

9<sup>èmes</sup> JOURNÉES DE L'HYDRODYNAMIQUE

10 - 11 - 12 MARS 2003

POITIERS - FUTUROSCOPE

**EXEMPLES DE TRANSFERT DE TECHNIQUES NUMERIQUES ENTRE  
L'HYDRODYNAMIQUE ET L'ASTRONAUTIQUE**

***SOME EXAMPLES OF NUMERICAL TECHNIQUES EXCHANGES BETWEEN  
HYDRODYNAMICS AND ASTRONAUTICS***

P. GUEVEL

ACRI, 260 route du Pin Montard, BP 234, 06904 Sophia-Antipolis Cedex, France

**Résumé**

Au cours de ces dernières années, la Société ACRI a été amenée à participer à divers projets conduits par de grands organismes de l'industrie spatiale : le Centre National d'Etudes Spatiales (CNES), l'Agence Spatiale Européenne (ESA).

A priori, cette nouvelle activité nous semblait par trop éloignée de celle pour laquelle nous avons quelque compétence. Notre équipe s'est néanmoins lancée dans l'aventure en raison de la relative simplicité du premier problème qui nous avait été posé.

Par la suite, nos actions auprès du CNES et de l'ESA se sont très largement développées et diversifiées ; l'étroite collaboration qui s'est instaurée entre astrophysiciens et hydrodynamiciens a donné lieu à de nombreux échanges de compétence.

Je me borne ici à en donner deux exemples :

- L'un, relatif à l'apport de techniques de l'hydrodynamique dans le domaine du spatial.
- L'autre, relatif à la réciprocité de ces échanges.

**Abstract**

In the past years, ACRI company have been involved in various projects led by the main organisms of the space industry: the French space agency (Centre National d'Etudes Spatiales, CNES), the European Space Agency (ESA).

At first, this new activity seemed far too distant from the ones we were skilled in. Our team however embarked on the venture for the relative simplicity of the first problem that was formulated to us.

Subsequently, our enterprises with CNES and ESA have largely expanded and diversified. The close collaboration between specialists of astronautics and of hydrodynamics that ensued yielded numerous and fruitful exchanges.

In this paper, I will merely point out two examples of such transfers:

- The first one regards the contribution of hydrodynamics techniques to the field of space mechanics;
- The other one deals with the opposite.

# I. INTRODUCTION DES TECHNIQUES DE L'HYDRODYNAMIQUE DANS LE DOMAINE SPATIAL - ELABORATION D'UN PROPAGATEUR D'ORBITE

## I.1) Objet

Il s'agit d'établir un programme de calcul permettant de prévoir la trajectoire suivie par un satellite artificiel de la terre.

Cette trajectoire s'écarte sensiblement de l'ellipse idéale de Kepler du fait que les forces appliquées au satellite ne se limitent pas à celle qui résulte de l'existence du champ gravitationnel central induit par la terre.

Les autres forces à prendre en considération sont d'origines diverses :

- **Les perturbations gravitationnelles terrestres**

Celles-ci sont dues au fait que la terre n'est pas une sphère parfaite à l'intérieur de laquelle la loi de répartition des masses ne serait fonction que du rayon.

Il en résulte que le champ central est accompagné d'une série d'harmoniques dont l'influence est significative sur le mouvement des satellites évoluant à basse altitude (quelques centaines de km).

- **Les efforts gravitationnels induits par le soleil, la lune, et les planètes du système solaire**

Ces astres, très éloignés des satellites artificiels de la terre, peuvent être légitimement assimilés à des masses concentrées ; chacun d'eux n'exerce alors sur le satellite que les effets d'un champ gravitationnel central dont la prise en compte ne présente guère de difficultés.

- **Le freinage exercé par l'air atmosphérique**

La masse volumique de l'air en haute altitude est extrêmement faible ; mais, comme la vitesse des satellites est par ailleurs très grande, les efforts d'origine aérodynamique ne sont pas toujours négligeables.

L'existence de ces efforts affecte essentiellement la durée de vie des satellites ; laquelle est de l'ordre de quelques jours à quelques dizaines d'années pour des orbites quasi-circulaires se situant à des altitudes comprises entre 200 et 800 km.

Le freinage aérodynamique est pratiquement proportionnel à la densité de l'air atmosphérique, laquelle dépend de l'éclairement (jour/nuit) et, plus encore, de l'activité solaire.

- **La pression de radiation solaire**

## I.2) Caractérisation du champ gravitationnel terrestre

D'après la loi d'attraction universelle, le champ de force  $\vec{F}$  par unité de masse, induit par la terre en tout point  $M$  extérieur à celle-ci, est le champ coulombien :

$$\vec{f}(M) = -K \iiint_D \mathbf{r}(M') \frac{\overline{M'M}}{|MM'|^3} dD(M') \quad (1)$$

$\mathbf{r}(M')$  étant la masse volumique au point  $M'$  et  $K$  la constante d'attraction universelle dont la valeur admise actuellement est :

$$K = 0,667260 \times 10^{-10} \text{ en unités SI} \quad (2)$$

Ce champ de force est à divergence et rotationnel nuls. Il dérive donc d'un potentiel scalaire harmonique  $U(M)$  ; de sorte qu'on peut poser :

$$\vec{f}(M) = \overline{\text{grad}U}(M), \quad (3)$$

avec

$$U(M) = K \iiint_{D'} \mathbf{r}(M') \frac{1}{|MM'|} dD(M'), \quad \Delta U = 0 \quad (4)$$

A l'infini, on a simplement :

$$U_o = K \frac{1}{r} \iiint_{D'} \mathbf{r}(M') dD(M') = KM \frac{1}{r},$$

$M$  étant la masse de la terre.

Il apparaît ainsi que le potentiel à l'infini a pour partie principale :

$$U_o = G \frac{1}{r}, \quad (5)$$

où la constante  $G=KM$  a pour valeur :  $G = 3,9860044 \times 10^{14} m^3/s^2$ .

En fait, l'expression (4) du potentiel gravitationnel  $U(M)$  est inexploitable en pratique pour la simple raison que la loi de répartition  $\mathbf{r}(M')$  des masses au sein de la terre n'est pas connue avec une précision suffisante.

