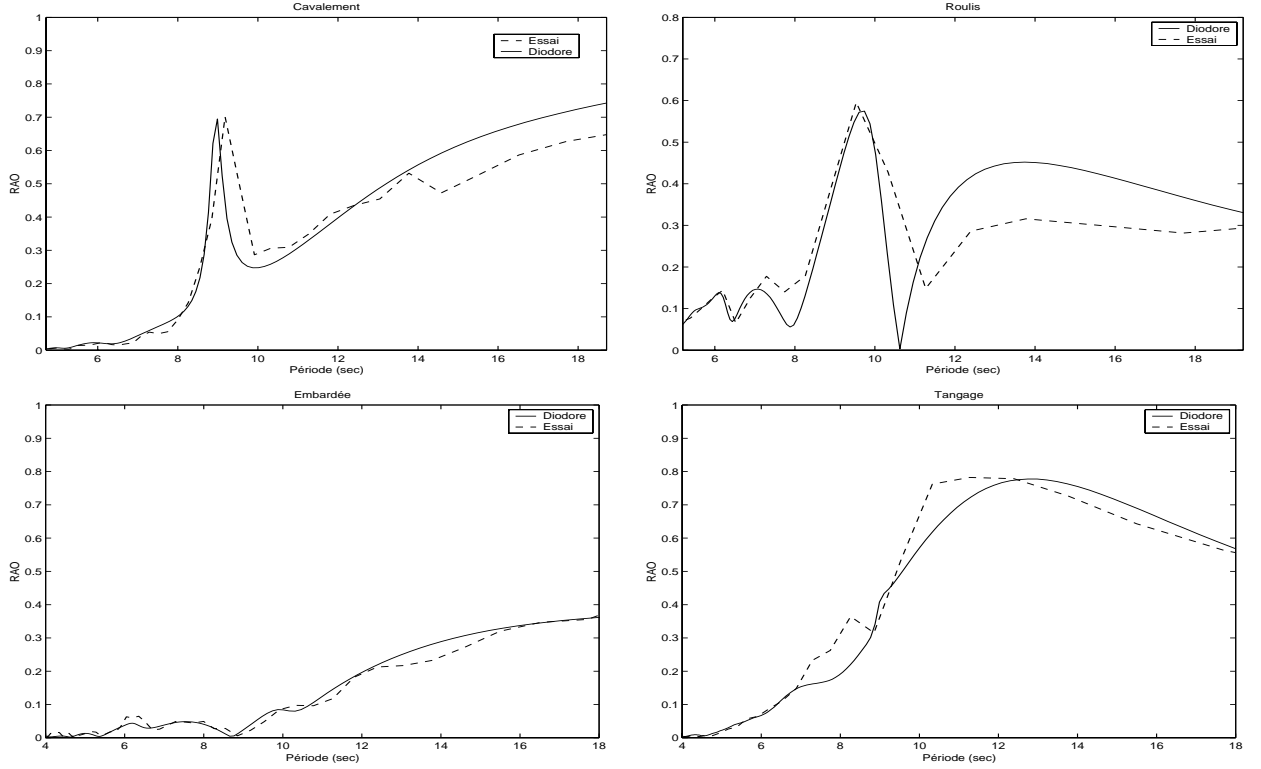


FIG. 8 – Seconde campagne. Incidence 30 degrés.  $H_S = 4$  m,  $T_P = 12.4$  s (échelle du soixantième). Fonctions de transfert numériques et expérimentales en fonction de la période (s).

La composante de deuxième ordre de l'élévation étant :

$$\eta^{(2)}(x,y,t) = \frac{1}{g^2} \Phi_t^{(1)} \Phi_{zt}^{(1)} - \frac{1}{2g} \left( \nabla \Phi^{(1)} \right)^2 - \frac{1}{g} \Phi_t^{(2)} \Big|_{z=0} \quad (43)$$

On a ici supposé que le mouvement de la surface libre est bien supérieur à celui de la cuve. En l'absence de cette hypothèse de nombreux autres termes, dus à l'entraînement de la cuve, se rajoutent aux deuxièmes membres des relations (42) et (43).

