

9^{èmes} JOURNÉES DE L'HYDRODYNAMIQUE

10 - 11 - 12 MARS 2003

POITIERS - FUTUROSCOPE

**MODELE NUMERIQUE TRIDIMENSIONNEL
POUR LES ONDES DE SURFACE
SUR UN FOND QUELCONQUE**

***THREE-DIMENSIONAL NUMERICAL MODEL
FOR SURFACE WAVES OVER ARBITRARY BOTTOM***

C. FOCESATO *, F. DIAS *, S. GRILLI **

* Centre de Mathématiques et de Leurs Applications, Ecole Normale Supérieure de Cachan,
61, avenue du Président Wilson, 94235 Cachan cedex, France

** Department of Ocean Engineering, University of Rhode Island, Narragansett, RI 02882, USA

Résumé

Dans la présente étude, nous proposons un modèle numérique tridimensionnel d'ondes de surface. Il résout les équations d'Euler avec surface libre dans une formulation potentielle non linéaire, grâce à une méthode d'éléments aux frontières d'ordre élevé. L'intégration en temps s'effectue par un schéma mixte Eulérien-Lagrangien permettant de déterminer la nouvelle géométrie de la surface libre. Le modèle est applicable à des transformations d'ondes non linéaires jusqu'au déferlement (tant que le jet ou rouleau ne touche pas l'eau) pour une topographie du fond quelconque. En fait, il constitue un canal à houle numérique, dans lequel des ondes arbitraires peuvent être générées. Si nécessaire, des conditions aux limites absorbantes peuvent être également spécifiées sur les frontières latérales.

Summary

This study presents a three-dimensional numerical model for surface waves. It solves Euler equations with free surface in the nonlinear potential formulation, via a high-order boundary element method. The time integration is performed using a mixed Eulerian-Lagrangian scheme, which allows the determination of the new geometry of the free surface. The model is applicable to nonlinear transformations of waves, up to the overturning phase of wave breaking (until the jet reaches water) over an arbitrary bottom. In fact, it is a numerical wave tank, in which arbitrary waves can be generated. If needed, absorbing boundary conditions can also be specified along lateral boundaries.

I-INTRODUCTION

Pour une simulation précise des ondes de surface jusqu'au déferlement, l'une des approches les plus couramment utilisées repose sur la formulation potentielle non linéaire, qui ne tient pas compte des effets visqueux et rotationnels de l'écoulement. On obtient alors l'équation de Laplace pour le potentiel des vitesses, dont la résolution peut se ramener à une équation intégrale sur la frontière du domaine. L'évolution temporelle est gouvernée par les conditions cinématique et dynamique sur la surface libre. On les exprime sous leur forme primitive en adoptant une formulation mixte Eulérienne-Lagrangienne, qui consiste à suivre les particules de fluide. Le problème est donc posé de telle sorte qu'on peut seulement étudier la phase initiale décrivant la formation du jet. L'étape finale du déferlement (éclaboussement, etc.), qui implique énormément la turbulence et la viscosité, nécessite une formulation prenant en compte les deux fluides et le suivi de leur interface. Le modèle présenté dans ce document permet de simuler la phase non turbulente à l'aide d'une méthode d'éléments aux frontières. Celui-ci, outre son utilisation directe pour l'évolution d'ondes non linéaires non déferlantes, peut être couplé avec un modèle de type Volume Of Fluid, très coûteux et moins précis mais capable de capter le mélange des deux fluides, en vue de la modélisation complète du déferlement (Biausser et al 2002).

Un certain nombre de modèles numériques pour la résolution des écoulements potentiels non linéaires peuvent, principalement en deux dimensions, simuler le renversement d'une vague en eau profonde ou intermédiaire (Longuet-Higgins et Cokelet 1976, Dommermuth et al. 1988, Skyner 1996) ainsi que la propagation en eau peu profonde et le déferlement sur des fonds en pente (Grilli et al. 1997). Dans la plupart des modèles 2D, des vagues incidentes peuvent être générées à une extrémité et réfléchies, absorbées ou rayonnées à l'autre extrémité (Grilli et Horrillo 1997). En trois dimensions, il y a eu peu de tentatives pour résoudre les équations dans cette formulation, pour des vagues non linéaires arbitraires dans un modèle de propagation général avec la possibilité de modéliser le déferlement. Xue et al. (2001) ont calculé des vagues déferlantes tridimensionnelles dans un domaine doublement périodique en profondeur infinie (c'est-à-dire que seule la surface libre était discrétisée). Dans leur cas, des ondes de Stokes étaient transformées jusqu'au déferlement en spécifiant une pression de surface asymétrique. D'éventuelles instabilités en dents de scie se développaient près des crêtes et étaient éliminées par lissage. Broeze (1993) a développé un modèle numérique similaire mais pour des domaines non périodiques et en profondeur finie. Il était capable de produire seulement les premières étapes du renversement. Des instabilités numériques ont été aussi rencontrées qui ont limité les calculs.

Dans ce document, nous présentons un modèle d'ondes de surface 3D non linéaires, résolvant les équations dans la formulation potentielle non linéaire avec une méthode d'éléments aux frontières d'ordre élevé et un schéma en temps mixte Eulérien-Lagrangien. Pour une description plus détaillée, le lecteur est renvoyé à l'article Grilli et al. (2001). Les méthodes utilisées pour les discrétisations spatiale et temporelle sont des extensions 3D directes de celles développées dans Grilli et Subramanya (1996). Les diverses conditions aux limites implémentées et la possibilité de définir une topographie du fond quelconque en font un véritable canal à houle numérique dans lequel des ondes arbitraires peuvent être générées par un batteur ou être spécifiées directement sur la surface libre. La suite de ce document comprend trois sections principales. Tout d'abord, la formulation mathématique est présentée, ensuite suit une description de la méthode numérique employée, la dernière partie étant consacrée à une application, le déferlement d'une onde solitaire se propageant sur un fond non uniforme.

