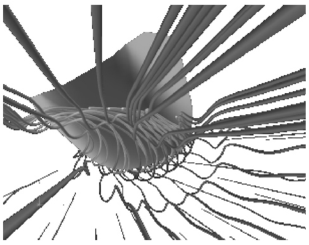

9èmes JOURNÉES DE L'HYDRODYNAMIQUE

10 - 11 - 12 MARS 2003

POITIERS - FUTUROSCOPE

DÉCOMPOSITION EN MODES RÉSONNANTS POUR LE PROBLÈME TRANSITOIRE DE TENUE À LA MER

RESONNANT STATE EXPANSION FOR THE TRANSIENT SEA-KEEPING PROBLEM

C. HAZARD[†], **F. LORET** [†]

[†]Laboratoire de Simulation et Modélisation des phénomènes de Propagation (URA CNRS 853), École Nationale Supérieure de Techniques Avancées : ENSTA / SMP, 32 Boulevard Victor, 75015 Paris, France (hazard@ensta.fr, loret@ensta.fr).

Résumé

Nous proposons une méthode originale pour simuler les mouvements transitoires d'un corps flottant librement à la surface libre de l'océan, que nous appliquons au problème bidimensionnel de tenue à la mer d'une structure élastique mince.
Cette méthode consiste à calculer non pas les mouvements eux-mêmes mais un comportement asymptotique en temps obtenu en approchant la "composante diffractée" par une superposition discrète de mouvements oscillants exponentiellement amortis, associés aux "fréquences de résonances" (complexes) de notre système. Cette décomposition est obtenue à l'aide de la transformée de Laplace en prolongeant analytiquement la résolvante de notre problème.

Summary

In this paper, we propose an original method for the simulation of transient response of the sea-keeping problem. This method consists in computing a time-asymptotic behaviour obtained through an approximation of the scattered component by means of a discrete superposition of exponentially decaying oscillating motions. These motions are associated to the (complex) scaterring frequencies of the system. This decomposition is obtained by means of Laplace transform using analytic continuation of the resolvent problem. Its application to the scattering problem of gravity waves by an elastic thin plate is described.

1 Introduction

Dans cette communication, nous proposons une méthode originale pour simuler numériquement les mouvements transitoires d'un corps flottant librement (sans vitesse d'avance) à la surface libre de l'océan. Cette étude a été initialement motivée par la question de stabilisation dynamique d'un navire : pour envisager un contrôle en temps réel de ces mouvements, il faut disposer d'un moyen à la fois *précis* et *rapide* pour leur simulation.

– Le critère de précision impose de travailler avec un modèle fiable de tenue à la mer. Les études concernant le contrôle des mouvements d'un navire se contentent généralement d'un modèle simplifié qui ramène l'action de l'océan à un simple effet de masses et amortissements ajoutés (valable en réalité à une fréquence fixée). Nous avons choisi de retenir le modèle linéarisé complet.
– Le critère de rapidité exclut *a priori* les méthodes habituellement utilisées pour simuler la propagation d'ondes transitoires, qui sont précises mais trop coûteuses en temps de calcul : équations intégrales (impliquant la fonction de Green transitoire), décompositions modales (sur les mouvements périodiques), méthode de la transformation de Laplace, schémas aux différences finies en temps (couplés à des conditions aux limites absorbantes)...

La méthode que nous présentons ici peut être vue comme une extension asymptotique de la méthode de transformation de Laplace. Elle consiste à calculer non pas les mouvements eux-mêmes mais un comportement asymptotique en temps obtenu en approchant la "composante diffractée" par une superposition discrète de mouvements oscillants exponentiellement amortis. Ces derniers sont appelés les *modes résonnants* du système : chacun d'eux est associé à une fréquence complexe, une *résonance*. L'étude théorique et la détermination numérique de ces quantités intrinsèques d'un problème de diffraction a fait l'objet de nombreux travaux au laboratoire[†] au cours des 15 dernières années [1, 2]. La méthode de *décomposition en modes résonnants* constitue une application prometteuse de ces travaux [3]. Les premiers développements de cette technique semblent dus aux électromagnéticiens (pour la simulation d'antennes notamment). Connue sous le nom de *Singularity Expansion Method* [4], elle ne paraît avoir été que très peu appliquée, le calcul des modes résonnants étant alors limité à quelques solutions analytiques. Ce n'est plus le cas aujourd'hui !

La méthode est exposée ici dans le cadre du problème bidimensionnel de tenue à la mer d'une structure élastique mince (piste d'atterrissage flottante, banquise...) décrite par le modèle de Kirchhoff (mouvements de flexion pure).

