

9^{èmes} JOURNÉES DE L'HYDRODYNAMIQUE

10 - 11 - 12 MARS 2003

POITIERS - FUTUROSCOPE

APPROCHE SPECTRALE NON-LINÉAIRE pour la SIMULATION des ÉCOULEMENTS INSTATIONNAIRES à SURFACE LIBRE

NON-LINEAR SPECTRAL APPROACH for UNSTEADY FREE SURFACE FLOWS SIMULATIONS

David LE TOUZÉ, Félicien BONNEFOY & Pierre FERRANT

Laboratoire de Mécanique des Fluides/Division Hydrodynamique Navale
École Centrale de Nantes, BP 92101, F-44321 Nantes Cedex 3
e-mail: pierre.ferrant@ec-nantes.fr *site web*: <http://www.ec-nantes.fr/dhn>

RÉSUMÉ

Cet article présente l'application d'une méthode dite *spectrale* à la simulation temporelle d'écoulements à surface libre non-linéaire; méthode entrant dans la classe des écoulements potentiels. On se propose ici de dresser un bilan des possibilités et des limitations d'un tel modèle à travers son illustration sur différents types d'écoulements. Quelques détails quant aux formulations employées pour parvenir à étendre le noyau de base de la méthode sont exposés. Parmi d'autres, ces illustrations comprennent d'abord des cuves tri-dimensionnelles excitées à une fréquence proche de la résonance. Puis la génération de houle bi-dimensionnelle non-linéaire reproduisant un état de mer réel ou un paquet de vagues est abordée, et son utilisation comme champ incident pour un calcul de diffraction sur un corps tri-dimensionnel évoquée. On montre enfin l'application du modèle à la simulation du processus complet de la génération et la propagation de houle en bassin tri-dimensionnel au second-ordre.

MOTS-CLEFS : *Méthode spectrale, Écoulements potentiels, Surface libre, Domaine temporel, Simulation non-linéaires, Bassin de houle.*

ABSTRACT

This article presents the application of a so-called 'spectral method' to the simulation of free surface flows in the time domain; method belonging to potential flow theory. We intend here to draw up a assessment of the possibilities and limitations of such a model, through illustrations on different flow cases. A few details on the formulations used to extend the core of the method are exposed. Among others, these illustrations first include sloshing in three-dimensional tanks close to the resonance frequency. Then the two-dimensional fully-nonlinear generation of realistic sea states and focused wave packets is at interest, including its coupling to a three-dimensional diffraction code. Eventually, second-order simulations of the whole wave generation and propagation process in a three-dimensional tank are shown.

KEY WORDS : *Spectral method, Potential flows, Free surface, Time domain, Non-linear simulations, Wave tank.*

INTRODUCTION

Les techniques de modélisation spectrale présentent des caractéristiques de convergence, de précision et de rapidité de calcul particulièrement intéressantes. Contrairement à d'autres méthodes communément utilisées en hydrodynamique, telle la méthode des éléments de frontière par exemple, il s'agit d'une méthode *globale*, i.e. dans laquelle la solution est décrite continûment dans tout le domaine de calcul. De fait, cette solution est exprimée sous la forme d'une série de fonctions de base globales liées à la seule géométrie du domaine; ces fonctions forment de plus une base orthogonale, ce qui implique que la solution converge spectralement (exponentiellement) avec le nombre de termes conservés dans la série. L'avantage que présente cette décomposition en série trouve sa contrepartie dans la difficulté de formulation des fonctions de base de cette série. Ces fonctions ne peuvent en effet s'obtenir que dans le cas de géométries simples et fixes au cours du temps, ce qui limite a priori fortement le champ d'application de la méthode en excluant la prise en compte de conditions de bord non-homogènes. L'objet du présent travail a donc été de lever certaines de ces limitations tout en conservant au maximum les caractéristiques de convergence et de précision de ladite méthode qui demeurent des atouts importants pour des simulations rapides et fiables, aptes à répondre à des besoins industriels par exemple. Cela nous a notamment mené à décomposer le potentiel total en la somme d'un potentiel purement spectral et d'un potentiel additionnel calculé de manière à lever la restriction sur les conditions de bord.

Les premiers à avoir proposé et utilisé une telle méthode spectrale appliquée à un bassin bi-dimensionnel à surface libre ont été Dommermuth & Yue [1] en 1987. Ils utilisent une formulation proche de celle présentée comme étant le 'noyau' de notre méthode, mais en définissant en plus un potentiel de surface de Zakharov [2], et en réalisant le développement de Taylor de la solution autour de $z = 0$ –méthode dite 'Higher Order Spectral' (HOS) que nous n'avons pas (encore) implémentée (cf. le commentaire s'y rapportant, section A.4.). La différence principale avec le modèle présenté ci-après réside dans l'hypothèse supplémentaire, faite par ces auteurs, que la solution recherchée est périodique en espace. Cela, ajouté au fait que leur modèle ne peut prendre en compte la génération des vagues, les contraint à se donner, dans toutes leurs simulations, une houle de Stokes pour condition initiale. A cette solution initiale sont ensuite surimposées, par exemple, une pression de surface mouvante pour obtenir des ondes stationnaires, ou une fonction de forme multiplicative pour obtenir des paquets de vagues. Ils parviennent ainsi à conserver leur hypothèse de périodicité spatiale, mais avec la contrainte de domaines de calcul de grande taille; de plus cette condition initiale de Stokes restreint et complique tout de même assez nettement les simulations possibles. Une étude de précision et de convergence assez complète est menée (cf. section A.4.) ainsi que des comparaisons avec un modèle mixte d'Euler-Lagrange. Beaucoup plus récemment, Brandini & Grilli (cf. e.g. [3]) ont ré-utilisé cette même formulation (de Dommermuth & Yue) en trois dimensions pour obtenir des 'vagues scélérates', aussi à partir d'une houle de Stokes du cinquième ordre avec perturbation surimposée, et donc avec les mêmes restrictions.

Dans un papier succinct de 1999 Agnon & Bingham [4] ont, quant à eux, posé le principe de la séparation du potentiel en la superposition d'un potentiel de type spectral (HOS en l'occurrence) prenant en compte la surface libre dans un bassin fixe, et d'un potentiel *additionnel* autorisant la prise en compte d'une condition non-homogène sur l'un des murs latéraux tout en ne vérifiant aucune condition sur la surface libre (cf. section A.3. et partie B. pour une description plus détaillée du mécanisme). Ils ont illustré cette possibilité avec un potentiel additionnel analytique traduisant la présence d'un flux périodique à travers la surface $x = 0$ d'un bassin bi-dimensionnel (flux qui correspondrait à un batteur piston en linéaire). Dans le même esprit, Kim *et al* [5] ont utilisé comme potentiel additionnel une singularité de type puits immergé pour simuler la vidange non-linéaire d'une cuve bi-dimensionnelle, avec pour formulation spectrale la même que celle de notre 'noyau'. C'est ce même principe de 'potentiel additionnel' que nous avons

largement repris et étendu (cf. partie B.) pour lever partiellement la contrainte d'invariance de la géométrie du domaine simulé.