On fait ensuite l'hypothèse simplificatrice qu'un seul mode est sollicité à l'ordre un, soit le mode  $n$ . En pratique ce sera généralement le mode 1. L'élévation de surface libre associée s'écrit alors :

$$\eta^{(1)}(x,y,t) = A_n^{(1)}(t) \zeta_n(x,y)$$

Le cas de base à résoudre est celui d'une dépendance en temps bichromatique :

$$A_n^{(1)}(t) = a_1 \cos \Omega_1 t + a_2 \cos \Omega_2 t \quad (44)$$

ou, pour le potentiel  $\Phi^{(1)}$  :

$$\Phi^{(1)}(x,y,z,t) = - \left( a_1 \frac{\omega_n}{\Omega_1} \sin \Omega_1 t + a_2 \frac{\omega_n}{\Omega_2} \sin \Omega_2 t \right) \varphi_n(x,y,z) \quad (45)$$

En insérant cette expression dans (42) et en ne conservant que les termes de pulsation  $\Omega_1 + \Omega_2$  on obtient :

$$\Phi_{tt}^{(2)} + g \Phi_z^{(2)} = -\frac{1}{2} a_1 a_2 \frac{\omega_n^2 (\Omega_1 + \Omega_2)}{\Omega_1 \Omega_2} \left[ 2 (\nabla \varphi_n)^2 + \frac{\Omega_1 \Omega_2}{g} \varphi_n \varphi_{nz} - \varphi_n \varphi_{nzz} \right] \sin(\Omega_1 + \Omega_2)t \quad (46)$$

Une solution peut alors être recherchée sous la forme :

$$\Phi^{(2)}(x,y,z,t) = a_1 a_2 \sin(\Omega_1 + \Omega_2)t \sum_i B_i^{(2)} \varphi_i(x,y,z) \quad (47)$$

En reportant dans l'équation précédente et en tirant parti de l'orthogonalité des  $\varphi_i$  sur la surface libre, on obtient

$$\begin{aligned} & [-(\Omega_1 + \Omega_2)^2 + \omega_i^2] B_i^{(2)} \iint_{S_F} \varphi_i^2 dS = \\ & -\frac{1}{2} \frac{\omega_n^2 (\Omega_1 + \Omega_2)}{\Omega_1 \Omega_2} \iint_{S_F} \left[ 2 (\nabla \varphi_n)^2 + \frac{\Omega_1 \Omega_2}{g} \varphi_n \varphi_{nz} - \varphi_n \varphi_{nzz} \right] \varphi_i dS \end{aligned} \quad (48)$$

L'intégrale sur la surface libre qui apparaît au deuxième membre peut s'exprimer à partir des trois intégrales élémentaires :

$$\alpha_{in} = \left[ \iint_{S_F} (\nabla_0 \varphi_n)^2 \varphi_i dS \right] \left[ \iint_{S_F} \varphi_i^2 dS \right]^{-1} \quad (49)$$

$$\beta_{in} = \left[ \iint_{S_F} \varphi_n^2 \varphi_i dS \right] \left[ \iint_{S_F} \varphi_i^2 dS \right]^{-1} \quad (50)$$

$$\delta_{in} = \left[ \iint_{S_F} (\nabla_0 \varphi_n \cdot \nabla_0 \varphi_i) \varphi_n dS \right] \left[ \iint_{S_F} \varphi_i^2 dS \right]^{-1} \quad (51)$$

où  $\nabla_0$  désigne le gradient horizontal ( $\partial/\partial x, \partial/\partial y$ ) et où on a supposé que les parois de la cuve sont verticales à la surface libre.