Le seul mérite de l'approche ci-dessus est d'avoir établi qu'il existe un potentiel gravitationnel à l'extérieur de la terre et que celui-ci est une fonction harmonique s'annulant à l'infini comme  $\frac{1}{r}$  ( $r = |CM|$ ,  $C$  étant le centre de la terre).

On peut alors considérer que  $U(M)$  s'exprime sous la forme de la solution la plus générale de l'équation de Laplace dans le domaine extérieur à la terre ; soit, en coordonnées sphériques  $(r, \mathbf{l}, \mathbf{q})$  :

$$U(r, \mathbf{l}, \mathbf{q}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{1}{r^{n+1}} (C_n^m \cos m\mathbf{l} + S_n^m \sin m\mathbf{l}) P_n^m(\sin \mathbf{q}), \quad (6)$$

où  $P_n^m(\sin \mathbf{q})$  sont les fonctions de Legendre associées, de première espèce, de degré  $n$  et d'ordre  $m$  entiers.

Pour  $n = 0$ , cette expression de  $U$  se réduit à :

$$U_o = \frac{C_0}{r} P_0^0(\sin \mathbf{q}) = \frac{C_0^0}{r} P_0(\sin \mathbf{q}),$$

$P_0(\mathbf{x})$  étant le polynôme de Legendre, de première espèce et de degré  $n = 0$ , dont la valeur est  $+1$ .

D'où :

$$U_0 = \frac{C_0^0}{r}.$$

Ce terme est représentatif de la partie principale de  $U$  à l'infini, déjà exprimée en (5) ; la constante  $C_0^0$  s'identifie donc à la constante d'attraction « lointaine »  $G = KM$  de la terre.

Par ailleurs, on introduit une longueur caractéristique de la terre : par convention, son rayon équatorial moyen  $R = 6378,137 \text{ km}$ .

D'où, une nouvelle expression du potentiel  $U$  :

$$U(r, \mathbf{l}, \mathbf{q}) = \frac{G}{r} + \frac{G}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} (C_n^m \cos m\mathbf{l} + S_n^m \sin m\mathbf{l}) P_n^m(\sin \mathbf{q}), \quad (7)$$

dans laquelle les constantes indéterminées  $C_n^m$  et  $S_n^m$  sont ici des nombres sans dimension.

Le potentiel de perturbation  $\bar{U}$ , qui s'explicite alors ainsi :

$$\bar{U}(r, \mathbf{l}, \mathbf{q}) = \frac{G}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} (C_n^m \cos m\mathbf{l} + S_n^m \sin m\mathbf{l}) P_n^m(\sin \mathbf{q}), \quad (8)$$

est habituellement décomposé de la manière suivante :

$$\bar{U}(r, \mathbf{l}, \mathbf{q}) = \bar{U}_1(r, \mathbf{q}) + \bar{U}_2(r, \mathbf{l}, \mathbf{q}), \quad (9)$$

avec :

$$\bar{U}_1(r, \mathbf{q}) = \frac{G}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} C_n^0 P_n^0(\sin \mathbf{q}), \quad (10)$$

$$\bar{U}_2(r, \mathbf{l}, \mathbf{q}) = \frac{G}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} (C_n^m \cos m\mathbf{l} + S_n^m \sin m\mathbf{l}) P_n^m(\sin \mathbf{q}), \quad (11)$$

La première composante  $\bar{U}_1(r, \mathbf{q})$  du potentiel de perturbation, qui ne dépend pas de la longitude  $\mathbf{l}$ , serait la seule observée si le corps céleste présentait une parfaite symétrie de révolution autour de l'axe  $Cz$  ; les termes qui composent l'expression de ce potentiel  $\bar{U}_1$  sont appelés les harmoniques « zonaux ».

Les coefficients  $C_n^0$  sont généralement notés :

$$C_n^0 = -J_n ; \quad (12)$$

probablement en raison du fait que l'harmonique prédominant est celui qui correspond au coefficient  $C_2^0$  dont la valeur est négative.

Par ailleurs, les fonctions de Legendre associées  $P_n^0(\mathbf{x})$  s'identifient aux polynômes de Legendre  $P_n(\mathbf{x})$  de degré  $n$ .

D'où, une nouvelle expression du potentiel de perturbation  $\bar{U}_1$ , équivalente à celle donnée en (10) :

$$\bar{U}_1(r, \mathbf{q}) = -\frac{G}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} J_n P_n(\sin \mathbf{q}). \quad (13)$$

Le potentiel  $\bar{U}_2(r, \mathbf{l}, \mathbf{q})$  est la seconde composante du potentiel de perturbation ; les termes qui composent son expression (11) sont dénommés ainsi :

- les harmoniques tesseraux, pour  $m < n$  ;
- les harmoniques sectoriels, pour  $m = n$ .

Les valeurs actuellement admises des premiers coefficients représentatifs des perturbations gravitationnelles, induites par la terre, sont données ci-dessous.

$$\begin{cases} J_1 = 0, & J_2 = 1082627.10^{-3}, & J_3 = -2,536.10^{-6}, & J_4 = -1,623.10^{-6}, \\ J_5 = -0,228.10^{-6}, & J_6 = 0,543.10^{-6}, & J_7 = -0,361.10^{-6} \dots; \\ C_1^1 = 0, & S_1^1 = 0, & C_2^1 = 1,343.10^{-9}, & S_2^1 = -3,137.10^{-9}, \\ C_2^2 = 1,571.10^{-6}, & S_2^2 = -0,903.10^{-6}, & \dots \end{cases} \quad (14)$$

Les particularités  $J_1 = C_1^1 = S_1^1 = 0$  résultent simplement du fait que l'origine des axes est le centre de gravité de la terre.

Tous les grands organismes de recherche spatiale ont élaboré des programmes de calcul d'orbite en exploitant directement les formules,

$$\begin{cases} \bar{f} = \overrightarrow{grad} \bar{U} \\ \bar{U} = \frac{G}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} (C_n^m \cos m \mathbf{l} + S_n^m \sin m \mathbf{l}) P_n^m(\sin \mathbf{q}), \end{cases} \quad (15)$$

pour déterminer le champ de perturbation gravitationnel  $\bar{f} = \overrightarrow{grad} \bar{U}$ .