Dans une autre direction, Chern *et al* [6] ont développé une formulation spectrale volumique, beaucoup plus complexe, dont l'idée est de rapporter le domaine de calcul (du fond du bassin bi-dimensionnel à sa surface libre non-linéaire instationnaire) à un domaine fixe rectangulaire, par une 'transformation σ '. Ils se retrouvent alors avec une méthode proche de notre 'noyau' mais où les fonctions de base sont devenues des polynômes de Chebyshev au lieu de notre série de Fourier, ce qui ralentit la résolution. Ils ont récemment étendu cette méthode au cas d'un bassin cylindrique tri-dimensionnel dans lequel des lâchers de surface libre de type Cauchy-Poisson ont été étudiés (tels que ceux réalisés dans notre bassin parallélépipédique (cf. section A.1.)).

On mentionnera pour terminer deux revues plus générales de l'utilisation des méthodes spectrales en dynamique des fluides numérique, par C. Canuto *et al* [7] d'abord, et par B. Fornberg [8] plus récemment mais pour les méthodes 'pseudo-spectrales' uniquement (cf. section A.4. pour le distinguo sémantique).

Les modèles proposés ici s'inscrivent dans ce contexte bibliographique en s'inspirant des travaux déjà réalisés, mais proposent des extensions originales, principalement issues de l'utilisation de potentiels additionnels faisant partie intégrante des simulations. Du fait de la multiplicité des formulations utilisées, et pour en faciliter la lecture, on a choisi dans cet article de les regrouper par thèmes, accompagnées des résultats associés. Cette progression thématique est ordonnée en deux grandes parties : la première présente le noyau de la méthode, sa validation et ses applications, la deuxième quant à elle est vouée aux extensions de la méthode permettant de contourner la restriction à un domaine de géométrie figée.

A. NOYAU DE LA MÉTHODE - Cas des cuves en mouvement

Dans cette première partie, le noyau de la formulation spectrale est établi. On entend ici par 'noyau' la résolution des équations non-linéaires d'un écoulement irrotationnel de fluide parfait à surface libre dans un bassin parallélépipédique de géométrie figée, et cette seule résolution. Les applications afférentes sont exposées : principalement des lâchers de déformations initiales dans la cuve (*Nota* : on emploie dans cet article le mot 'cuve' pour désigner les cas où le 'bassin' n'est pas dédié à la génération de houle), et des cas de cuves en mouvement (sloshing). Les premiers pas vers la génération de houle par méthode spectrale nonobstant les restrictions de cette formulation de base sont aussi évoqués, donnant l'occasion de présenter le couplage avec un code de diffraction tri-dimensionnel.

A.1. Formulation du noyau - Lâchers de surface libre

Un bassin tri-dimensionnel de profondeur d'eau h et de dimensions horizontales L_x et L_y est considéré. Toute la formulation ainsi que les résultats sont présentés avec des quantités adimensionnalisées par rapport à la profondeur d'eau h , et à l'accélération de gravité g . On se place dans le cadre de la théorie des écoulements potentiels de fluide parfait ; le potentiel des vitesses $\phi(\mathbf{M}(x, y, z), t)$ de l'écoulement vérifie donc l'équation de Laplace (1) dans tout le domaine fluide D . La surface libre S_L est décrite au moyen d'une représentation classique excluant le déferlement : $z = \eta(x, y, t)$. Les conditions non-linéaires de surface libre s'écrivent alors comme (2) pour la condition cinématique et (3) pour la condition dynamique en formulation semi-Lagrangienne. En rajoutant des conditions de Neumann (4) homogènes sur les parois fixes

S_P du bassin, le problème est régi par les équations suivantes :

$$\Delta\phi(\mathbf{M}, t) = 0 \quad , \quad \mathbf{M} \in D \quad (1)$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}(\mathbf{M}, t) = \frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial\eta}{\partial y} \quad , \quad \mathbf{M}(x, y, \eta) \in S_L \quad (2)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(\mathbf{M}, t) = -\eta - \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 \quad , \quad \mathbf{M}(x, y, \eta) \in S_L \quad (3)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}(\mathbf{M}, t) = 0 \quad , \quad \mathbf{M} \in S_P \quad (4)$$

où n représente la normale à la paroi considérée.

On décompose alors le potentiel des vitesses sur la base des modes propres du bassin :

$$\phi(\mathbf{M}, t) = \sum_{mn=0}^{N_\phi} a_{mn}(t)\psi_{mn}(x, y, z) \quad , \quad \mathbf{M} \in D \quad (5)$$

la série infinie étant tronquée à l'ordre N_ϕ . Les $a_{mn}(t)$ en constituent la partie variante, on les appellera 'amplitudes modales'; quant aux ψ_{mn} , ce sont des fonctions purement spatiales qui correspondent aux modes propres du bassin. Si on ré-introduit cette décomposition (5) dans les équations (1) et (4) il vient :

$$\psi_{mn}(x, y, z) = \cos(k_mx) \cos(k_ny) \frac{\cosh[k_{mn}(z+1)]}{\cosh[k_{mn}]} \quad (6)$$

où $\vec{k}_{mn} = (k_m, k_n) = (m\pi/L_x, n\pi/L_y)$ est le nombre d'onde associé au mode bi-dimensionnel mn , et k_{mn} sa norme.

Lâchers de surface libre.

En premier lieu, on a validé le noyau seul de la méthode (équations (1) à (6)) sur des cas de lâchers de surface libre linéaires puis non-linéaires. Dans ces tests, on donne à l'instant initial une déformation de surface libre non nulle, à cinématique nulle. On observe ensuite le développement des ondes dans le bassin, comme sur le cas bi-dimensionnel présenté figure 1 où le deuxième mode propre du bassin évolue rapidement de sa déformée initiale sinusoïdale vers une déformée stationnaire non-linéaire. Les caractéristiques typiquement non-linéaires des déformées successives de surface libre sont bien visibles : affinement et augmentation de l'amplitude (de plus de 40%) des crêtes, élargissement et réduction de l'amplitude (d'environ 25%) des creux.

Des cas de lâchers de type Cauchy-Poisson en bassin tri-dimensionnel ont aussi été menés et comparés au code d'éléments de frontière (BEM) *X-wave* développé par P. Ferrant, cf. [9], ce qui a aboutit à la conclusion escomptée que beaucoup moins de points/modes sont nécessaires au code spectral pour atteindre la précision du code BEM.

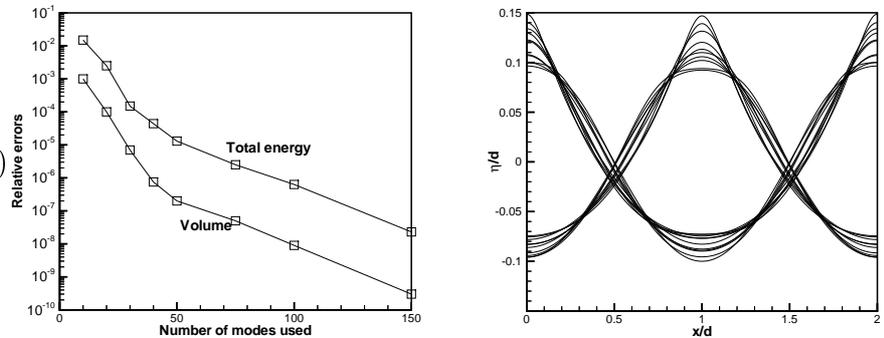


FIG. 1: Lâcher du mode 2 – Convergence des quantités globales (*gauche*) – Profils extrêmes de la déformée de surface libre à partir du repos (*droite*).

Toutes les considérations d'ordre numérique sont regroupées en A.4.