La contribution  $\eta_2^{(2)}$  de  $\Phi^{(2)}$  à l'élévation de surface libre étant mise sous la forme :

$$\eta_2^{(2)}(x, y, t) = -a_1 a_2 \cos(\Omega_1 + \Omega_2)t \sum_i \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{\omega_i} B_i^{(2)} \zeta_i(x, y) = \sum_i A_{i2}^{(2)}(t) \zeta_i(x, y) \quad (52)$$

on déduit de (48), (49), (50) et (51) que les  $A_{i2}^{(2)}$  sont solutions de :

$$\ddot{A}_{i2}^{(2)} + \omega_i^2 A_{i2}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\omega_n^2 \omega_i}{\Omega_1 \Omega_2} \left[ \alpha_{in} + \frac{\omega_n^2}{g^2} (2\omega_n^2 + \Omega_1 \Omega_2) \beta_{in} - \delta_{in} \right] a_1 a_2 \cos(\Omega_1 + \Omega_2)t \quad (53)$$

Dans cette équation on peut à nouveau introduire des termes d'amortissement, en écrivant le premier membre sous la forme :

$$\ddot{A}_{i2}^{(2)} + B_{1i} \dot{A}_{i2}^{(2)} + B_{2i} |A_{i2}^{(2)}| \dot{A}_{i2}^{(2)} + \omega_i^2 A_{i2}^{(2)}$$

On en déduit la QTF complexe (Fonction de Transfert Quadratique) des coefficients  $A_{i2}$  :

$$QTF_{A_{i2}^{(2)}}(\Omega_1, \Omega_2) = \frac{1}{4} \frac{\omega_n^2 \omega_i}{g^2 \Omega_1 \Omega_2} \frac{[g^2 \alpha_{in} + \omega_n^2 (2\omega_n^2 + \Omega_1 \Omega_2) \beta_{in} - g^2 \delta_{in}]}{\omega_i^2 - (\Omega_1 + \Omega_2)^2 - i(\Omega_1 + \Omega_2) (B_{1i} + \sqrt{8/\pi} \sigma_{\dot{A}_{i2}^{(2)}} B_{2i})} \quad (54)$$

où on a introduit un facteur 1/2 suivant la convention habituelle.

La densité spectrale  $S_{A_n^{(1)}}(\Omega)$  de  $A_n^{(1)}$  étant connue, celle de  $A_{i2}^{(2)}$  s'obtient par :

$$S_{A_{i2}^{(2)}}(\omega) = 8 \int_0^{\omega/2} S_{A_n^{(1)}}(\Omega) S_{A_n^{(1)}}(\omega - \Omega) \|QTF_{A_{i2}^{(2)}}(\Omega, \omega - \Omega)\|^2 d\Omega \quad (55)$$

On peut alors itérer sur la valeur de  $\sigma_{\dot{A}_{i2}^{(2)}}$  et obtenir une valeur convergée de la QTF.

Il ne reste alors plus qu'à rajouter la contribution des termes quadratiques du second membre de (43). On obtient après calculs :

$$QTF_{A_{i1}^{(2)}}(\Omega_1, \Omega_2) = \frac{\omega_n}{4\Omega_1 \Omega_2} \alpha_{in} + \frac{\omega_n^3}{2g^2} \left( 1 + \frac{\omega_n^2}{2\Omega_1 \Omega_2} \right) \beta_{in} \quad (56)$$

On peut alors appliquer (55) à nouveau en sommant les deux QTF, et obtenir la densité spectrale de l'amplitude du mode  $i$ .

En application on considère les essais effectués en configurations 2 et 5 (19 cm dans chaque cuve), aux périodes de pic de 1.6 s. La densité spectrale de l'élévation mesurée à la sonde 1 (à peu près au centre de la cuve, donc à un nœud des modes impairs) apparaît comme un pic unique à 8.3 rd/s. Les écarts types tirés des mesures sont présentés sur la figure 9. En configuration rugueuse, l'écart type croît à peu près linéairement avec la hauteur significative, en condition lisse la loi de variation est plus complexe. Sur la figure on présente les valeurs calculées en configuration rugueuse, toujours avec un coefficient de frottement à la paroi de 0.5 (cf les commentaires sur la figure 7). En configuration lisse, en ne prenant comme amortissement que le frottement laminaire à la paroi, on obtient des valeurs beaucoup trop fortes, et une loi de variation vis à vis du  $H_S$  qui n'est pas conforme aux mesures.