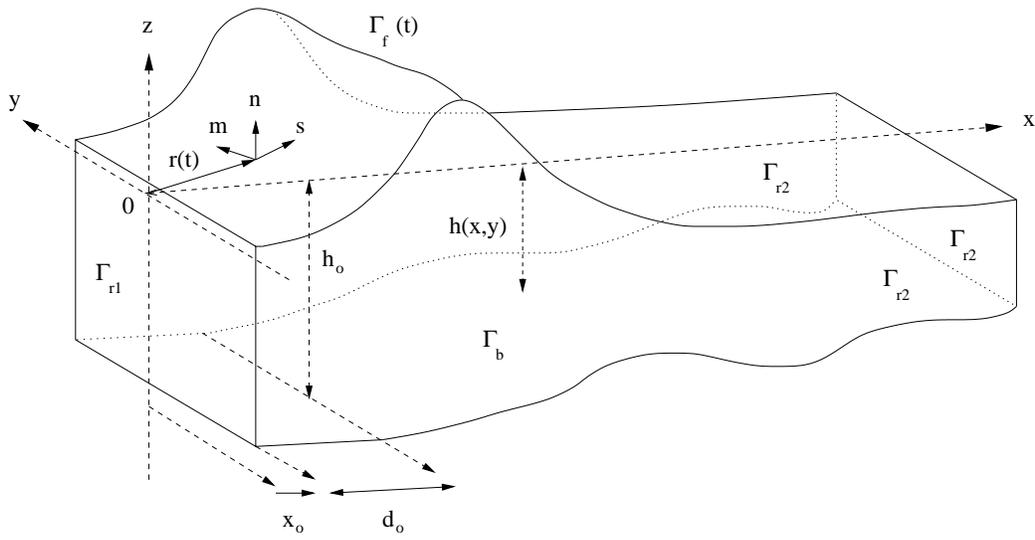


FIG. 1 – Schéma du domaine de calcul

II-FORMULATION MATHÉMATIQUE

Les équations pour une formulation potentielle avec surface libre sont résumées ainsi. La vitesse du fluide s'exprime comme

$$\mathbf{u} = \nabla \phi$$

avec ϕ le potentiel des vitesses. L'équation de continuité dans le domaine est simplement l'équation de Laplace pour le potentiel :

$$\Delta \phi = 0.$$

La fonction de Green associée pour tout l'espace est

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) = \frac{1}{4\pi r},$$

$$\frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3},$$

avec $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_l|$ et \mathbf{n} le vecteur normal extérieur à la surface au point \mathbf{x} . La seconde identité de Green transforme cette équation en une équation intégrale sur la frontière Γ

$$\alpha(\mathbf{x}_l) \phi(\mathbf{x}_l) = \int_{\Gamma(t)} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) - \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) \right\} d\Gamma$$

où $\alpha(\mathbf{x}_l)$ est proportionnel à l'angle solide extérieur formé par la frontière au point de collocation \mathbf{x}_l , et \mathbf{r} est la différence entre les deux vecteurs position de la frontière \mathbf{x} et \mathbf{x}_l .

Sur la surface libre, ϕ satisfait les conditions aux limites cinématique et dynamique. Elles sont non linéaires :

$$\frac{D \mathbf{R}}{D t} = \mathbf{u} = \nabla \phi,$$

$$\frac{D \phi}{D t} = -gz + \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi,$$

avec \mathbf{R} le vecteur position de la particule de fluide à la surface, g l'accélération due à la gravité et la dérivée totale définie par

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla.$$

Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour la génération d'onde dans le modèle. Dans le cas d'ondes issues du mouvement d'un batteur sur la frontière ouverte du domaine, $\Gamma_{r1}(t)$, les mouvement et vitesse $[\mathbf{x}_p, \mathbf{u}_p]$ sont spécifiés sur le batteur par

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_p \text{ et } \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} = \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{n}$$

où la barre désigne des valeurs spécifiées. Sur les parties fixes de la frontière, une condition de flux nul est imposée :

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} = 0.$$

La solution à l'intérieur du domaine peut être facilement évaluée à partir des valeurs aux frontières. Par exemple, les vitesse et accélération internes sont données par

$$\nabla \phi(\mathbf{x}_l) = \int_{\Gamma(t)} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{x}) Q(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) - \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial Q}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) \right\} d\Gamma$$

$$\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{x}_l) = \int_{\Gamma(t)} \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial n}(\mathbf{x}) Q(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) - \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{x}) \frac{\partial Q}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) \right\} d\Gamma$$

respectivement, où

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) = \frac{1}{4\pi r^3} \mathbf{r},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) = \frac{1}{4\pi r^3} \{ \mathbf{n} - 3(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}) \mathbf{e}_r \},$$

avec $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}/r$.

III-METHODE NUMERIQUE

Schéma temporel

L'intégration temporelle s'effectue au niveau des conditions aux limites de la surface libre. Des développements en série de Taylor explicites du second ordre sont utilisés pour exprimer la position et le potentiel sur la surface libre en $t + \Delta t$:

$$\mathbf{R}(t + \Delta t) = \mathbf{R}(t) + \Delta t \frac{D \mathbf{R}}{Dt}(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{D^2 \mathbf{R}}{Dt^2}(t) + \mathcal{O}[(\Delta t)^3],$$

$$\phi(\mathbf{R}(t + \Delta t)) = \phi(t) + \Delta t \frac{D \phi}{Dt}(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{D^2 \phi}{Dt^2}(t) + \mathcal{O}[(\Delta t)^3].$$