A.2. Cuves en mouvement

Formulation.

Après la validation du ‘noyau’ lui-même, il a semblé intéressant de tester les capacités du code sur le cas de cuves en mouvements imposés. De fait, l’expression de ce problème dérive aisément de celui du lâcher de surface libre en cuve fixe, par le simple ajout d’un terme de forçage analytique au second membre de la condition dynamique de surface libre non-linéaire (3) : $-\vec{x} \cdot \vec{A}_{exc.}$, où \vec{x} est le vecteur coordonnées, et $\vec{A}_{exc.}$ le vecteur accélération de l’excitation de la cuve. La cinématique initiale doit aussi être accordée à celle de l’excitation : $\phi(t=0) = -\vec{x} \cdot \vec{U}_{exc.}(t=0)$, avec $\vec{U}_{exc.}$ le vecteur vitesse de l’excitation.

Simulations.

Dans un article récent [10] G.X. Wu *et al* ont simulé différents cas bien documentés de cuves en excitation à des fréquences proches de la résonance, en utilisant une méthode d’éléments finis. La comparaison effectuée sur les différents cas montre un très bon accord entre leurs simulations et les nôtres [11], avec toujours l’avantage d’une convergence très rapide.

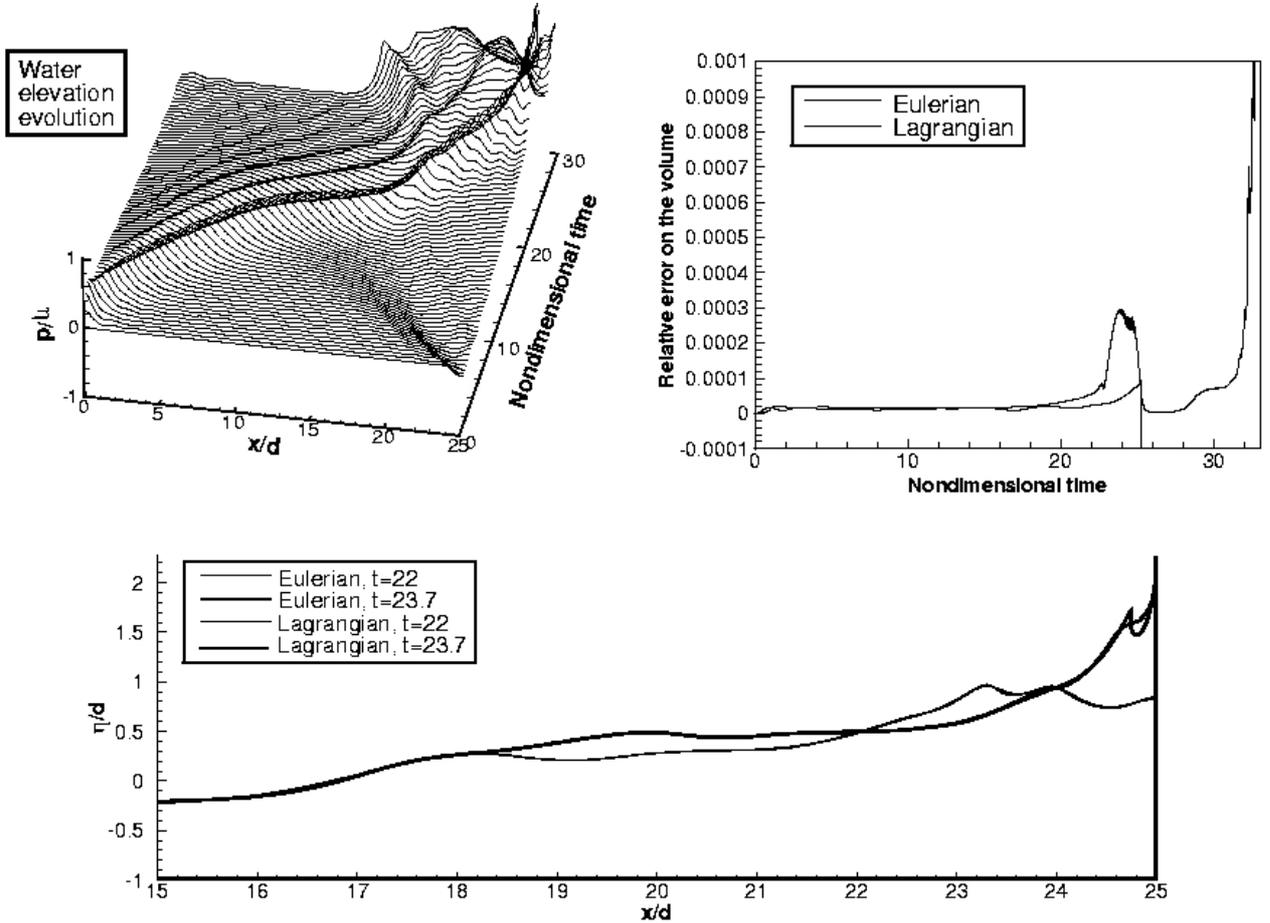


FIG. 2: Excitation proche de la résonance d’un bassin en eau peu profonde – Évolution de la surface libre – Comparaison des résultats en Lagrangien et en semi-Lagrangien. Ferrant & Le Touzé [11]

La figure 2 montre par exemple un cas en eau très peu profonde ($L_x/h = 25$) presque à la résonance $\omega_{exc.} = 99.73\% \omega_r$, où l’apparition d’un front d’onde très cambré sur les déformées successives est notable (en haut à gauche de la figure). Ce cas est à la limite de ce qu’il est possible de simuler puisqu’on atteint finalement des pentes locales qui conduisent au déferlement. Il est cependant notable que même sur ce cas extrême les deux méthodes fournissent des résultats

encore très proches. La partie basse de la figure illustre le fait que pour continuer à calculer après que la langue de fluide a redescendu de la paroi de droite, il a été nécessaire de mettre en oeuvre une résolution purement Lagrangienne, des instabilités se créant à ce moment en semi-Lagrangien (noté Eulérien) alors que les deux méthodes donnent des résultats confondus jusque peu avant.

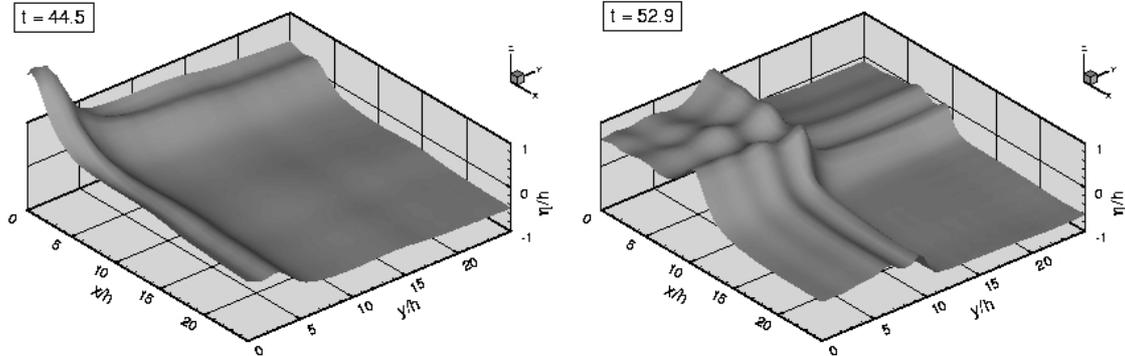


FIG. 3: Excitation diagonale d’une cuve à partir du repos et au voisinage de la résonance ($\omega_{exc.} = \omega_r * 99.8\%$), à deux instants.