Une telle option ne présente aucune difficulté particulière du fait que les fonctions de Legendre se déduisent les unes des autres par récurrence et que la dérivée de chacune d'elles s'exprime analytiquement.

Cependant, les calculs deviennent très lourds dès lors qu'on retient dans l'expression de  $\bar{U}$  les termes représentatifs des harmoniques de rang très élevé.

Une alternative à cette manière d'opérer est proposée ci-après.

### I.3) Autre méthode de caractérisation du champ de perturbation gravitationnel terrestre

D'après son expression (15), le potentiel  $\bar{U}$  peut être considéré comme étant engendré par une suite infinie de multipôles disposés sur le centre de la terre.

On cherchera ici à exprimer ce même potentiel sous la forme de celle qui serait induite par une distribution superficielle de singularités réparties sur la sphère ( $S$ ), de centre  $C$  et de rayon  $R$ , circonscrite à la surface de la terre et que l'on appellera « surface de contrôle ».

Cette distribution de singularités peut être recherchée sous diverses formes :

- une distribution du type mixte de Green, composée de sources et de doublets normaux ;

- une distribution composée uniquement de sources ;
- une distribution composée uniquement de doublets normaux.

• **Distribution de singularités du type mixte de Green**

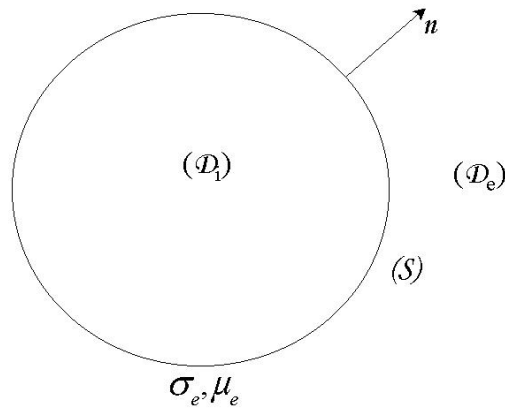
D'après la troisième formule de Green, celle-ci est composée de sources et de doublets normaux ayant respectivement pour densités superficielles :

$$\mathbf{s}_e = \frac{\partial \bar{U}}{\partial n} \Big|_S, \quad \mu_e = -\bar{U} \Big|_S, \quad (16)$$

$\bar{n}$  étant la normale extérieure à la sphère (S).

Une telle distribution possède les propriétés remarquables suivantes :

- elle induit un potentiel qui, dans le domaine ( $D_e$ ) extérieur à (S), s'identifie à la détermination  $\mu_e$  de  $\bar{U}$  ;
- elle induit un potentiel identiquement nul dans le domaine ( $D_i$ ) intérieur à (S).



En retenant l'expression (15) de  $\bar{U}$ , on obtient alors, d'une manière explicite :

$$\begin{cases} \mathbf{s}_e = -\frac{G}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (n+1) (C_n^m \cos m\mathbf{I} + S_n^m \sin m\mathbf{I}) P_n^m(\sin \mathbf{q}) \\ \mu_e = -\frac{G}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_n^m \cos m\mathbf{I} + S_n^m \sin m\mathbf{I}) P_n^m(\sin \mathbf{q}) \end{cases}, \quad (17)$$

D'où, une nouvelle expression du potentiel de perturbation, valable seulement dans le domaine ( $D_e$ ) extérieur à la sphère (S) :

$$\bar{U}(M) = -\frac{1}{4\mathbf{p}} \iint_S \mathbf{s}_e(M') \frac{1}{|MM'|} dS(M') - \frac{1}{4\mathbf{p}} \iint_S \mu_e(M') \bar{n}(M') \cdot \overrightarrow{grad}_M \left( \frac{1}{|MM'|} \right) dS(M') \quad (18)$$

Des formulations plus intéressantes peuvent encore être obtenues en exploitant les propriétés de la distribution de singularité du type mixte de Green ; mais cette fois dans le cas d'un problème posé dans le domaine intérieur ( $D_i$ ).

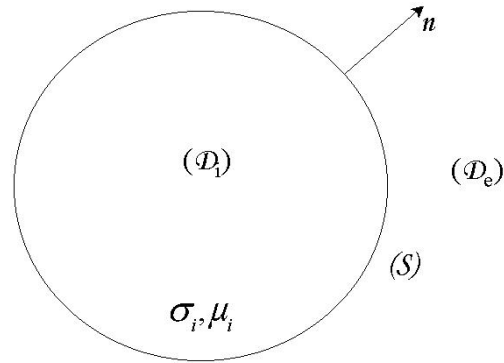
Soit, en effet, une fonction harmonique quelconque  $U_i(M)$ , régulière dans ce domaine.

La distribution superficielle, composée de sources et de doublets normaux ayant pour densités

$$\mathbf{s}_i = -\frac{\partial U_i}{\partial n}\Big|_S, \quad \mu_i = U_i\Big|_S, \quad (19)$$

possède les propriétés suivantes, en tout point analogues à celles énoncées dans le cas du problème extérieur :

- elle induit un potentiel qui, dans le domaine  $(D_i)$ , s'identifie au potentiel  $U_i(M)$  ;
- elle induit un potentiel identiquement nul dans le domaine  $(D_e)$ .



Il en résulte que la distribution de singularités, composée de sources et de doublets normaux ayant pour densités :

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_e + \mathbf{s}_i = \left( \frac{\partial U_e}{\partial n} - \frac{\partial U_i}{\partial n} \right)_S, \quad \mu = -(U_e - U_i)_S, \quad (20)$$

engendre toujours le potentiel  $U(M)$  dans tout le domaine extérieur à la sphère de contrôle  $(S)$  ; et cela, quelle que soit la fonction harmonique  $U_i(M)$ , régulière dans  $(D_i)$ , considérée.

Ici, on a intérêt à choisir celle-ci sous la forme :

$$U_i(M) = \frac{G}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n k_n \left( \frac{r}{R} \right)^n (C_n^m \cos m\mathbf{l} + S_n^m \sin m\mathbf{l}) P_n^m(\sin \mathbf{q}), \quad (21)$$

où  $k_n, n = 1, 2, 3, \dots$ , désigne une suite de constantes adimensionnelles, pour l'instant totalement arbitraires.