2 Le problème transitoire de tenue à la mer

Nous optons pour un système de coordonnées (O,x,y) tel que le fluide au repos occupe le domaine non borné $\Omega := \{y < 0\}$ dont la frontière est constituée de la surface libre F et de la plaque P telles que $\tilde{F} := F \cup P = \{y = 0\}$. Nous noterons η le déplacement vertical de la surface, φ désignera le potentiel des accélérations (en fait son opposé) et, ∂_x^n, ∂_y^n et ∂_t^n représenteront respectivement les n-ièmes dérivées partielles selon les variables d'espace x et y et la variable de temps t.

En introduisant la notion de *fonction causale*, qui consiste simplement à considérer $\eta(t)$ comme une fonction définie non plus seulement pour $t \geq 0$ mais pour $t \in \mathbb{R}$ en imposant que $\eta(t) = 0 \ \forall t < 0$, nous pourrons inclure nos conditions initiales dans le système d'équation. En effet, en interprétant les dérivées en temps au sens des distributions et en l'absence d'efforts extérieurs notre problème transitoire linéarisé s'écrit

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{dans } \Omega\,, \tag{1}$$

$$\partial_t^2\eta + \partial_y\varphi = f \quad \text{sur } \tilde{F}\,, \tag{2}$$

$$-\varphi + \eta + (\beta\partial_x^4\eta - \gamma\partial_y\varphi)\mathbb{1}_P = 0 \quad \text{sur } \tilde{F}\,, \tag{3}$$

$$\partial_x^2\eta = \partial_x^3\eta = 0 \quad \text{sur } \partial P\,, \tag{4}$$

où l'équation condensée (3) regroupe les conditions dynamiques sur et à l'extérieur de la plaque. L'opérateur $\mathbb{1}_P$ note la fonction indicatrice de P (soit $\mathbb{1}_P(x) = 1$ si $x \in P$ et 0 sinon) et les conditions initiales

$$\eta(0) = \eta^0 \ \text{ et } \ \partial_t\eta(0) = \eta^1 \tag{5}$$

sont prises en compte dans le second membre f

$$f = \eta^0\partial_t\delta + \eta^1\delta$$

avec δ la masse de Dirac placée en $t = 0$, η^0 et η^1 deux fonctions données définies sur $\tilde{F}$ et où β et γ sont des constantes réelles positives qui s'apparentent respectivement à un module de flexibilité et à une masse linéique de la plaque.
La résolution du problème transitoire (1)–(4), étant malheureusement trop complexe, nous allons le considérer comme une perturbation d'un autre problème transitoire dit libre. Ceci revient à représenter $(\varphi\,,\eta)$ par la superposition d'une *onde incidente* $(\tilde{\varphi}\,,\tilde{\eta})$ et d'une *onde diffractée* $(\varphi_D\,,\eta_D)$, que l'on espère plus "simple" à calculer, prenant en compte la présence de la plaque :

$$(\varphi(t)\,,\eta(t)) = (\tilde{\varphi}(t)\,,\tilde{\eta}(t)) + (\varphi_D(t)\,,\eta_D(t))\,. \tag{6}$$

Le choix le plus "naturel" pour obtenir un problème libre consiste à reprendre les équations du problème transitoire initial l'obstacle en moins (β et γ étant nulles) avec les mêmes conditions initiales. Toutefois les déplacements du fluide restreint au domaine de la plaque et ceux de la plaque elle-même n'ayant aucune raison d'être de même nature, nous opterons pour un sytème légèrement différent qui évite de les sommer ($\eta\mathbb{1}_P$ et $\tilde{\eta}\mathbb{1}_P$ bien entendu) :

$$\Delta\tilde{\varphi} = 0 \quad \text{dans } \Omega\,, \tag{7}$$

$$\partial_t^2\tilde{\varphi} + \partial_y\tilde{\varphi} = f \quad \text{sur } \tilde{F}\,, \tag{8}$$

$$\tilde{\eta} = \tilde{\varphi}\mathbb{1}_F\,. \tag{9}$$

On voit en effet avec ce choix que tout a été fait pour éviter de mettre au même niveau deux quantités de nature différente : le déplacement "libre" du fluide restreints à la plaque et celui de la plaque ($\tilde{\eta}\mathbb{1}_P = 0$). On constate alors que notre problème de diffraction s'écrit