La figure 3 montre un cas limite similaire en trois dimensions dans un cuve excitée selon une de ses diagonales. Un léger décalage temporel est trouvé par rapport à la méthode éléments finis, mais cette dernière a dû opter pour une discrétisation un peu plus grossière qu’en deux dimensions. Là encore on observe la formation de deux fronts d’onde perpendiculaires, fortement cambrés, interagissant jusqu’à déferler peu de temps après $t = 52.9$. Il faut noter dans les deux cas le caractère fortement non-linéaire des déformées qu’on réussit à obtenir, dépassant 2 fois la hauteur d’eau initiale (sur la figure 2 par exemple, le graphe dans la partie basse présente la même échelle en x et en z).

La limitante de telles simulations proches de la résonance est bien entendu l’hypothèse de non-déferlement intrinsèque à la méthode, plus que l’absence de viscosité dont les effets sont restreints ici, mais les caractéristiques de précision et de relative rapidité de calcul de la méthode permettent des simulations longues qui peuvent trouver leur utilité dans des applications réelles comme le transport maritime de liquides par exemple.

A.3. Extensions vers la génération de houle

Dispersion et diffraction d’un paquet de vague.

A partir d’une déformée initiale de type Cauchy-Poisson centrée en $x = 0$ dans un bassin bi-dimensionnel long, il est possible d’obtenir la dispersion d’un paquet de vagues qui se propage au long du bassin. Ce paquet de vagues bi-dimensionnel peut ensuite être introduit comme champ incident dans un code de diffraction tri-dimensionnel tel que celui développé par P. Ferrant (cf. [12] pour les résultats et des détails sur la formulation et la mise en oeuvre). La figure 4 montre l’interaction d’un tel train de vagues dispersif

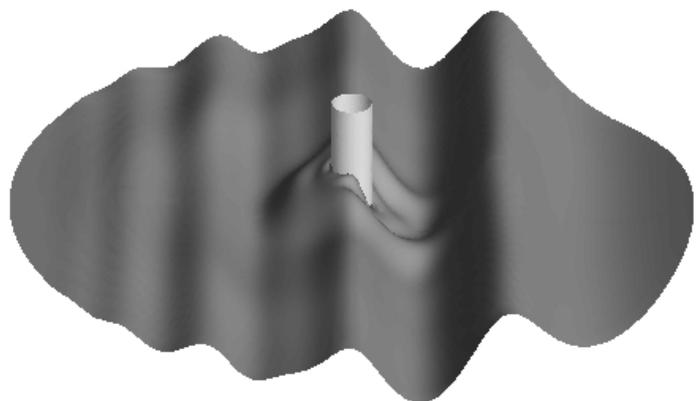


FIG. 4: Cylindre soumis à un train de diffraction bi-dimensionnel, en non-linéaire ($\eta = \eta_{inc.} + \eta_{diff.}$).

sur un cylindre vertical.

L'avantage à entreprendre un tel couplage réside d'une part dans la précision escomptée de la houle incidente spectrale, mais surtout dans la possibilité de conserver une formulation diffractée tri-dimensionnelle avec un champ incident bi-dimensionnel instationnaire grâce à la continuité de la solution spectrale à travers la surface libre incidente. En effet, lors d'un tel couplage, la résolution des quantités diffractées s'opère à l'endroit de la surface libre réelle, et non sur la surface libre incidente, les quantités incidentes doivent donc potentiellement être connues au-dessus de la surface libre incidente, donnée qu'une méthode d'éléments de frontière bi-dimensionnelle ne pourrait fournir, par exemple.

Houle linéaire avec potentiel additionnel analytique.

Il s'agit du cas, proposé par Agnon & Bingham [4], où l'on connaît analytiquement un potentiel qui satisfait à la condition d'un batteur piston en linéaire sur un des murs latéraux du bassin, et les conditions de Neumann homogènes sur les autres parois. Cette application n'a pas grand intérêt en elle-même puisqu'il existe une solution semi-analytique instationnaire fournissant directement la houle générée (solution que l'on a d'ailleurs très bien retrouvée numériquement [9]), mais elle fournit l'occasion de développer succinctement la mise en place et l'intérêt de la séparation du potentiel des vitesses en une composante spectrale et une composante additionnelle :

$$\phi(\mathbf{M}, t) = \phi^{spec}(\mathbf{M}, t) + \phi^{add}(\mathbf{M}, t) \quad , \quad \mathbf{M} \in D \quad (7)$$

Il faut souligner qu'on n'impose rien à ce potentiel additionnel sur la surface libre. Avec (7), on ré-écrit les équations du problème (1) à (4) où une des équations homogènes (4) est devenue inhomogène du fait de la condition batteur $\phi_x = V_{bat}$, $x = 0$. ϕ^{add} et toutes ses dérivées étant connues analytiquement, on peut les considérer comme de simples termes de forçage pour la résolution de ϕ^{spec} qui vérifie alors de nouveau le même jeu d'équations (1) à (4) du 'noyau' seul, avec en plus des termes de forçage dans les conditions de surface libre, mais en ayant bien des conditions de Neumann homogènes sur toutes les parois, *et donc un domaine de calcul de géométrie fixe* ce qui reste un impondérable de la méthode.

Ce principe ouvre des horizons si l'on considère qu'on peut l'appliquer pas uniquement dans le cas où l'on possède une solution analytique pour le potentiel additionnel, mais aussi dans celui où l'on serait capable de calculer ce potentiel à chaque pas de temps, *avant* de procéder à la résolution de la partie spectrale. C'est sur cette idée qu'ont reposé les extensions du modèle présentées dans la partie B.

A.4. Aspects numériques

On se propose dans cette section de rassembler les éléments de la méthode liés à la résolution numérique.

Dans le problème aux limites décrit précédemment (équations (1) à (4)), les seules inconnues sont les amplitudes modales $a_m(t)$ et les élévations de surface libre $\eta(x, y, t)$. Les équations de surface libre (2) et (3) sont discrétisées en N_η noeuds de collocation. Pour avancer les inconnues en temps, un schéma de Runge-Kutta du quatrième ordre est adopté. La connaissance des $a_m(t)$ requiert la résolution d'un système linéaire $N_\eta \times (N_\phi + 1)$ formulé pour sa dérivée temporelle et assemblé à partir de la condition dynamique de surface libre (3) prise aux N_η noeuds. La condition cinématique (2) quant à elle donne directement accès à la dérivée temporelle de η . Dans les simulations où les conditions de surface libre sont développées en série de perturbations, le système choisi est toujours carré et résolu par FFT. En non-linéaire complet, on le prend généralement carré avec une résolution par méthode itérative (GMRES), sauf dans certains cas 'difficiles' où une méthode plus lente (Householder) permet de résoudre un système

surdéterminé, ce qui a des propriétés de régularisation de la solution (aussi utilisé par Kim *et al* [5]). Cependant le coût devient alors $O(N_\phi^3)$ ce qui est rapidement prohibitif.