On a, par suite :

$$\begin{cases} \mathbf{s}_i = -\frac{G}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n n k_n (C_n^m \cos m\mathbf{l} + S_n^m \sin m\mathbf{l}) P_n^m(\sin \mathbf{q}); \\ \mu_i = \frac{G}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n k_n (C_n^m \cos m\mathbf{l} + S_n^m \sin m\mathbf{l}) P_n^m(\sin \mathbf{q}). \end{cases} \quad (22)$$

D'où, un nouveau type de distribution mixte, composée de sources et de doublets normaux ayant pour densités :

$$\begin{cases} \mathbf{s} = \mathbf{s}_e + \mathbf{s}_i = -\frac{G}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (n+1+nk_n) (C_n^m \cos m\mathbf{I} + S_n^m \sin m\mathbf{I}) P_n^m(\sin \mathbf{q}); \\ \mu = \mu_e + \mu_i = -\frac{G}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (1-k_n) (C_n^m \cos m\mathbf{I} + S_n^m \sin m\mathbf{I}) P_n^m(\sin \mathbf{q}), \end{cases} \quad (23)$$

qui engendre toujours le potentiel de perturbation  $\bar{U}(M)$  dans le domaine  $(D_e)$ .

• **Distribution composée uniquement de sources :**

En donnant à toutes les constantes  $k_n$  la valeur +1, on élimine la distribution de doublets ; le potentiel de perturbation dans le domaine  $(D_e)$  extérieur à la sphère  $(S)$  s'exprime alors ainsi :

$$\begin{cases} \bar{U}(M) = -\frac{1}{4\mathbf{p}} \iint_S \mathbf{s}_e(M') \frac{1}{|MM'|} dS(M') ; \\ \mathbf{s}(M) = -\frac{G}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n (2n+1) (C_n^m \cos m\mathbf{I} + S_n^m \sin m\mathbf{I}) P_n^m(\sin \mathbf{q}); \end{cases} \quad (24)$$

• **Distribution composée uniquement de doublets normaux :**

En imposant maintenant  $k_n = -\frac{n+1}{n}$ , on élimine la distribution de sources ; d'où, une autre formulation du potentiel de perturbation dans le domaine  $(D_e)$  :

$$\begin{cases} \bar{U}(M) = -\frac{1}{4\mathbf{p}} \iint_S \mu(M') \vec{n}(M') \cdot \overrightarrow{grad}_{M'} \left( \frac{1}{|MM'|} \right) dS(M') ; \\ \mu(M) = -\frac{G}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{2n+1}{n} (C_n^m \cos m\mathbf{I} + S_n^m \sin m\mathbf{I}) P_n^m(\sin \mathbf{q}). \end{cases} \quad (25)$$

**I.4) Mise en œuvre d'une méthode de calcul du potentiel de perturbation  $\bar{U}(M)$  et de son gradient  $\bar{f}$  dans le cas où on retient l'option « sources seules » :**

Le calcul des intégrales du type :

$$\bar{U}(M) = -\frac{1}{4\mathbf{p}} \iint_S \mathbf{s}(M') \frac{1}{|MM'|} dS(M') , \quad (26)$$

peut être effectué par différentes méthodes de quadrature numérique, plus ou moins sophistiquées.

La plus simple d'entre elles consiste à discrétiser la surface  $(S)$  selon  $N$  facettes élémentaires  $s_k$  ; chacune d'elles étant de très petite dimension vis à vis du rayon de cette sphère et de la distance qui la sépare de la trajectoire décrite par le satellite  $M$ .

A ce moment-là, il est parfaitement licite de retenir la formule d'approximation suivante :

$$\bar{U}(M) = -\frac{1}{4\mathbf{p}} \sum_{k=1}^N \mathbf{s}_k s_k \frac{1}{|M_k M|} , \quad (27)$$



où, on a noté :

- $M_k$ , le centre de gravité de la facette  $s_k$  ;
- $s_k$ , la surface de celle-ci ;
- $\mathbf{s}_k$ , la densité superficielle de sources au point  $M_k$ .

Le champ de forces correspondant s'exprime alors ainsi :

$$\overline{\mathbf{f}}(M) = \frac{1}{4\mathbf{p}} \sum_{k=1}^N \mathbf{s}_k s_k \frac{\overline{M_k M}}{|M_k M|^3}, \quad (28)$$

L'intérêt de cette formulation réside dans le fait que le calcul des produits  $\mathbf{s}_k s_k$ , ainsi que celui des coordonnées  $x_k, y_k, z_k$  du point  $M_k$ , n'est à effectuer qu'une fois pour toutes.

Cependant, son exploitation sera limitée au calcul de la contribution des harmoniques de rang élevé pour lesquels les dérivées des fonctions de Legendre associées  $P_n^m(\sin \mathbf{q})$  commencent à se présenter sous une forme très complexe.

Le champ central et ses tous premiers harmoniques resteront exprimés selon la formulation initiale exacte.

## II. INTRODUCTION DES TECHNIQUES DE L'ASTRONAUTIQUE DANS LE DOMAINE DE L'HYDRODYNAMIQUE - MODE DE REPRESENTATION DE L'ATTITUDE D'UN SOLIDE EN MOUVEMENT SELON LA METHODE DE CAYLEY-KLEIN (LES QUATERNIONS)

### II.1) Définition

Cette méthode est fondée sur l'application du théorème de Chasles selon lequel le déplacement le plus général d'un solide peut être considéré comme le résultat d'une translation  $\overline{OO'}$  suivie d'une rotation unique, d'axe  $\bar{k}(p, q, r)$  et d'angle  $\mathbf{q}$ .\*

Ici, les quatre paramètres  $p, q, r, \mathbf{q}$  sont remplacés par les suivants, appelés « quaternions »,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{l}_0 = \cos \frac{\mathbf{q}}{2}, \\ \mathbf{l}_1 = p \sin \frac{\mathbf{q}}{2}, \\ \mathbf{l}_2 = q \sin \frac{\mathbf{q}}{2}, \\ \mathbf{l}_3 = r \sin \frac{\mathbf{q}}{2}; \end{array} \right. \quad (1)$$

lesquels satisfont manifestement l'identité :

---

\* Celle-ci diffère essentiellement des méthodes d'Euler ou de Cardan qui, toutes deux, procèdent selon trois rotations successives d'axes différents.

$$\mathbf{I}_0^2 + \mathbf{I}_1^2 + \mathbf{I}_2^2 + \mathbf{I}_3^2 = 1. \quad (2)$$

Avant de développer les particularités de la méthode des quaternions, il est nécessaire de rappeler quelques formules classiques de changement de repère.