$$\Delta\varphi_D = 0 \quad \text{dans } \Omega\,, \tag{10}$$

$$\partial_t^2\eta_D + \partial_y\varphi_D = (f - \partial_y\tilde{\varphi})\mathbb{1}_P \quad \text{sur } \tilde{F}\,, \tag{11}$$

$$-\varphi_D + \eta_D + (\beta\partial_x^4\eta_D - \gamma\partial_y\varphi_D)\mathbb{1}_P = (\tilde{\varphi} + \gamma\partial_y\tilde{\varphi})\mathbb{1}_P \quad \text{sur } \tilde{F}\,, \tag{12}$$

$$\partial_x^2\eta_D = \partial_x^3\eta_D = 0 \quad \text{sur } \partial P\,, \tag{13}$$

et donc que (φ_D ,η_D) est fonction du temps t et des restrictions à la plaque du second membre $f\mathbb{1}_P$ et de l'onde "libre" $\varphi\mathbb{1}_P$.

3 Formulations abstraites

Le choix quelque peu atypique qui consiste à considérer le potentiel des accélérations et non le potentiel des vitesses est orienté par notre volonté d'écrire notre problème transitoire (1)–(4) sous la forme d'une équation des ondes abstraite, *i.e.* d'une équation du second ordre en temps. On peut en effet écrire ce système sous une forme abstraite

$$\partial_t^2\eta + \mathbb{A}\eta = f\,,\ \forall t \in \mathbb{R} \tag{14}$$

où $\mathbb{A}$ est un opérateur positif (spectre de $\mathbb{A}$ inclus dans $\mathbb{R}^+$). Bien entendu, le problème (7)–(9) admet aussi une écriture analogue à (14)

$$\partial_t^2\tilde{\varphi}_{|\tilde{F}} + \tilde{\mathbb{A}}\tilde{\varphi}_{|\tilde{F}} = f\,,\ \forall t \in \mathbb{R} \tag{15}$$

où $\tilde{\mathbb{A}}$ est aussi un opérateur positif.
L'idée consiste à ramener notre problème transitoire en une seule équation posée sur la surface $\tilde{F}$. La démarche essentielle pour accomplir cette tâche est l'introduction d'un relèvement harmonique que nous notons $\mathbb{H}$. Soit donc l'opérateur

$$\mathbb{H} : \eta \mapsto \Psi = \mathbb{H}(\eta)$$

tel que Ψ est solution de

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta\Psi = 0 \quad \text{dans } \Omega\,, \\ \Psi = \eta_F \quad \text{sur } F\,, \\ \Psi + \gamma\partial_y\Psi = \eta_P + \beta\partial_x^4\eta_P \quad \text{sur } P\,, \\ \partial_x^2\eta = \partial_x^3\eta = 0 \quad \text{sur } \partial P\,. \end{array}\right. \tag{16}$$

où $\eta_F := \eta\mathbb{1}_F$ et $\eta_P := \eta\mathbb{1}_P$. Nous constatons alors que le problème transitoire peut s'écrire

$$\begin{aligned} &\partial_t^2\eta + \partial_y\mathbb{H}(\eta) = f \quad \text{sur } \tilde{F}\,,\ \forall t > 0\,, \\ &\varphi = \mathbb{H}(\eta)\,. \end{aligned} \tag{17}$$

De la même manière, le problème libre peut s'écrire

$$\begin{aligned} &\partial_t^2\tilde{\varphi}_{|\tilde{F}} + \partial_y\tilde{\mathbb{H}}(\tilde{\varphi}_{|\tilde{F}}) = f \quad \text{sur } \tilde{F}\,,\ \forall t > 0\,, \\ &\tilde{\varphi} = \tilde{\mathbb{H}}(\tilde{\varphi}_{|\tilde{F}})\,. \end{aligned} \tag{18}$$

où $\tilde{\mathbb{H}}$ représente le relèvement harmonique dans Ω en l'absence de la plaque. Pour conclure, il suffit alors de poser $\mathbb{A} := \partial_y \mathbb{H}$ et $\tilde{\mathbb{A}} := \partial_y \tilde{\mathbb{H}}$.