On peut profiter de cette distinction dans les résolutions pour faire la distinction sémantique entre les qualificatifs ‘spectral’ et ‘pseudo-spectral’. Le premier signifie que toutes les quantités inconnues (η , ϕ et leurs dérivées dans notre cas) sont directement accessibles à partir de la simple connaissance des amplitudes modales de la série (et de leurs dérivées temporelles). C’est bien entendu le cas de ϕ et de ses dérivées, par construction, mais η est aussi connue continûment en (x, y) dans ces méthodes; cela s’applique à nos résolutions linéaire et second ordre en développement de Stokes. En revanche, on parle de méthode ‘pseudo-spectrale’ lorsque la connaissance des modes ne suffit pas pour re-construire η et ses dérivées en tout point du plan horizontal, la résolution complètement non-linéaire présentée dans ce papier en est un exemple.

Afin d’évaluer le modèle, les premières étapes ont consisté à vérifier sur différentes grandeurs conservatives (volume, énergie totale) les caractéristiques de convergence spectrale (exponentielle) avec le nombre de modes conservés, ainsi que la convergence au quatrième ordre en temps : la méthode d’avance en temps choisie suivant un schéma de Runge-Kutta du quatrième ordre. La partie gauche de la figure 1 permet de constater la convergence attendue. Il apparaît d’ailleurs que cette convergence ne dépend que très peu de la grandeur choisie (qu’on choisisse le volume, ou l’erreur sur l’élévation en un seul point par exemple), pour peu que cette grandeur implique la re-construction de la série modale. L’évolution temporelle du volume est de plus une grandeur de choix pour quantifier les difficultés de résolution que rencontre la méthode : la partie en haut à droite de la figure 2 en est un très bon exemple (le pic y correspond au moment où l’eau remonte le mur, i.e. au moment de plus fortes pentes locales). Plus que la cambrure, les pentes locales sont d’ailleurs le facteur limitant de la méthode qui engendrent puis entretiennent des instabilités éventuelles quand on s’approche du déferlement; ce qui est attendu puisque plus les pentes sont fortes, plus les non-linéarités sont importantes, plus on se rapproche d’un déferlement au moins local et donc des limites de nos hypothèses. On peut néanmoins s’en rapprocher sans problème jusqu’au moins 80% de la limite de Stokes en cambrure (ce que constataient déjà Dommermuth & Yue [1]).

Si l’on s’intéresse maintenant aux critères temps/espace, la convergence en temps est généralement très rapide [9], c’est bien souvent celle en espace que l’on affinera. Cependant, et spécialement en non-linéaire, un critère entre les deux est souvent à respecter, sous peine de voir apparaître aux extrémités du bassin des oscillations parasites de grande amplitude –correspondant aux dernières longueurs d’ondes conservées dans la série–, et ce dès les premiers pas de temps, ce qui conduit directement à l’interruption du calcul. A cet égard, les chocs temporels (mises en vitesse brusques,...) sont aussi à éviter, car le contenu spectral s’en trouve rapidement étendu vers les hautes fréquences, et cette excitation ne disparaît pas ensuite. La mise en place de rampes temporelles, même très courtes, est donc nécessaire quand on ne débute pas la simulation à partir d’une cinétique nulle dans le fluide.

Les amplitudes modales ont aussi été observées, elles constituent un critère de stabilité de la méthode en ce sens que dès que les derniers modes sont excités, cela est synonyme de début de divergence de la méthode. Néanmoins, et hormis peut-être le surdimensionnement du système, toutes les tentatives de lissage sont à proscrire avec cette méthode : changer le contenu modal par une action externe mène le plus souvent à accentuer les difficultés. Les tentatives variées menées dans les débuts en ce sens ont inmanquablement mené à des impasses; on peut citer l’extinction des hautes fréquences –pourtant recommandée par Dommermuth & Yue [1]– lors de la reconstruction des grandeurs physiques nécessaires à la résolution (i.e. la non prise en compte des k derniers modes calculés), le déplacement des points de collocation, ou encore le lissage de la surface libre qui met en fait en inadéquation temporaire la répartition modale non lissée et les élévations de surface libre issues du lissage.

Avant de conclure, il doit aussi être fait mention de la méthode ‘Higher Order Spectral’ qui n’a pas encore été implémentée dans notre code non-linéaire. Cela est dû à la raison toute simple qu’en deux dimensions les temps de calcul sont tels (de l’ordre de 1h) que cela n’est pas

indispensable (le Cray2 de 1987 n'est plus requis!), et en 3D complètement non-linéaire seuls des cas de sloshing 'difficiles' ont été simulés jusqu'à présent, et donc au moyen d'un système surdéterminé non compatible avec cette méthode. Cela constitue néanmoins un développement prévu dans un futur proche, et qui sera indispensable pour générer de la houle tri-dimensionnelle complètement non-linéaire.

En conclusion, le modèle dont nous disposons est efficace et fiable quand il donne des résultats mais rigide tant dans sa formulation que numériquement, surtout en non-linéaire complet; et il se montre rétif aux 'aides à la convergence' usuelles (qu'on peut utiliser en BEM par exemple). Les réflexes sont en fait très différents d'une méthode potentielle 'à maillage' classique, car là c'est bien la donnée des amplitudes modales qui est principale et qu'il convient de surveiller. Bien évidemment, dans le code du bassin au second-ordre par exemple, où le calcul est indépendant de l'amplitude des non-linéarités, on rencontre moins de difficultés numériques.

B. EXTENSIONS DE LA MÉTHODE - Génération de houle

Dans la première partie, la validité du noyau de la méthode spectrale a été démontrée, et on a établi quelques lignes directrices quant à son utilisation numérique. Les applications qui en découlent directement ont été présentées et cette méthode semble valable pour une utilisation sur des cas de simulations longues de cuves tri-dimensionnelles en mouvement, même si des méthodes autorisant le déferlement sont plus adaptées pour des excitations plus violentes : on pense alors plutôt à des méthodes de types VOF (des comparaisons avec Y. Andrillon sont en cours) ou SPH. Mais les applications où ce modèle trouve toute son utilité sont ailleurs : la première est celle précédemment mentionnée du couplage avec un code de diffraction tri-dimensionnel, couplage rendu possible par les propriétés spécifiques de la technique spectrale, mais la méthode n'aura alors d'intérêt que si l'on parvient à générer des houles bi-dimensionnelles non-linéaires. La première section de cette partie y est consacrée. La seconde section présente quant à elle les grands traits de la simulation complète d'un bassin de houle au second-ordre au moyen d'un potentiel additionnel adéquat, et quelques résultats tri-dimensionnels.

B.1. Génération de houles non-linéaires

La première extension de la modélisation proposée dans la partie A. est celle de la génération de houles bi-dimensionnelles non-linéaires. Cela a nécessité d'ajouter au potentiel purement spectral un potentiel additionnel générateur de la houle. Comme la prise en compte d'une paroi mobile par un potentiel additionnel adéquat, même résolu numériquement, n'est pas aisée, une autre technique de génération de houle a été entreprise.

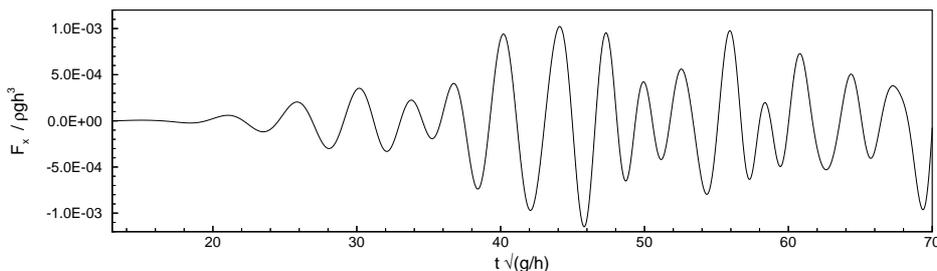


FIG. 5: Évolution des efforts subits par un cylindre soumis à un état de mer de spectre ITTC.