Les coefficients de ces séries de Taylor sont exprimés en fonction du potentiel et de ses dérivées spatiales et temporelles, en tenant compte des conditions à la surface. Plus précisément, à chaque nouveau pas de temps, les coefficients d'ordre zéro sont donnés par le pas de temps

précèdent ou par la condition initiale. Les coefficients du premier ordre correspondent aux conditions cinématique et dynamique et nécessitent de résoudre l'équation intégrale au temps t pour le potentiel. Enfin, les coefficients du second ordre sont obtenus en appliquant la dérivée matérielle aux conditions cinématique et dynamique, ce qui implique la résolution d'une équation intégrale similaire à celle écrite ci-dessus permettant de déterminer $(\frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial n})$. La solution ϕ de la première équation sert de condition sur la surface libre pour la seconde à travers la formule suivante établie en développant la dérivée totale dans la condition dynamique

$$\overline{\frac{\partial \phi}{\partial n}} = -gz - \frac{1}{2} \nabla \phi \cdot \nabla \phi.$$

Sur le fond et les parois fixes, on impose

$$\overline{\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial n}} = 0.$$

Il est important de noter que les deux équations intégrales dépendent de la même géométrie et, par conséquent, conduisent à la même forme discrétisée. Cette caractéristique rend la méthode d'intégration temporelle très performante en comparaison avec d'autres schémas d'ordre élevé tels que Runge-Kutta ou Adams-Bashforth-Moulton. Ceux-ci exigent souvent de multiples évaluations de l'équation intégrale pour le potentiel à des temps intermédiaires pour chaque pas de temps. Le présent schéma doit certes résoudre deux équations intégrales différentes mais avec la même géométrie. Il présente en outre l'avantage d'être explicite, et l'utilisation des dérivées spatiales le long de la surface libre lui assure une meilleure stabilité.

Afin de prendre en compte le fait que lorsqu'un jet se forme, les particules de fluide tendent à converger dans les zones à forts gradients, une technique a été développée pour ajuster le pas de temps en conséquence. Ainsi, le pas de temps Δt est adapté à chaque mise à jour de la géométrie comme une fonction de la distance minimum entre deux nœuds sur la surface libre et un nombre de Courant établi sur des cas tests ainsi qu'à l'aide des résultats bidimensionnels.

Discrétisation spatiale

Les équations intégrales sont résolues par une méthode d'éléments aux frontières. Elle consiste à discrétiser la frontière en des nœuds de collocation et à utiliser M_Γ éléments d'ordre élevé pour interpoler selon m de ces nœuds. A l'intérieur de chaque élément, les variables de position et de champs sont discrétisées par des fonctions de forme polynomiales $N_j(\xi, \eta)$, définissant ainsi un changement de variable local qui ramène chaque élément de la frontière à un élément de référence cartésien $\Gamma_{\xi, \eta}$:

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^m N_j(\xi, \eta) \mathbf{x}_j,$$

$$\phi(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^m N_j(\xi, \eta) \phi(\mathbf{x}_j) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial n}(\xi, \eta) = \sum_{j=1}^m N_j(\xi, \eta) \frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{x}_j),$$

où $j = 1, \dots, m$ correspond à la notation locale d'un nœud dans un élément (le couple $(\frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial n})$ est traité de la même manière).

Des éléments isoparamétriques peuvent donner une bonne approximation à l'intérieur de chaque élément mais n'offrent qu'une continuité C_0 à l'interface. Basé sur l'expérience en

modélisation du déferlement acquise en deux dimensions, il est nécessaire d'utiliser une interpolation au moins C_2 continue pour obtenir des résultats stables et précis. Cette condition est réalisée avec les éléments de type MII (Middle-Interval-Interpolation) introduits par Grilli et Subramanya (1996). Les éléments aux frontières sont alors des quadrilatères avec des fonctions de forme cubiques définies par les quatre nœuds de l'élément ainsi que tous ceux qui les entourent, soit $m = 16$ nœuds.

Les fonctions de forme 2D s'expriment comme le produit de deux fonctions de forme 1D cubiques sur l'élément de référence, à savoir

$$N_j(\xi, \eta) = N'_b(\mu(\xi, \xi_o)) N'_d(\mu(\eta, \eta_o))$$

où $N'_{b,d}$ sont les fonctions de forme 1D cubiques, $j = 4(d - 1) + b$, b ou $d = 1, \dots, 4$ et $\mu \in [-1; 1]$.

Les intégrales sur la frontière sont converties en une somme sur les éléments, chacune étant calculée sur l'élément de référence $\Gamma_{\xi, \eta}$. Le changement en variables curvilignes $\mathbf{x} \rightarrow (\xi, \eta)$ amène une matrice jacobienne \mathbf{J}^k pour le $k^{\text{ième}}$ élément Γ^k . La forme discrétisée de ces intégrales s'écrit donc

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial n} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l) d\Gamma = \sum_{k=1}^{M_{\Gamma}} \left\{ \int_{\Gamma_{\xi, \eta}} \sum_{j=1}^m \frac{\partial \phi(\mathbf{x}_j)}{\partial n} N_j(\xi, \eta) G(\mathbf{x}(\xi, \eta), \mathbf{x}_l) \times |\mathbf{J}^k(\xi, \eta)| d\xi d\eta \right\}$$

$$\int_{\Gamma} \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_l)}{\partial n} d\Gamma = \sum_{k=1}^{M_{\Gamma}} \left\{ \int_{\Gamma_{\xi, \eta}} \sum_{j=1}^m \phi(\mathbf{x}_j) N_j(\xi, \eta) \frac{\partial G(\mathbf{x}(\xi, \eta), \mathbf{x}_l)}{\partial n} \times |\mathbf{J}^k(\xi, \eta)| d\xi d\eta \right\}$$

L'équation intégrale discrétisée qui en découle peut s'écrire sous la forme d'une somme sur les N_{Γ} nœuds de la frontière

$$\alpha(\mathbf{x}_l) \phi(\mathbf{x}_l) = \sum_{j=1}^{N_{\Gamma}} \{ K_{lj}^d \frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{x}_j) - K_{lj}^n \phi(\mathbf{x}_j) \}$$

où $l = 1, \dots, N_{\Gamma}$ et K_{lj}^d, K_{lj}^n représentent les matrices globales respectivement de Dirichlet et de Neumann. Selon le type de frontière sur laquelle se trouve le nœud courant, le potentiel, ou sa dérivée normale, est soit spécifié par la condition au bord, soit une inconnue du problème.