Il est facile d'obtenir à l'aide de la transformation de Fourier horizontale $\mathcal{F}$ (dans la direction (O,x)) définie par

$$v \mapsto \mathcal{F}v(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\, v(x)\, \mathrm{d}x$$

l'expression suivante de $\tilde{\varphi}_{|\tilde{F}}$ (et donc de $\tilde{\eta}$) solution de (15) :

$$\tilde{\varphi}_{|\tilde{F}}(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\cos(\sqrt{|\xi|}t)\mathcal{F}\eta^0(\xi)\right](x) + \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\sin(\sqrt{|\xi|}t)}{\sqrt{|\xi|}}\mathcal{F}\eta^1(\xi)\right](x) \quad \forall t > 0 \tag{19}$$

ou encore

$$\tilde{\varphi}_{|\tilde{F}}(x,t) = \Re e \int_{\mathbb{R}^+} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}t} \sum_{k=\pm 1} \big(\eta^{(0)}, W_{\lambda,k}\big)\, W_{\lambda,k}(x)\, \mathrm{d}\lambda \quad \forall t > 0 \tag{20}$$

où

$$\eta^{(0)} = \eta^0 + \mathrm{i}\lambda^{-1/2}\eta^1 \quad \text{et} \quad W_{\lambda,k}(x) = \frac{\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{i} k x}}{\sqrt{2\pi}}$$

pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $k = \pm 1$, et $\big(\,\cdot\,,\cdot\,\big)$ note le produit scalaire suivant :

$$\big(v,w\big) := \int_{\mathbb{R}} v(x)\, \overline{w}(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

L'écriture (20) représente en fait la “diagonalisation” de l'opérateur $\tilde{\mathbb{A}}$ sur une “base de fonctions propres *généralisées* $(W_{\lambda,k})$” suivie de la résolution d'une famille d'équations différentielles en temps pour déterminer $\tilde{\varphi}(t)$ sur $\tilde{F}$. Cette expression peut encore s'interpréter sous la forme d'une représentation intégrale

$$\tilde{\varphi}_{|\tilde{F}}(x,t) \;=\; \Re e \int_{\lambda \in \mathbb{R}^+} g(\lambda) \int_{y \in \tilde{F}} Ker_\lambda(x-y)\, \eta^{(0)}(y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}\lambda\,, \tag{21}$$

où la fonction g et le noyau Ker_λ sont définis par

$$g(\lambda) \;=\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{\lambda}t}\,, \tag{22}$$

$$Ker_\lambda(x-y) \;=\; \frac{\cos\big((x-y)\lambda\big)}{\pi}\,. \tag{23}$$

4 Décomposition en modes résonnants

La méthode que nous décrivons dans cette section va nous fournir une représentation de l'onde transitoire diffractée η_D et donc de η à l'aide des fréquences de résonance du problème. Cette représentation s'obtiendra au moyen de la transformée de Laplace et du

"prolongement analytique de la résolvante".
Considérons maintenant la transformée de Laplace $\mathcal{L}\eta(p)$ de $\eta(t)$ définie par

$$\mathcal{L}\eta(p) := \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt}\eta(t)\,\mathrm{d}t\,,\ \forall p \in \mathbb{C} \text{ avec } \Re e(p) > 0\,,$$

et que nous noterons $\hat{\eta}$. En appliquant cette transformée à (14), on obtient

$$(p^2 + \mathbb{A})\hat{\eta} = \mathcal{L}f\,. \tag{24}$$

En apppliquant la transformée de Laplace, nous avons transformé la nature du problème : nous sommes passés du régime transitoire au régime harmonique. En effet, $(\hat{\varphi} := \mathcal{L}\varphi\,, \hat{\eta})$ est solution de

$$\begin{aligned}
&\Delta\hat{\varphi} = 0 \quad \text{dans } \Omega\,,\\
&p^2\hat{\eta} + \partial_y\hat{\varphi} = \mathcal{L}f \quad \text{sur } \tilde{F}\,,\\
&-\hat{\varphi} + \hat{\eta} + (\beta\partial_x^4\hat{\eta} - \gamma\partial_y\hat{\varphi})\mathbb{1}_P = 0 \quad \text{sur } \tilde{F}\,,\\
&\partial_x^2\hat{\eta} = \partial_x^3\eta = 0 \quad \text{sur } \partial P\,.
\end{aligned}$$

Posons $\hat{f} := \mathcal{L}f$, alors $\hat{\eta}(p) = R(-p^2)\hat{f}$, où $R(\zeta) := (\mathbb{A} - \zeta\mathbb{I})^{-1}$ est dénommé la résolvante de $\mathbb{A}$ et est défini en dehors du spectre de $\mathbb{A}$: $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$.
Il suffit alors d'appliquer la transformée de Laplace inverse pour en déduire

$$\eta(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{p_0+\mathrm{i}\mathbb{R}} \mathrm{e}^{pt} R(-p^2)\hat{f}\,\mathrm{d}p\,,\ \forall p_0 > 0\,. \tag{25}$$