Elle est réalisée au moyen de doublets tournants immergés, singularités proposées à l'origine par A.H. Clément [13] et que nous avons optimisées récemment pour parvenir à une génération de houle presque parfaitement uni-directionnelle, même en non-linéaire. Ces doublets ont d'abord été utilisés pour reproduire un spectre de mer type ITTC, par superposition de doublets de différentes fréquences, spectre qui a été couplé au code de diffraction mentionné précédemment [14]. Le potentiel additionnel revêt alors la forme suivante, pour tout \mathbf{M} de D :

$$\phi^{add}(\mathbf{M}, t) = R(t) \sum_{j=1}^{N_\omega} \sum_{k=0}^{N_{images}} \left[\frac{\mu_{x_j} \cos(\omega_j t + \varphi_j)(x - x_k)}{(x - x_k)^2 + (z - z_k)^2} + \frac{\mu_{z_j} \sin(\omega_j t + \varphi_j)(z - z_k)}{(x - x_k)^2 + (z - z_k)^2} \right] \quad (8)$$

où la première somme représente le découpage du spectre continu de houle en N_ω bandes discrètes, la deuxième somme prend en compte les images du doublet, placées sur deux rangées de part et d'autres du fond du bassin pour tenir compte de la présence des murs latéraux et du fond. Les (x_k, z_k) sont les positions de ces images, les φ_j des phases aléatoires associées aux doublets de pulsations ω_j , et $R(t)$ une rampe de démarrage. μ_{x_j} et μ_{z_j} sont les composantes du moment du doublet j , on a montré récemment [15] que le choix optimal pour engendrer une houle *unidirectionnelle* est d'après la théorie linéaire : $\mu_{x_j} = th[k_j(z_k + 1)]\mu_{z_j}$ où k_j est le nombre d'onde associé à la pulsation ω_j .

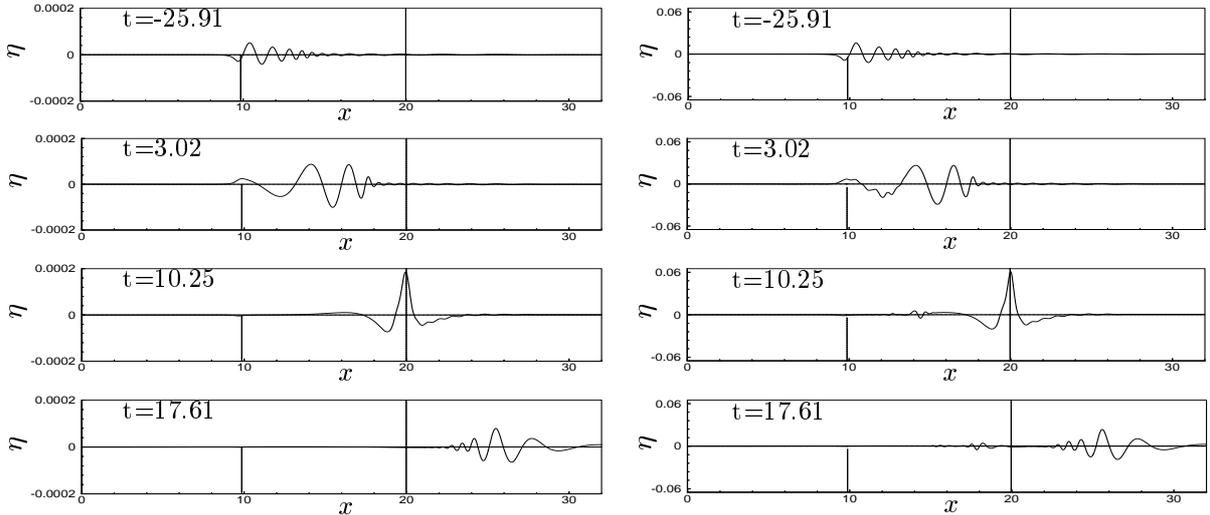


FIG. 6: Évolution du paquet de vagues -gauche : linéaire, droite : $\varepsilon_{pic} = 4.1\%$.

Les déformées de surface libre obtenues [14] sont du même type que celle de la figure 4. La figure 5 donne l'exemple d'une donnée qu'on peut extraire d'un tel couplage : celle de l'effort subi par le cylindre dans l'axe de la houle au cours du passage du paquet de mer.

Tout récemment [15], on a généralisé cette technique de génération à l'emploi d'un seul doublet temporel et non plus une superposition de doublets fréquentiels. Via un aller retour dans le domaine fréquentiel prenant en compte la fonction de transfert linéaire du doublet, on peut parvenir à générer un paquet de vague se focalisant à une distance donnée du doublet pour reproduire une cible linéaire prescrite. La figure 6 montre

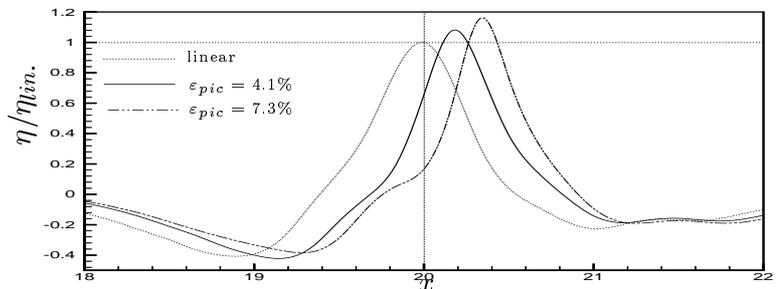


FIG. 7: Formes des pics linéaire et non-linéaire à leur maxima (rapporté au cas linéaire).

ainsi l'évolution du paquet de vagues se focalisant sur la sonde objectif puis se dispersant, ce en linéaire et en non-linéaire. L'objectif était ici de générer un pic focalisé de forte cambrure. On voit bien sur la figure 7 les effets caractéristiques des non-linéarités locales liées à cette cambrure. Cette méthode de génération de train d'ondes focalisés sera couplée très prochainement avec le même code de diffraction, notamment dans l'optique de retrouver le phénomène de 'ringing' de la structure dont on sait qu'il se produit dans de telles conditions.

Avec ces deux types de génération de houle non-linéaire, on dispose donc d'un outil d'entrée non seulement adéquat de par ses spécificités (comme exposé précédemment), mais aussi apte à simuler efficacement le champ incident non-linéaire utilisé comme entrée par n'importe quelle méthode en formulation diffractée. Les applications ne sont donc pas restreintes au cadre de la théorie potentielle puisque cette génération va ainsi se voir prochainement couplée avec un code fluide visqueux formulé en champ diffracté.