Méthode du mode rigide

Les coefficients α_l peuvent être déterminés par un calcul direct, purement géométrique, des angles solides aux différents nœuds. Cependant, il existe une approche indirecte, connue sous le nom de «mode rigide», qui consiste à substituer ces coefficients par l'opposé de la somme des coefficients de la matrice de Neumann situés sur la même ligne

$$\alpha_l = - \sum_{j=1}^{N_{\Gamma}} K_{lj}^n.$$

Il s'avère que cette méthode améliore sensiblement le conditionnement des systèmes algébriques et par la même occasion la précision numérique. D'un point de vue physique, pour les écoulements potentiels, cela revient à imposer que le problème discrétisé satisfasse exactement la condition de flux total nul.

Conditions discrétisées aux intersections

Les conditions aux limites et les directions normales sont en général différentes dans les régions d'intersection de la frontière. Afin de tenir compte de cela dans le modèle, les nœuds des bords sont représentés par des doubles nœuds pour lesquels on a des coordonnées identiques mais des normales distinctes. Il faut donc écrire deux équations intégrales discrétisées pour chaque double nœud. Cependant, pour garantir la continuité du potentiel, il faut que celui-ci soit unique en un point donné. L'une des deux équations doit donc en fait être remplacée dans le système discrétisé final par une relation de continuité qui dépend du type des deux frontières concernées. La même chose est effectuée pour assurer la continuité de $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ pour la seconde équation intégrale. Enfin, dans le cas d'intersection entre trois surfaces, un triple nœud est défini et deux relations de continuité interviennent.

Résolution du système linéaire

Le système algébrique linéaire obtenu est dense et non-symétrique. Un algorithme en $O(N_\Gamma^3)$ s'avère très coûteux en temps de calcul. C'est pourquoi, l'algorithme GMRES (Generalized Minimal RESidual) avec préconditionnement est utilisé pour résoudre le système linéaire de façon itérative. L'effort est alors diminué d'au moins un ordre de grandeur avec un temps CPU proportionnel à $O(N_\Gamma^2)$. Néanmoins, cela reste encore insuffisant et impose une limite à l'exploitation du modèle. Afin de pallier à cette difficulté, l'algorithme des multipôles rapides (Fast Multipole Algorithm), développé par Greengard et Rokhlin (1988) pour l'évaluation rapide de champs potentiels dans un système de particules, est sur le point d'être implémenté en combinaison avec l'algorithme GMRES. En fait, chaque produit matrice/vecteur provenant de la discrétisation d'une équation intégrale est remplacé par l'algorithme FMA, évitant au passage l'assemblage de la matrice. Cet algorithme, basé sur des développements en variables séparées de la fonction de Green et une subdivision hiérarchique de l'espace, réduit la complexité des calculs à presque $O(N_\Gamma)$. Il s'est progressivement répandu dans la communauté résolvant des équations intégrales, notamment en électromagnétisme, ou en élasticité, moins en mécanique des fluides. Son implémentation constitue donc une étape importante dans le développement du modèle, lequel devrait alors pouvoir donner la pleine mesure de ses potentialités.

Calcul numérique des intégrales

Les intégrales sont calculées en chaque nœud de collocation par intégration numérique. Si le nœud de collocation n'appartient pas à l'élément intégré, une méthode de quadrature Gauss-Legendre standard est utilisée. Dans le cas contraire, la distance r dans la fonction de Green ou son gradient normal s'annule en un des quatre nœuds sur l'élément. Les intégrales à calculer pour la matrice de Dirichlet sont faiblement singulières (intégrables avec une norme L^2). Une méthode d'extraction des singularités permet d'éliminer cette difficulté. Elle consiste à se placer dans un système de coordonnées locales centré autour du nœud singulier, puis à passer en coordonnées polaires avant d'appliquer une quadrature de Gauss-Legendre. Les intégrales de Neumann, en revanche, ne sont pas singulières grâce à l'utilisation du mode rigide qui fait que la forte singularité n'intervient plus dans la limite $r \rightarrow 0$.

Cependant, les intégrales non-singulières peuvent exhiber de très grandes valeurs quand r devient petit, sans être nul, au voisinage d'un point de collocation. De telles situations peuvent se produire près des intersections entre les différentes parties de la frontière ou dans d'autres régions de la surface libre telles que les jets déferlants où les nœuds sont très proches les uns des autres. Il est alors possible qu'une quadrature standard avec un nombre fixé de points d'intégration ne réussisse pas à évaluer précisément les intégrales. On parle d'intégrales quasi-singulières. Pour y remédier, Grilli et Svendsen (1990) ont développé un schéma d'intégration adaptative basé sur une subdivision binaire de l'élément de référence. Leurs résultats montrent qu'il suffit d'augmenter le nombre de subdivisions pour obtenir une précision arbitraire. Une méthode similaire est appliquée dans notre cas.

Dérivées tangentielles

Les dérivées premières et secondes, par rapport aux directions tangentielles, de la géométrie et du champ sont requises pour exprimer les coefficients de Taylor dans le schéma d'évolution temporelle des nœuds sur la surface libre. De façon similaire aux éléments aux frontières, une interpolation locale est définie grâce à des fonctions de forme. C'est une interpolation bi-quartique construite sur un maillage local de 5×5 nœuds, s'écrivant comme le produit de deux fonctions de forme 1D du 4^{ième} ordre.