## II.2) Rotation d'amplitude finie d'un vecteur $\vec{A}$ , d'origine $O$ , autour d'un axe fixe $\vec{k}$ passant par ce point $O$ .

Après une rotation d'angle  $\mathbf{q}$  le vecteur  $\vec{A}$  occupe dans l'espace la nouvelle position :

$$\vec{A}' = \cos \mathbf{q} \cdot \vec{A} + (1 - \cos \mathbf{q}) (\vec{k} \cdot \vec{A}) \vec{k} + \sin \mathbf{q} (\vec{k} \wedge \vec{A}). \quad (3)$$

## II.3) Matrices de passage associées à deux repères orthonormés déduits l'un de l'autre par une seule rotation d'axe fixe

Soit  $(O,XYZ)$  le repère de référence, de vecteurs unitaires  $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ .

A la suite de la rotation d'axe  $\vec{k}(p,q,r)$ , d'angle  $\mathbf{q}$  ce repère est amené dans la position  $(o,xyz)$ , de vecteurs unitaires  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ .

L'application de la formule (3) aux vecteurs  $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$  fournit immédiatement les expressions des vecteurs  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  ; soit :

$$\vec{e}_p = \cos \mathbf{q} \cdot \vec{E}_p + (1 - \cos \mathbf{q}) (\vec{k} \cdot \vec{E}_p) \vec{k} + \sin \mathbf{q} (\vec{k} \wedge \vec{E}_p), \quad p = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Sous forme matricielle, ce résultat se présente ainsi :

$$\begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \vec{E}_1 \\ \vec{E}_2 \\ \vec{E}_3 \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

le terme général de la matrice  $[T]$  ayant pour expression :

$$t_{p,q} = \cos \mathbf{q} (\vec{E}_p \cdot \vec{E}_q) + (1 - \cos \mathbf{q}) (\vec{k} \cdot \vec{E}_p) (\vec{k} \cdot \vec{E}_q) + \sin \mathbf{q} (\vec{E}_p \wedge \vec{E}_q) \cdot \vec{k}. \quad (6)$$

Exprimée à partir des cosinus directeurs de chacun des vecteurs  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ , soit :

$$\mathbf{a}_p = \vec{e}_p \cdot \vec{E}_1, \quad \mathbf{b}_p = \vec{e}_p \cdot \vec{E}_2, \quad \mathbf{g}_p = \vec{e}_p \cdot \vec{E}_3, \quad p = 1, 2, 3, \quad (7)$$

cette matrice s'explique également ainsi :

$$[T] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{a}_2 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{g}_2 \\ \mathbf{a}_3 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{g}_3 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

D'où, par identification, les formules qui fournissent les valeurs de ces 9 cosinus directeurs en fonction des paramètres  $p,q,r$  et  $\mathbf{q}$  qui caractérisent la rotation d'axes imposée.

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 = p^2(1 - \cos \mathbf{q}) + \cos \mathbf{q} , \mathbf{b}_1 = pq(1 - \cos \mathbf{q}) + r \sin \mathbf{q} , \mathbf{g}_1 = pr(1 - \cos \mathbf{q}) - q \sin \mathbf{q} ; \\ \mathbf{a}_2 = qp(1 - \cos \mathbf{q}) - r \sin \mathbf{q} , \mathbf{b}_2 = q^2(1 - \cos \mathbf{q}) + \cos \mathbf{q} , \mathbf{g}_2 = qr(1 - \cos \mathbf{q}) + p \sin \mathbf{q} ; \\ \mathbf{a}_3 = rp(1 - \cos \mathbf{q}) + q \sin \mathbf{q} , \mathbf{b}_3 = rq(1 - \cos \mathbf{q}) - p \sin \mathbf{q} , \mathbf{g}_3 = r^2(1 - \cos \mathbf{q}) + \cos \mathbf{q} . \end{cases} \quad (9)$$

En changeant  $\mathbf{q}$  en  $-\mathbf{q}$  on obtient immédiatement les formules de réciprocity suivantes :

$$\begin{cases} \overline{E}_1 \\ \overline{E}_2 \\ \overline{E}_3 \end{cases} = [T]^T \begin{cases} \overline{e}_1 \\ \overline{e}_2 \\ \overline{e}_3 \end{cases} , \quad [T]^T = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_3 \end{bmatrix} , \quad (10)$$

$[T]^T$  étant la transposée de la matrice  $[T]$ .

#### II.4) Composantes de la vitesse de rotation instantanée $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}(t)$ du repère mobile $(o,xyz)$

Soit  $\overline{e}_1 = \overline{e}_1(t)$  ,  $\overline{e}_2 = \overline{e}_2(t)$  ,  $\overline{e}_3 = \overline{e}_3(t)$  , les vecteurs unitaires des axes  $ox$ ,  $oy$ ,  $oz$  à l'instant  $t$ .

A l'instant  $t + dt$ , ces vecteurs unitaires prennent les nouvelles attitudes :

$$\overline{e}'_1 = \overline{e}_1 + (\overline{\Omega} \wedge \overline{e}_1) dt , \quad \overline{e}'_2 = \overline{e}_2 + (\overline{\Omega} \wedge \overline{e}_2) dt , \quad \overline{e}'_3 = \overline{e}_3 + (\overline{\Omega} \wedge \overline{e}_3) dt .$$

Il en résulte :

$$\dot{\overline{e}}_1 = \overline{\Omega} \wedge \overline{e}_1 , \quad \dot{\overline{e}}_2 = \overline{\Omega} \wedge \overline{e}_2 , \quad \dot{\overline{e}}_3 = \overline{\Omega} \wedge \overline{e}_3 \left( \dot{\overline{e}}_p = \frac{d\overline{e}_p}{dt} \right) .$$