B.2. Bassin de houle au second ordre

L'autre application spécifique dérivée du noyau de notre modèle est celle de la simulation intégrale d'un bassin de houle numérique au second-ordre de non-linéarité du développement de Stokes. La formulation second-ordre adoptée pour le potentiel spectral est classique (cf. [16] pour des détails), mais fait apparaître une condition non-homogène sur le batteur. La recherche d'un potentiel additionnel adapté a donc été nécessaire, et s'est avérée non triviale. On est finalement parvenu à une expression du potentiel additionnel lui-même exprimé comme une série spectrale de modes sur le batteur généralisé. Cette solution satisfait de plus l'optique de conserver une précision et des temps de calcul intéressants. La différence ici par rapport à la section A. ou même par rapport à la génération d'un spectre de houle, est que ce potentiel ne peut être connu analytiquement et qu'il doit donc être calculé au long de la simulation en même temps que le potentiel purement spectral. Nous avons donc une double résolution imbriquée, et ce à chaque ordre (cf. [16] pour des détails quant à la résolution). Il faut de plus bien conserver à l'esprit que ce potentiel est complètement *adapté* à la situation et ne pourrait être aisément étendu à d'autres cas. Une résolution en non-linéaire complet du même bassin ne pourrait se faire au moyen du même potentiel par exemple (et elle ne serait pas aisée de toute manière). Le choix d'une résolution au second ordre est en effet motivé par le maintien afférent de l'affichage des conditions aux limites sur le batteur sur une paroi fixe (en $x = 0$), ce qui offre la possibilité de réaliser le développement spectral précédent sur un domaine de calcul dont la géométrie reste fixe.

Basé sur ce potentiel additionnel, un bassin de houle numérique au second ordre, nommé 'SWEET', a donc été développé au cours de l'année 2002 au moyen d'une telle technique entièrement spectrale. A notre connaissance, ce code n'a pas d'équivalent existant.

La première utilisation pratique de ce modèle a été dédiée à des comparaisons de mouvements batteur pour la génération de houles tri-dimensionnelles. Une étude des zones utiles aux deux ordres a en particulier été menée de manière plus approfondie, notamment dans le but de quantifier la dégradation au second-ordre de l'optimisation de la houle obtenue en théorie linéaire grâce à certaines techniques de génération batteur (cf. e.g. Dalrymple [17]).

Une résolution analytique fréquentielle a ensuite été développée par F. Bonnefoy, qui a aussi travaillé sur les mouvements batteur dans SWEET, et tout spécialement à la correction imposée afin de supprimer les ondes libres. Cette solution analytique nous a permis de valider en détails les résultats fournis par le code. La figure 8 illustre cette comparaison, en houle régulière oblique obtenue par méthode de Dalrymple [17], sur les élévations de surface libre totale et second-ordre seul fournies par le code à celles calculées analytiquement. On obtient un très bon accord, ce que vient confirmer l'efficacité remarquable de la suppression des ondes libres dans le code (figure 9 à comparer à la figure 8) grâce à une correction du mouvement batteur issue d'un calcul analytique [18]. Le fait de pouvoir ainsi éliminer une partie de la houle générée, a priori

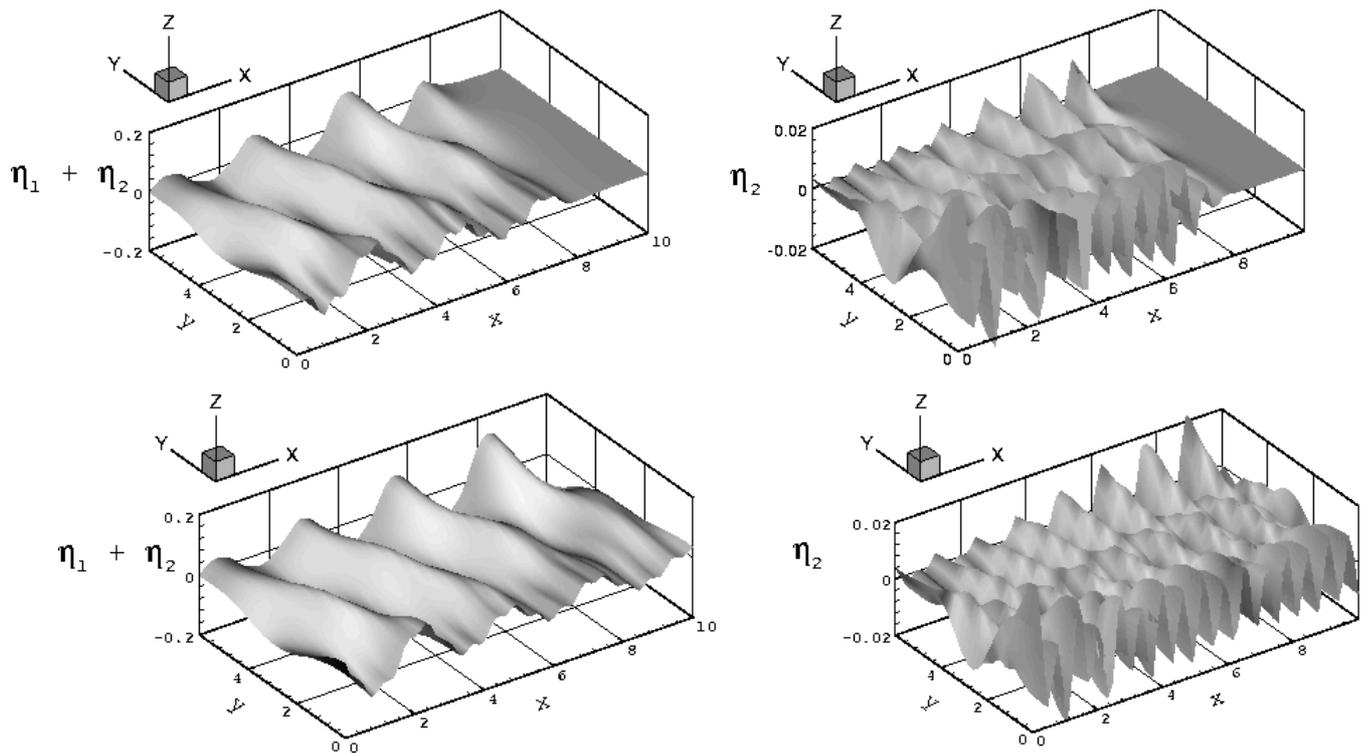


FIG. 8: Déformée de surface libre second-order et totale, en houle oblique de Dalrymple *-haut* : code SWEET, *-bas* : analytique

inséparable du reste dans le domaine temporel tend à renforcer la confiance que l'on a acquise dans cet outil.

On dispose donc à l'heure actuelle d'un bassin de houle numérique largement validé en comparaison à la théorie fréquentielle, et dont les possibilités spécifiquement temporelles sont encore à explorer. Le but à terme est de bénéficier d'un tel outil numérique complet, pratique, et rapide, voué à la simulation du bassin réel permettant entre autres d'effectuer une pré-calibration précise de la houle par exemple. L'étude de l'évolution temporelle de la zone utile sera ainsi une aide appréciable lors de la préparation des campagnes expérimentales,...

De même, les effets transitoires (ondes longues liées au front d'onde par exemple) seront qualifiés pour viser à les supprimer, peut-être en adaptant là-encore la commande batteur pour tenter de les absorber quand elles reviennent. Quoiqu'il arrive, ce code apportera son aide à la compréhension et à la préparation de campagnes expérimentales dans le très récent bassin de houle de l'École Centrale de Nantes.