Le changement de variables définit un système local de coordonnées curvilignes en chacun des nœuds. Les diverses quantités nécessaires dans la formule de Taylor sont donc exprimées dans ce nouveau repère, lesquelles font alors apparaître les dérivées tangentielles. Ainsi, elles peuvent être calculées à l'aide de l'interpolation décrite ci-dessus. Cette partie a été revue depuis l'article original présentant la méthode (Grilli et al 2001). En effet, ce nouveau système de coordonnées était implicitement supposé orthogonal. Pourtant, il ne l'est pas : les quadrilatères formant les éléments, lorsqu'ils se déforment au cours du mouvement, ne gardent pas leurs angles droits. Bien sûr, la plupart des nœuds définissent un repère quasi-orthogonal. C'est ce qui explique que les résultats trouvés sont acceptables. Il se pourrait même que cette hypothèse d'orthogonalité soit une approximation qui fournisse des résultats plus stables. Ce sont les premières conclusions qui semblent ressortir après avoir développé de nouvelles formules. Mais, une étude plus poussée est en cours et il est trop tôt pour en dire plus pour le moment.

Remaillage sur la surface libre

Dans l'étude des ondes déferlantes, il est utile de pouvoir raffiner la discrétisation dans les zones de formation des jets, avant qu'ils ne se produisent. Pour cela, la méthode de Grilli et Subramanya (1996) a été adaptée au cas tridimensionnel. Il s'agit d'une redistribution d'un nombre fixe de nœuds en pas constant dans certaines régions données de la surface libre, laquelle ne doit pas être à valeurs multiples au moment de l'opération. Concrètement, la nouvelle discrétisation est introduite avec des mailles constantes, puis pour chaque nouveau nœud, on détermine dans quel élément il se situe, enfin les fonctions de forme associées à cet élément sont utilisées pour calculer les nouvelles valeurs de l'élévation de surface et des champs.

Evaluation de la précision

A tous les pas de temps, la conservation du volume et de l'énergie doit être satisfaite dans le domaine de calcul. La mesure de ces grandeurs apporte donc une quantification de la précision

numérique en fonction des paramètres de discrétisation spatiale et temporelle. L'erreur relative sur la conservation du volume est donnée par

$$\epsilon_V(t) = \left| \frac{V(t) - V_0}{V_0} \right|.$$

S'il n'y a pas d'énergie fournie, l'énergie totale reste constante et on peut définir l'erreur relative comme pour le volume

$$\epsilon_E(t) = \left| \frac{E(t) - E_0}{E_0} \right|.$$

IV-APPLICATION

Le modèle présenté s'est avéré généraliser avec succès la méthode développée en deux dimensions par le passé. En effet, les premières applications, qui étaient des cas de validation bidimensionnels, ont permis de comparer les données obtenues. Pour cela, une onde solitaire 2D calculée par l'algorithme de Tanaka (1986) est spécifiée sur la surface libre avec un fond plat droit (simple propagation), puis en pente (déferlement 2D). Ces résultats sont détaillés dans l'article de Grilli et al (2001).

Afin de mettre en évidence l'applicabilité de la méthode en trois dimensions, la même onde incidente est placée sur un fond non uniforme. Plus précisément, la topographie du fond se présente sous la forme d'une première partie plate correspondant d'une certaine manière à la fin de la propagation de l'onde solitaire, laquelle arrive sur une deuxième partie en pente ayant une bosse dans le sens transversal (figure 2). La pente choisie de valeur 1:15 au milieu correspond en deux dimensions à un déferlement plongeant. La variation transverse en $sech^2$ permet de focaliser l'énergie et par conséquent va conduire à la formation d'un jet. Le domaine représente un bassin avec des parois solides puisque des conditions de flux nul sont imposées. Toutes les longueurs dans le modèle sont dimensionnées par rapport à la profondeur du bassin au large. Ainsi, le domaine va de zéro à dix-neuf dans le sens de la longueur et possède une largeur valant huit fois la profondeur. La physique du phénomène nécessite d'avoir un bassin aussi large que possible. Cependant, des contraintes sur le nombre de nœuds liées au temps de calcul obligent à limiter cette largeur pour qu'il y ait suffisamment de nœuds dans le jet. Enfin, l'onde solitaire est située globalement sur la partie plane et possède une forte amplitude ($H_0 = 0.6$). Elle est présentée au temps initial à la figure 3 (l'angle de vue est différent de celui du fond pour une meilleure visibilité du jet par la suite).

Avant de décrire le déferlement obtenu dans ces conditions, il est important d'insister sur la difficulté à résoudre le problème numériquement. En effet, comme cela a été expliqué précédemment, la discrétisation du problème mène à un système linéaire dense et non symétrique, dont la résolution a été ramenée à une complexité de $O(N_T^2)$ grâce à l'utilisation d'un algorithme itératif. Cette complexité, qui est aussi celle de l'assemblage de la matrice par le calcul des intégrales, demeurent cependant une charge considérable si l'on veut augmenter le nombre de nœuds sur la frontière. Ce fait a eu principalement deux conséquences dans l'évolution de ce canal à houle numérique. Tout d'abord, le code de calcul est resté en développement avec l'étude entreprise pour implémenter la méthode des multipôles rapides, qui doit à termes réduire la complexité du problème numérique. L'autre conséquence est bien sûr le frein que cela constitue pour considérer diverses applications. Notons malgré tout les travaux de Guyenne et al (2000) sur la modélisation de l'impact d'une vague sur un mur vertical, ceux de Brandini et al (2001) sur la génération d'une vague scélérate par focalisation directionnelle qui ont conduit à l'implémentation de conditions aux limites périodiques, et ceux de Grilli et al (2002) pour la

génération d'un tsunami causé par un glissement de terrain sous-marin. Nous présentons ici le déferlement d'un jet plongeant qui est l'application première qui a motivée le développement de la méthode.