On en tire immédiatement, par application des propriétés du produit mixte, les expressions des composantes de  $\overline{\Omega}$  selon les axes mobiles  $(xyz)$ , soit :

$$\begin{cases} \Omega_1 = \dot{\overline{e}}_2 \cdot \overline{e}_3 = -\overline{e}_2 \cdot \dot{\overline{e}}_3 , \\ \Omega_2 = \dot{\overline{e}}_3 \cdot \overline{e}_1 = -\overline{e}_3 \cdot \dot{\overline{e}}_1 , \\ \Omega_3 = \dot{\overline{e}}_1 \cdot \overline{e}_2 = -\overline{e}_1 \cdot \dot{\overline{e}}_2 , \end{cases} \quad (11)$$

et, en explicitant :

$$\begin{cases} \Omega_1 = \dot{\mathbf{a}}_2 \mathbf{a}_3 + \dot{\mathbf{b}}_2 \mathbf{b}_3 + \dot{\mathbf{g}}_2 \mathbf{g}_3 = -(\mathbf{a}_2 \dot{\mathbf{a}}_3 + \mathbf{b}_2 \dot{\mathbf{b}}_3 + \mathbf{g}_2 \dot{\mathbf{g}}_3) ; \\ \Omega_2 = \dot{\mathbf{a}}_3 \mathbf{a}_1 + \dot{\mathbf{b}}_3 \mathbf{b}_1 + \dot{\mathbf{g}}_3 \mathbf{g}_1 = -(\mathbf{a}_3 \dot{\mathbf{a}}_1 + \mathbf{b}_3 \dot{\mathbf{b}}_1 + \mathbf{g}_3 \dot{\mathbf{g}}_1) ; \\ \Omega_3 = \dot{\mathbf{a}}_1 \mathbf{a}_2 + \dot{\mathbf{b}}_1 \mathbf{b}_2 + \dot{\mathbf{g}}_1 \mathbf{g}_2 = -(\mathbf{a}_1 \dot{\mathbf{a}}_2 + \mathbf{b}_1 \dot{\mathbf{b}}_2 + \mathbf{g}_1 \dot{\mathbf{g}}_2) . \end{cases} \quad (12)$$

#### II.5) Mise en œuvre de la méthode des quaternions

On exploitera ici les formules générales établies ci-dessus dans le cas où on retient la convention de Cayley-Klein :

$$\mathbf{l}_0 = \cos \frac{\mathbf{q}}{2} , \quad \mathbf{l}_1 = p \sin \frac{\mathbf{q}}{2} , \quad \mathbf{l}_2 = q \sin \frac{\mathbf{q}}{2} , \quad \mathbf{l}_3 = r \sin \frac{\mathbf{q}}{2} . \quad (13)$$

- **Matrices de passage**

Les expressions (9) des cosinus directeurs des axes mobiles seront tout d'abord transformées en y effectuant systématiquement les substitutions :  $\cos \mathbf{q} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\mathbf{q}}{2}$ ,  $\sin \mathbf{q} = 2 \sin \frac{\mathbf{q}}{2} \cos \frac{\mathbf{q}}{2}$  ;  
il vient ainsi :

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 = 2p^2 \sin^2 \frac{\mathbf{q}}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{\mathbf{q}}{2} , \mathbf{b}_1 = 2pq \sin^2 \frac{\mathbf{q}}{2} + 2r \sin \frac{\mathbf{q}}{2} \cos \frac{\mathbf{q}}{2} , \mathbf{g}_1 = 2pr \sin^2 \frac{\mathbf{q}}{2} - 2q \sin \frac{\mathbf{q}}{2} \cos \frac{\mathbf{q}}{2} ; \\ \mathbf{a}_2 = 2pq \sin^2 \frac{\mathbf{q}}{2} + 2r \sin \frac{\mathbf{q}}{2} \cos \frac{\mathbf{q}}{2} , \mathbf{b}_2 = 2q^2 \sin^2 \frac{\mathbf{q}}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{\mathbf{q}}{2} , \mathbf{g}_2 = 2qr \sin^2 \frac{\mathbf{q}}{2} - 2p \sin \frac{\mathbf{q}}{2} \cos \frac{\mathbf{q}}{2} ; \\ \mathbf{a}_3 = 2rp \sin^2 \frac{\mathbf{q}}{2} + 2q \sin \frac{\mathbf{q}}{2} \cos \frac{\mathbf{q}}{2} , \mathbf{b}_3 = 2rq \sin^2 \frac{\mathbf{q}}{2} - 2p \sin \frac{\mathbf{q}}{2} \cos \frac{\mathbf{q}}{2} , \mathbf{g}_3 = 2r^2 \sin^2 \frac{\mathbf{q}}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{\mathbf{q}}{2} . \end{cases} \quad (14)$$

Tous les termes recensés ci-dessus s'explicitent uniquement en fonction des quaternions ; par exemple :

$$\mathbf{a}_1 = 2\mathbf{I}_1^2 + 1 - 2(\mathbf{I}_1^2 + \mathbf{I}_2^2 + \mathbf{I}_3^2) = 1 - 2\mathbf{I}_2^2 - 2\mathbf{I}_3^2 ,$$

ou bien, en remplaçant 1 par la somme  $\mathbf{I}_0^2 + \mathbf{I}_1^2 + \mathbf{I}_2^2 + \mathbf{I}_3^2$  :

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{I}_0^2 + \mathbf{I}_1^2 - \mathbf{I}_2^2 - \mathbf{I}_3^2 .$$

D'où, finalement :

$$[\tau] = \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_0^2 + \mathbf{I}_1^2 - \mathbf{I}_2^2 - \mathbf{I}_3^2) & 2(\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_0\mathbf{I}_3) & 2(\mathbf{I}_1\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_0\mathbf{I}_2) \\ 2(\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_0\mathbf{I}_3) & (\mathbf{I}_0^2 - \mathbf{I}_1^2 + \mathbf{I}_2^2 - \mathbf{I}_3^2) & 2(\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_0\mathbf{I}_1) \\ 2(\mathbf{I}_1\mathbf{I}_3 + \mathbf{I}_0\mathbf{I}_2) & 2(\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_0\mathbf{I}_1) & (\mathbf{I}_0^2 - \mathbf{I}_1^2 - \mathbf{I}_2^2 + \mathbf{I}_3^2) \end{bmatrix} \quad (15)$$