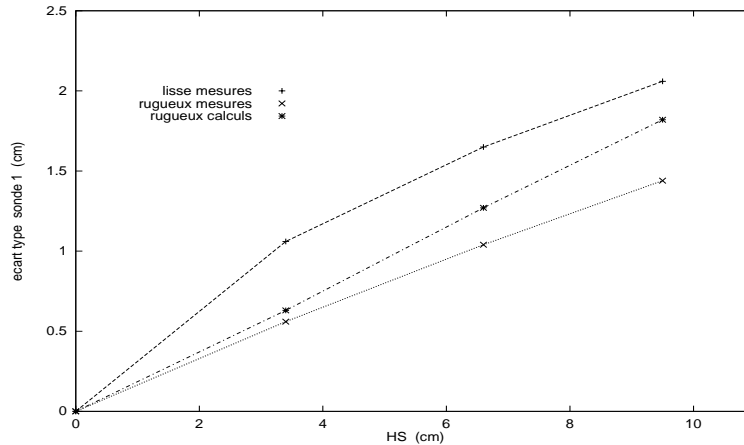


FIG. 9 – 19 cm + 19 cm. *Ecart type à la sonde 1 en parois lisses et rugueuses.*

## 6 Conclusion

On n'a présenté ici qu'un échantillon très limité des comparaisons entre calculs et essais. Tous les essais réalisés ont en fait été traités, ceux de la première campagne dans le cadre d'un projet industriel, ceux de la seconde dans le cadre d'un stage de fin d'études. Il en a été conclu que le domaine de validité du modèle numérique est plus étendu que ce qui avait été escompté. Pour tous les états de mer simulés et tous les taux de remplissage, les fonctions de transfert des mouvements du support sont obtenues avec une précision satisfaisante, même dans la configuration 1 où les taux de remplissage sont très faibles. En ce qui concerne les élévations de surface libre dans les cuves, les calculs sont en bon accord avec les mesures sauf dans cette configuration où les effets non-linéaires deviennent très marqués. Pour remédier à ce problème, on envisage des développements basés sur des modèles de houle en eau peu profonde, par exemple les équations de Boussinesq.

## 7 Remerciements

Les essais au BGO-First ont été réalisés dans le cadre du GIS-HYDRO, grâce au soutien financier du Conseil Général du Var. L'exploitation de la première campagne d'essais et les développements dans *DIO-DORE* ont été réalisés dans le cadre d'un projet industriel soutenu par Bouygues Offshore et Gaztransport & Technigaz.

## 8 Références

- DODGE F.T. 1966 Analytical representation of lateral sloshing by equivalent mechanical systems, dans *The dynamic behavior of liquids in moving containers*, NASA SP 106, ch. 6, H.N. Abramson éditeur.
- FALTINSEN O.M., ROGNEBAKKE O.F., LUKOVSKY I.A. & TIMOKHA A.N. 2000 Multidimensional modal analysis of nonlinear sloshing in a rectangular tank with finite water depth, *J. Fluid Mech.*, **407**, 201-234.
- GEYER PH. 1989 Barge rectangulaire en houle régulière, rapport de stage IFP.
- GUÉVEL P., BOUGIS J., SORASIO E., SCERRI F. & CARIOU A. 1989 Contribution à l'étude des effets de carènes liquides, *Actes des Deuxièmes Journées de l'Hydrodynamique*, 159-174.
- MOLIN B., REMY F., RIGAUD S. & DE JOUËTTE CH. 2002 LNG-FPSO's: frequency domain, coupled analysis of support and liquid cargo motions, *Proc. IMAM 2002 Conf.*, Rethymnon.