Les figures 3 à 7 présentent donc l'évolution d'une onde solitaire incidente sur un fond pentu ayant une modulation transverse. La visualisation graphique de ces résultats 3D est réalisée sous Matlab. Elle permet d'adapter l'angle de vue comme indiqué plus haut, mais aussi d'effectuer un zoom sur la vague déferlante au cours de son mouvement. C'est d'ailleurs ce qui explique l'aspect tronqué à gauche des figures. En observant les deux premiers dessins, on peut se rendre compte que la discrétisation a été affinée au cours du calcul dans le sens de la largeur en passant de vingt éléments à quarante. La raison en est simple : au départ, le problème est quasiment bidimensionnel et ne nécessite donc pas beaucoup de nœuds dans la largeur. La méthode de remaillage est donc utilisée pour éviter de faire tout le calcul avec tous les nœuds dès le début (6022 nœuds dans cet exemple). D'un point de vue physique, une succession de caractéristiques du jet plongeant sont visibles sur ces figures. Le point de déferlement est montré (figure 5), point pour lequel la vague présente une tangente verticale à l'avant de la vague. Sur cette figure également, ainsi que sur la précédente, un creux s'est créé devant l'onde, contribuant à l'enroulement de la vague qui se prépare à plonger vers l'avant. Enfin, les figures 6 et 7 illustrent bien la dernière phase, durant laquelle l'énergie est focalisée au milieu du bassin pour créer un jet déferlant. A partir de tels résultats, des observations sur la cinématique du phénomène peuvent être effectuées. Un exemple, discuté dans Grilli et al (2001), consiste à estimer la vitesse latérale du déferlement, c'est-à-dire la vitesse avec laquelle le jet plongeant va se propager latéralement jusqu'aux bords du bassin. Notons, pour terminer, qu'en suivant les erreurs relatives sur la conservation du volume et de l'énergie, on constate qu'elles sont faibles et constantes, preuves de la précision et de la stabilité de la méthode.

V-CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Un modèle numérique 3D pour les ondes de surface sur un fond quelconque a été présenté. Afin de démontrer son applicabilité, le déferlement d'une onde (solitaire) incidente dans un canal à houle est simulé jusqu'à ce que la formulation potentielle cesse d'être correcte. La formation d'un jet plongeant est observée sans que d'éventuelles instabilités viennent altérer la précision des calculs. Les possibilités du code sont importantes tant par les conditions aux limites implémentées que par sa capacité à décrire des phénomènes aussi fortement non linéaires que le déferlement. Les perspectives résident d'une part dans l'amélioration du temps de calcul, qui reste la faiblesse de ce type de discrétisation. Des études pour implémenter la Méthode des Multipôles Rapides sont en cours. D'autre part, le développement d'une interface graphique doit permettre de mieux appréhender les applications envisageables, que ce soit dans la dynamique des vagues ou leur interaction avec des structures solides. Ce dernier point, notamment, devrait recevoir une attention particulière dans le futur proche. En effet, l'ajout d'une structure dans le modèle s'effectue naturellement en discrétisant les nouvelles frontières solides. Ainsi, des phénomènes non linéaires d'interaction fluide/structure pourront être analysés au moyen de ce bassin d'expériences numérique.

REFERENCES

- B. Biausser, C. Lachaume, R. Marcer, S.T. Grilli, P. Fraunié, 2002, “Numerical simulations of wave breaking by coupling of a VOF method and a boundary integral element method”, soumis pour publication à *Proc. 13th Intl Offshore and Polar Engng Conf., Hawaii, USA, May 2003*.
- C. Brandini, S.T. Grilli, 2001, “Modelling of freak wave generation in a three-dimensional NWT”, *Proc. 11th Intl Offshore and Polar Engng Conf., Stavanger, Norway*.
- J. Broeze, 1993, “Numerical modelling of nonlinear free surface waves with a three-dimensional panel method”, *PhD thesis, University of Twente, Enschede, The Netherlands*.
- D.G. Dommermuth, D.K.P. Yue, W.M. Lin, R.J. Rapp, E.S. Chan, W.K. Melville, 1998, “Deep-water plunging breakers : a comparison between potential theory and experiments”, *J. Fluid Mech.*, 189, 423-442.
- L. Greengard, V. Rokhlin, 1987, “A fast algorithm for particle simulations”, *J. Comput. Phys.*, 73, 325-348.
- S.T. Grilli, P. Guyenne, F. Dias, 2001, “A fully non-linear model for three-dimensional overturning waves over an arbitrary bottom”, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 35, 829-867.
- S.T. Grilli, J. Horrillo, 1997, “Numerical generation and absorption of fully nonlinear periodic waves”, *J. Engng Mech.* 123, 1060-1069.
- S.T. Grilli, R. Subramanya, 1996, “Numerical modelling of wave breaking induced by fixed or moving boundaries”, *Comput. Mech.*, 17, 374-391.
- S.T. Grilli, I.A. Svendsen, 1990, “Corner problems and global accuracy in the boundary element solution of nonlinear wave flows”, *Engng Anal. Boundary Elem.*, 7, 178-195.
- S.T. Grilli, I.A. Svendsen, R. Subramanya, 1997, “Breaking criterion and characteristics for solitary waves on slopes”, *J. Waterway, Port. Coastal, Ocean Engng*, 123, 102-112.
- S.T. Grilli, S. Vogelmann, P. Watts, 2002, “Development of a three-dimensional numerical wave tank for modelling tsunami generation by underwater landslides”, *Engng Anal. Boundary Elem.*, 26, 301-313.
- P. Guyenne, S.T. Grilli, F. Dias, 2000, “Numerical modelling of fully nonlinear three-dimensional overturning waves over an arbitrary bottom”, *Proc. 27th Intl Conf. on Coastal Engng, Sydney, Australia*.
- M.S. Longuet-Higgins, E.D. Cokelet, 1976, “The deformation of steep surface waves on water. I. A numerical method of computation”, *Proc. R. Soc. Lond.*, A 350, 1-26.
- D.J. Skyner, 1996, “A comparison of numerical predictions and experimental measurements of the internal kinematics of a deep-water plunging wave”, *J. Fluid Mech.*, 315, 51-64.
- M. Tanaka, 1986, “The stability of solitary waves”, *Phys. Fluids*, 29, 650-655.
- M. Xue, H. Xü, Y. Liu, D.K.P. Yue, 2001, “Computations of fully nonlinear three-dimensional wave-wave and wave-body interactions. Part 1. Dynamics of steep three-dimensional waves”, *J. Fluid Mech.*, 438, 11-39.