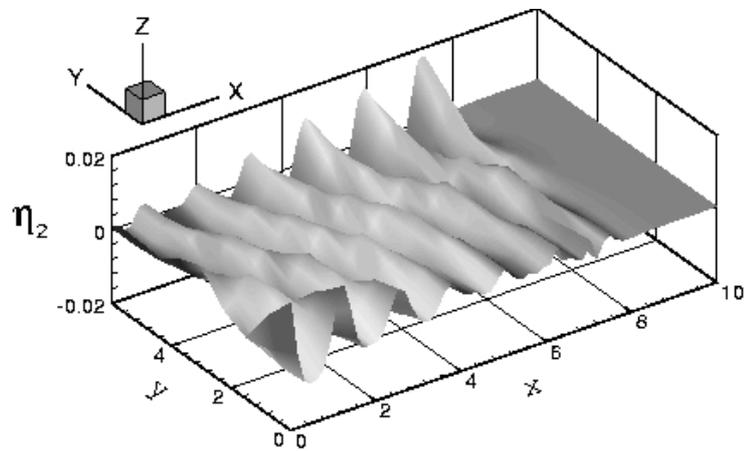


FIG. 9: Déformée de surface libre au second-order avec correction du mouvement batteur pour supprimer les ondes libres (code SWEET).

CONCLUSION

Tant dans son noyau que dans ses extensions à la génération de houle, le modèle spectral présenté ici a prouvé ses capacités à simuler avec fiabilité des ondes de gravité en bassin parallélépipédique. Des précautions quant à sa mise en oeuvre numérique doivent être conservées à l'esprit, mais les résultats obtenus sont fiables et précis. Des cas de cuves en mouvement ont été menés, notamment en eau peu profonde, et montrent une bonne stabilité tant qu'on n'est pas trop proche du déferlement local.

Cette technique spectrale présentant l'avantage certain d'être continue à travers la surface libre générée, elle constitue l'outil idéal pour effectuer à moindre coût des simulations de houle diffractant sur des structures; des exemples en ont été montrés. Des états de mer non-linéaires tri-dimensionnels seront simulés, permettant d'aborder la modélisation fine d'événements dimensionnants pour les structures en mer. Là encore, le modèle spectral sera exploité comme modèle de houle incidente dans le cadre de couplages, notamment avec une modélisation du champ diffracté en fluide visqueux; mais aussi pour l'étude de la cinématique de la houle tridimensionnelle sous des crêtes de forte amplitude.

Enfin, son développement le plus récent, le bassin de houle au second-ordre doit continuer à être exploré puis exploité plus exhaustivement. Des simulations de houle plus complexes seront menées et des études quantitatives de phénomènes propres aux bassins de houle (front d'ondes, réflexions, ondes libres, ondes liées, etc.) seront menées, notamment en vue d'améliorer l'utilisation expérimentale de notre bassin réel.

On se doit ici de rappeler que cette méthode, est une méthode fluide parfait, dont on attend qu'elle soit utilisable facilement et intensivement, que ce soit pour l'étude de la génération de houle en bassin ou pour des calculs offshore. On en attend un outil appliqué, et dont la précision est garantie par la méthode, plutôt qu'un outil prospectif de recherche qui ne serait utilisable pratiquement qu'à moyen terme.

Ce modèle ne se prévaut pas pour autant d'être un outil complet à lui seul, par contre il nous paraît être un très bon compromis attractif dans au moins deux cas : celui d'un couplage $2D/3D$ dans le cas de la diffraction de houle sur un corps, et celui de la reproduction d'un bassin de houle tri-dimensionnel. Cette technique est bien sûr limitée par la contrainte de non-déferlement, mais elle est a priori plus précise, dans ses limites, que toute autre méthode prenant en compte cet effet. Son extension à la résolution d'un bassin tri-dimensionnel complètement non-linéaire ne paraît en revanche pas aisée.

Finalement, un 'changement de noyau' pourrait aussi être exploré, afin de nous intéresser à bassin cylindrique ou annulaire, dans lequel la solution serait développée sur une base orthogonale adaptée constituée de fonctions de Bessel.

Références

- [1] D.G. Dommermuth & D.K.P. Yue, 'A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves', *J. Fluid Mech.*, **184**, 267-288, (1987).
- [2] V.E. Zakharov, 'Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid', *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **9**, 190-194, (1968).
- [3] C. Brandini & S.T. Grilli, 'Modeling of freak wave generation in a 3D-NWT', *Proc. 11th Offshore and Polar Engng. Conf. ISOPE'01*, Stavanger, Norvège, Vol III, 124-131, (2001).
- [4] Y. Agnon & H.B. Bingham, 'A non-periodic spectral method with applications to nonlinear water waves', *Eur. J. Mech. B/ Fluids*, **18**, 527-534, (1999).
- [5] M.J. Kim, H.T. Moon, Y.B. Lee, S.K. Choi, Y.K. Kim, H.Y. Nam & M. Cho, 'A spectral method for free surface flows of inviscid fluids', *Int. J. Numer. Meth. Fluids* **28**, 267-288, (1998).
- [6] M.J. Chern, A.G.L. Borthwick & R. Eatock Taylor, 'A pseudospectral σ -transformation model of 2D nonlinear waves', *J. Fluids and Struct.*, **13**, 607-630, (1999).
- [7] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni & T.A. Zang, *Spectral methods in fluid dynamics*, Springer, New York, (1988).
- [8] B. Fornberg, *A practical guide to pseudospectral methods*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, (1995).
- [9] D. Le Touzé, 'Approche spectrale pour la modélisation d'ondes de gravité en bassin tridimensionnel', *Mémoire de Diplôme d'Études Approfondies*, École Centrale de Nantes, (2000).
- [10] G.X. Wu, Q.W. Ma & R. Eatock Taylor, 'Numerical simulation of sloshing waves in a 3D tank based on a finite element method', *Applied Ocean Research*, **20**, 337-355, (1998).
- [11] P. Ferrant & D. Le Touzé, 'Simulation of sloshing waves in a 3D tank based on a pseudo-spectral method', *Proc. 16th Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Hiroshima, Japon, (2001).
- [12] P. Ferrant, D. Le Touzé & K. Pelletier, 'Nonlinear time domain models for irregular wave diffraction about offshore structures', *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, Wiley & Sons, (accepted for publication), (2003).
- [13] A.H. Clément, 'The spinning dipole : an efficient unsymmetrical numerical wavemaker', *Proc. 14th Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Port Huron (MI), Etats-Unis, 29-32, (1999).
- [14] P. Ferrant & D. Le Touzé, 'Fully-nonlinear spectral/BEM solution for irregular wave interactions with a 3D body', *Proc. 21st Int. Conf. on Offshore Mech. and Artic Engng*, Oslo, Norway, OMAE2002-28521, (2002).
- [15] D. Le Touzé & P. Ferrant, 'On the optimal use of submerged dipoles for the generation of unsteady nonlinear waves', *proposed for the 18th Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Le Croisic, France, (2003).
- [16] D. Le Touzé, F. Bonnefoy & P. Ferrant, 'Second order spectral simulation of directional wave generation and propagation in a 3D tank', *Proc. 12th Int. Symp. on Offshore and Polar Engng*, Kitakyushu, Japan, (2002).
- [17] R.A. Dalrymple, 'Directional wavemaker theory with sidewall reflection', *J. of Hydraulic Res.*, **27**, n°1, 23-34, (1989).
- [18] F. Bonnefoy, D. Le Touzé & P. Ferrant, 'Second order directional wavemaker theory : prediction and control of free waves', *proposed for the 18th Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Le Croisic, France, (2003).