Et, par conséquent

$$[\tau]^T = \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_0^2 + \mathbf{I}_1^2 - \mathbf{I}_2^2 - \mathbf{I}_3^2) & 2(\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_0\mathbf{I}_3) & 2(\mathbf{I}_1\mathbf{I}_3 + \mathbf{I}_0\mathbf{I}_2) \\ 2(\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_0\mathbf{I}_3) & (\mathbf{I}_0^2 - \mathbf{I}_1^2 + \mathbf{I}_2^2 - \mathbf{I}_3^2) & 2(\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_0\mathbf{I}_1) \\ 2(\mathbf{I}_1\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_0\mathbf{I}_2) & 2(\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_0\mathbf{I}_1) & (\mathbf{I}_0^2 - \mathbf{I}_1^2 - \mathbf{I}_2^2 + \mathbf{I}_3^2) \end{bmatrix} \quad (16)$$

On vérifie immédiatement que la matrice  $[\tau]^T$  se déduit de la matrice  $[\tau]$  en effectuant la substitution  $\mathbf{q} \Rightarrow \cdot \mathbf{q}$  qui implique seulement :

$$\mathbf{I}_0 \Rightarrow \mathbf{I}_0 , \mathbf{I}_1 \Rightarrow -\mathbf{I}_1 , \mathbf{I}_2 \Rightarrow -\mathbf{I}_2 , \mathbf{I}_3 \Rightarrow -\mathbf{I}_3 .$$

- **Composantes de la vitesse de rotation instantanée  $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}(t)$  du repère mobile  $(o,xyz)$**

Ces composantes, exprimées dans le repère mobile  $(o,xyz)$  s'explicitent à partir des formules générales (12).

On obtient tout d'abord, pour la première d'entre elles :

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \dot{\mathbf{a}}_2 \mathbf{a}_3 + \dot{\mathbf{b}}_2 \mathbf{b}_3 + \dot{\mathbf{g}}_2 \mathbf{g}_3 \\
&= 4(\mathbf{I}_1 \dot{\mathbf{I}}_2 + \dot{\mathbf{I}}_1 \mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_0 \dot{\mathbf{I}}_3 - \dot{\mathbf{I}}_0 \mathbf{I}_3)(\mathbf{I}_1 \mathbf{I}_3 + \mathbf{I}_0 \mathbf{I}_2) \\
&\quad + 4(\mathbf{I}_0 \dot{\mathbf{I}}_0 - \mathbf{I}_1 \dot{\mathbf{I}}_1 + \mathbf{I}_2 \dot{\mathbf{I}}_2 - \mathbf{I}_3 \dot{\mathbf{I}}_3)(\mathbf{I}_2 \mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_0 \mathbf{I}_1) \\
&\quad + 2(\mathbf{I}_2 \dot{\mathbf{I}}_3 + \dot{\mathbf{I}}_2 \mathbf{I}_3 + \mathbf{I}_0 \dot{\mathbf{I}}_1 + \dot{\mathbf{I}}_0 \mathbf{I}_1)(\mathbf{I}_0^2 - \mathbf{I}_1^2 - \mathbf{I}_2^2 + \mathbf{I}_3^2)
\end{aligned}$$

puis, en regroupant les termes apparaissant en facteur des dérivées  $\dot{\mathbf{I}}_0, \dot{\mathbf{I}}_1, \dot{\mathbf{I}}_2, \dot{\mathbf{I}}_3$  :

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= 2\dot{\mathbf{I}}_0(-2\mathbf{I}_1\mathbf{I}_3^2 - 2\mathbf{I}_0\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3 + 2\mathbf{I}_0\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3 - 2\mathbf{I}_0^2\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_1\mathbf{I}_0^2 - \mathbf{I}_1^3 - \mathbf{I}_1\mathbf{I}_2^2 + \mathbf{I}_1\mathbf{I}_3^2) \\
&\quad + \dot{\mathbf{I}}_1(2\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3 + 2\mathbf{I}_0\mathbf{I}_2^2 - 2\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3 + 2\mathbf{I}_0\mathbf{I}_1^2 + \mathbf{I}_0^3 - \mathbf{I}_0\mathbf{I}_1^2 - \mathbf{I}_0\mathbf{I}_2^2 + \mathbf{I}_0\mathbf{I}_3^2) \\
&\quad + 2\dot{\mathbf{I}}_2(2\mathbf{I}_1^2\mathbf{I}_3 + 2\mathbf{I}_0\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2 + 2\mathbf{I}_2^2\mathbf{I}_3 - 2\mathbf{I}_0\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_0^2\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_1^2\mathbf{I}_3 - \mathbf{I}_2^2\mathbf{I}_3 + \mathbf{I}_3^3) \\
&\quad + 2\dot{\mathbf{I}}_3(-2\mathbf{I}_0\mathbf{I}_1\mathbf{I}_3 - 2\mathbf{I}_0^2\mathbf{I}_2 - 2\mathbf{I}_2\mathbf{I}_3^2 + 2\mathbf{I}_0\mathbf{I}_1\mathbf{I}_3 + \mathbf{I}_0^2\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1^2\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_2^3 + \mathbf{I}_2\mathbf{I}_3^2)
\end{aligned}$$

et, après simplifications :

$$\Omega_1 = 2(-\dot{\mathbf{I}}_0\mathbf{I}_1 + \dot{\mathbf{I}}_1\mathbf{I}_0 + \dot{\mathbf{I}}_2\mathbf{I}_3 - \dot{\mathbf{I}}_3\mathbf{I}_2)(\mathbf{I}_0^2 + \mathbf{I}_1^2 + \mathbf{I}_2^2 + \mathbf{I}_3^2).$$

D'où, compte tenu de l'identité :  $\mathbf{I}_0^2 + \mathbf{I}_1^2 + \mathbf{I}_2^2 + \mathbf{I}_3^2 = 1$ , la première des formules suivantes :

$$\begin{cases}
\Omega_1 = 2(\mathbf{I}_0\dot{\mathbf{I}}_1 - \mathbf{I}_1\dot{\mathbf{I}}_0 - \mathbf{I}_2\dot{\mathbf{I}}_3 + \mathbf{I}_3\dot{\mathbf{I}}_2); \\
\Omega_2 = 2(\mathbf{I}_0\dot{\mathbf{I}}_2 - \mathbf{I}_2\dot{\mathbf{I}}_0 - \mathbf{I}_3\dot{\mathbf{I}}_1 + \mathbf{I}_1\dot{\mathbf{I}}_3); \\
\Omega_3 = 2(\mathbf{I}_0\dot{\mathbf{I}}_3 - \mathbf{I}_3\dot{\mathbf{I}}_0 - \mathbf{I}_1\dot{\mathbf{I}}_2 + \mathbf{I}_2\dot{\mathbf{I}}_1).
\end{cases} \quad (17)$$