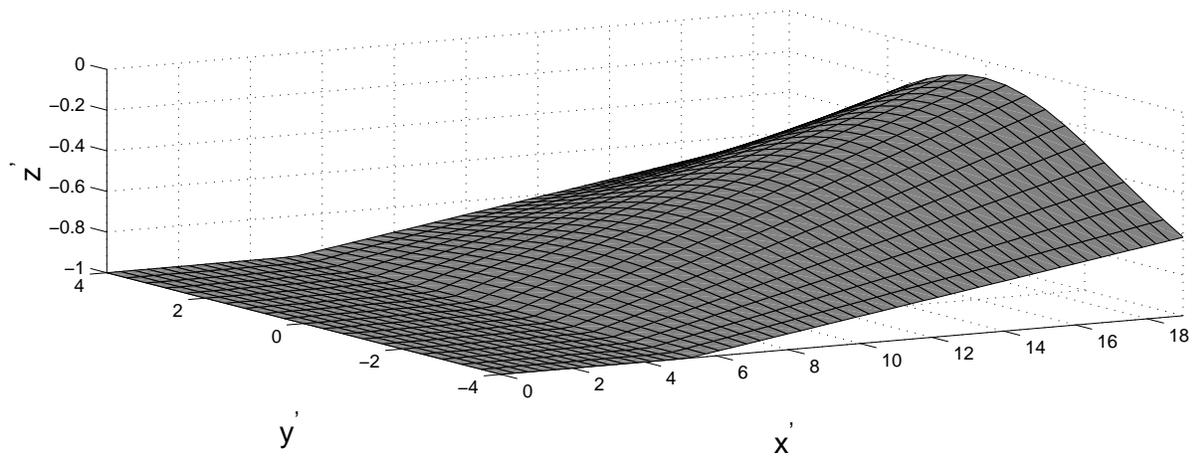


FIG. 2 – *Topographie du fond*

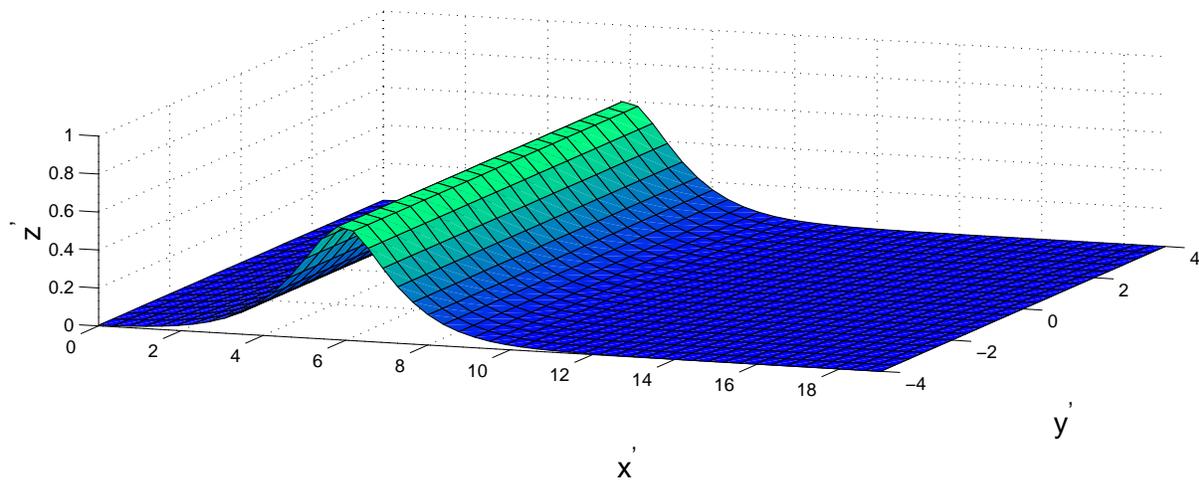


FIG. 3 – *Profil de surface à $t = 0$*

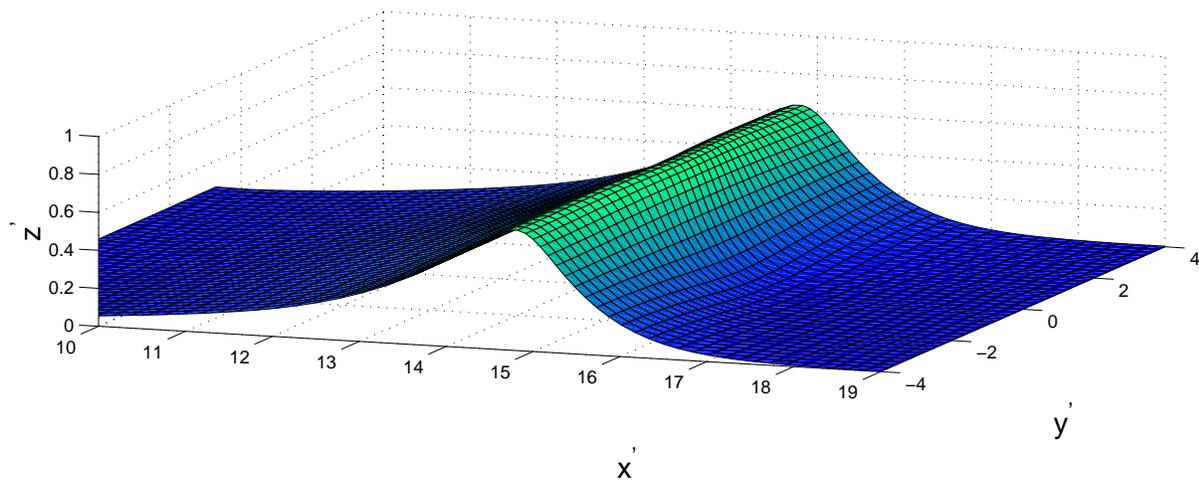


FIG. 4 – *Profil de surface à $t = 7.147$*

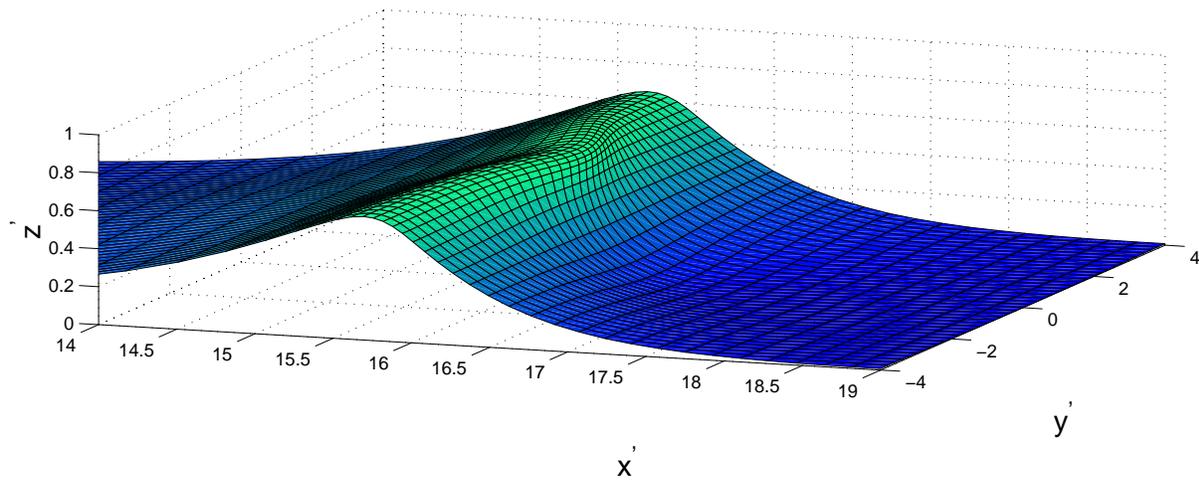


FIG. 5 – Point de déferlement à $t = 7.865$

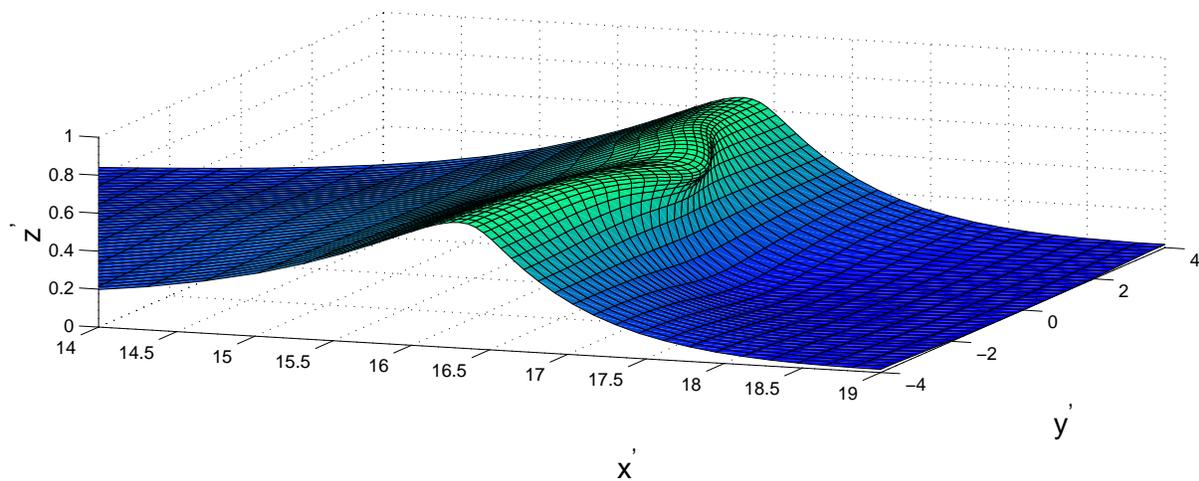


FIG. 6 – Profil de surface à $t = 8.332$

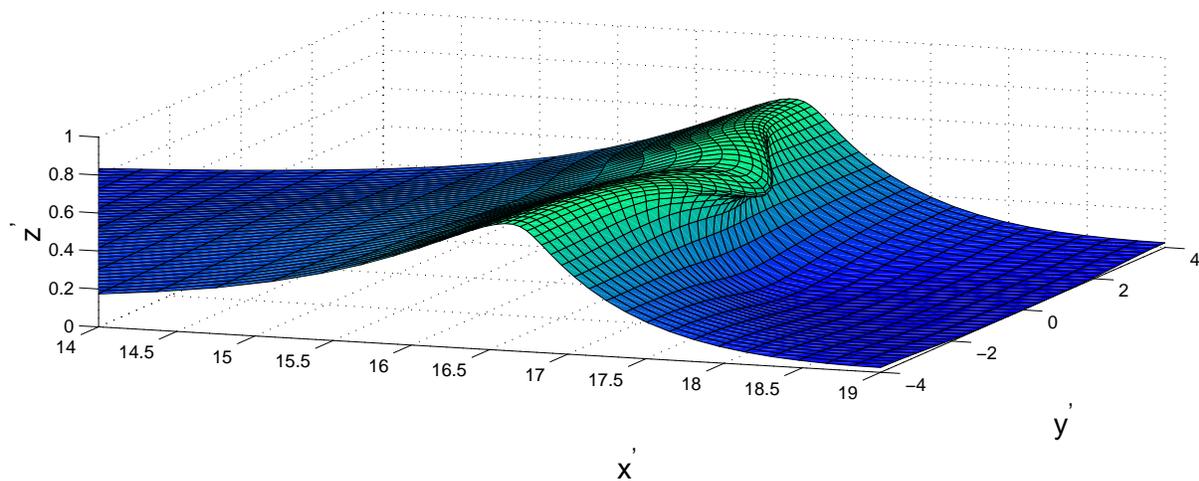


FIG. 7 – Profil de surface à $t = 8.577$