La forme de ces dernières relations suggère de former les combinaisons linéaires suivantes :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(\Omega_1\mathbf{I}_1 + \Omega_2\mathbf{I}_2 + \Omega_3\mathbf{I}_3), \quad \frac{1}{2}(\Omega_1\mathbf{I}_0 - \Omega_2\mathbf{I}_3 + \Omega_3\mathbf{I}_2), \\
&\frac{1}{2}(\Omega_1\mathbf{I}_3 + \Omega_2\mathbf{I}_0 - \Omega_3\mathbf{I}_1), \quad \frac{1}{2}(-\Omega_1\mathbf{I}_2 + \Omega_2\mathbf{I}_1 + \Omega_3\mathbf{I}_0).
\end{aligned}$$

La première d'entre elles s'explique comme suit :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\Omega_1\mathbf{I}_1 + \Omega_2\mathbf{I}_2 + \Omega_3\mathbf{I}_3) &= -\dot{\mathbf{I}}_0(\mathbf{I}_1^2 + \mathbf{I}_2^2 + \mathbf{I}_3^2) + \mathbf{I}_0(\mathbf{I}_1\dot{\mathbf{I}}_1 + \mathbf{I}_2\dot{\mathbf{I}}_2 + \mathbf{I}_3\dot{\mathbf{I}}_3) \\
&= -\dot{\mathbf{I}}_0(\mathbf{I}_1^2 + \mathbf{I}_2^2 + \mathbf{I}_3^2) + \frac{\mathbf{I}_0}{2} \frac{d}{dt}(\mathbf{I}_1^2 + \mathbf{I}_2^2 + \mathbf{I}_3^2) \\
&= -\dot{\mathbf{I}}_0(1 - \mathbf{I}_0^2) - \frac{\mathbf{I}_0}{2} \frac{d}{dt} \mathbf{I}_0^2,
\end{aligned}$$

de sorte qu'on a très simplement :

$$\frac{1}{2}(\Omega_1\mathbf{I}_1 + \Omega_2\mathbf{I}_2 + \Omega_3\mathbf{I}_3) = -\dot{\mathbf{I}}_0$$

On obtient de la même manière :

$$\frac{1}{2}(\Omega_1 \mathbf{I}_0 - \Omega_2 \mathbf{I}_3 + \Omega_3 \mathbf{I}_2) = \dot{\mathbf{I}}_1, \quad \frac{1}{2}(\Omega_1 \mathbf{I}_3 + \Omega_2 \mathbf{I}_0 - \Omega_3 \mathbf{I}_1) = \dot{\mathbf{I}}_2,$$

$$\frac{1}{2}(-\Omega_1 \mathbf{I}_2 + \Omega_2 \mathbf{I}_1 + \Omega_3 \mathbf{I}_0) = \dot{\mathbf{I}}_3.$$

L'ensemble de ces résultats peut être présenté sous l'une ou l'autre des formes matricielles suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_0 \\ \dot{\mathbf{I}}_1 \\ \dot{\mathbf{I}}_2 \\ \dot{\mathbf{I}}_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\mathbf{I}_1 & -\mathbf{I}_2 & -\mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_0 & -\mathbf{I}_3 & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{I}_0 & -\mathbf{I}_1 \\ -\mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_1 & \mathbf{I}_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{Bmatrix}; \quad (18)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_0 \\ \dot{\mathbf{I}}_1 \\ \dot{\mathbf{I}}_2 \\ \dot{\mathbf{I}}_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_1 & -\Omega_2 & -\Omega_3 \\ \Omega_1 & 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ \Omega_2 & -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_3 & \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{I}_0 \\ \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{Bmatrix}; \quad (19)$$

On a, par suite :

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{I}}_0 \\ \ddot{\mathbf{I}}_1 \\ \ddot{\mathbf{I}}_2 \\ \ddot{\mathbf{I}}_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\Omega}_1 & -\dot{\Omega}_2 & -\dot{\Omega}_3 \\ \dot{\Omega}_1 & 0 & \dot{\Omega}_3 & -\dot{\Omega}_2 \\ \dot{\Omega}_2 & -\dot{\Omega}_3 & 0 & \dot{\Omega}_1 \\ \dot{\Omega}_3 & \dot{\Omega}_2 & -\dot{\Omega}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{I}_0 \\ \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_1 & -\Omega_2 & -\Omega_3 \\ \Omega_1 & 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ \Omega_2 & -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_3 & \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{I}}_0 \\ \dot{\mathbf{I}}_1 \\ \dot{\mathbf{I}}_2 \\ \dot{\mathbf{I}}_3 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

puis, en effectuant dans la seconde de ces matrices les substitutions (19) :

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{I}}_0 \\ \ddot{\mathbf{I}}_1 \\ \ddot{\mathbf{I}}_2 \\ \ddot{\mathbf{I}}_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\Omega}_1 & -\dot{\Omega}_2 & -\dot{\Omega}_3 \\ \dot{\Omega}_1 & 0 & \dot{\Omega}_3 & -\dot{\Omega}_2 \\ \dot{\Omega}_2 & -\dot{\Omega}_3 & 0 & \dot{\Omega}_1 \\ \dot{\Omega}_3 & \dot{\Omega}_2 & -\dot{\Omega}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{I}_0 \\ \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{Bmatrix} - \frac{|\overline{\Omega}|^2}{4} \begin{Bmatrix} \mathbf{I}_0 \\ \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_3 \end{Bmatrix}. \quad (21)$$

L'exploitation de la méthode des quaternions – contrairement à celle des angles de Cardan ou d'Euler – ne fait apparaître aucune discontinuité, quelle que soit l'attitude du solide par rapport au repère de référence.

En outre, les intégrations numériques se trouvent grandement simplifiées en raison de la linéarité des équations cinématiques.