Notons que si $p_0 > 0$ et $p \in p_0 + \mathrm{i}\mathbb{R}$, alors $-p^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ et donc la formule précédente (25) est indépendante du choix de $p_0 > 0$ étant donnée l'analyticité de $R(\zeta)$ dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$.
La décomposition en modes résonnants consiste alors à déformer le chemin d'intégration $p_0 + \mathrm{i}\mathbb{R}$ dans l'expression (25) vers le demi-plan $p_0 < 0$ et à utiliser le théorème des résidus. Pour ce faire, il nous faut commencer par isoler la "composante incidente" de $R(\zeta)$ que nous connaissons *a priori*, ce qui revient à représenter $\hat{\eta}$ par la superposition d'une *onde incidente* $\mathcal{L}\tilde{\eta} := \hat{\eta}_I$ (que nous indiçons I pour ne pas surcharger les notations) et d'une *onde diffractée* $\mathcal{L}\eta_D := \hat{\eta}_D$:

$$\hat{\eta}(p) = \hat{\eta}_I(p) + \hat{\eta}_D(p)\,. \tag{26}$$

D'un point de vue opérateur, cela revient à écrire

$$R(-p^2) = \mathbb{1}_F\tilde{R}(-p^2) + D(-p^2) \tag{27}$$

où $\tilde{R}(\zeta) := (\tilde{\mathbb{A}} - \zeta\mathbb{I})^{-1}$ est défini pour tout $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ et est la résolvante du problème libre (15). L'onde incidente

$$\tilde{\eta}(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{p_0+\mathrm{i}\mathbb{R}} \mathrm{e}^{pt}\mathbb{1}_F\tilde{R}(-p^2)\hat{f}\,\mathrm{d}p\,,\ \forall p_0 > 0$$

est en effet connue analytiquement (19). Il s'agit alors d'obtenir le comportement asymptotique en temps de l'onde diffractée

$$\eta_D(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{p_0+\mathrm{i}\mathbb{R}} \mathrm{e}^{pt} D(-p^2) \hat{f} \, \mathrm{d}p \,, \; \forall p_0 > 0$$

en utilisant un résultat abstrait que nous ne développerons pas ici, on montre que $D(\cdot)$ possède un prolongement méromorphe dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, autrement dit analytique sauf au voisinage de pôles isolés, les résonances, et d'une "coupure" située sur $\mathbb{R}^-$.
Ainsi si nous supposons que le contour d'intégration correspondant à la déformation du chemin n'a pas de contribution à l'infini ($p = \infty$), que les pôles sont simples, *i.e.* $D(-p^2)$ admet le développement en série de Laurent suivant près de chacun de ses pôles p_k

$$D(-p^2) = \sum_{n \geq -1} (p - p_k)^n D_k^{(n)} \,,$$

alors pour $p_0 < 0$, on aura

$$\eta_D(t) = \eta_{\text{pôles}}(t) + \eta_{\text{cut}}(t) + \eta_{\text{reste}}(t)$$

où $\eta_{\text{pôles}}$, η_{cut} et η_{reste} correspondent respectivement à l'intégration autour des pôles, autour de la coupure et le long de la droite $p_0 + \mathrm{i}\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\eta_{\text{pôles}}(t) &= \sum_{p_k \in \{\Re e(p) > p_0\}} \mathrm{e}^{p_k t} D_k^{(-1)} \hat{f}(p_k) \,, \\
\eta_{\text{cut}}(t) &= \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \oint_{\text{cut} \cap \{\Re e(p) > p_0\}} \mathrm{e}^{pt} D(-p^2) \hat{f} \, \mathrm{d}p \,, \\
\eta_{\text{reste}}(t) &= O(\mathrm{e}^{p_0 t}) \quad \text{quand} \quad t \to +\infty \,.
\end{aligned}$$

La composante $\eta_{\text{pôles}}$ représente une superposition de modes exponentiellement amortis :

$$D_k^{(-1)} = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\odot_k} D(-p^2) \mathrm{d}p$$

où $\int_{\odot_k}$ note l'intégrale sur un chemin fermé ne contenant qu'un seul pôle indicé par k *i.e.* p_k. La composante η_{cut} correspond à une contribution basse fréquence de l'onde. Enfin η_{reste} étant plus rapidement amortie que chacun des termes de $\eta_{\text{pôles}}$, elle sera négligée en pratique, à condition de choisir p_0 suffisamment petit ($p_0 < 0$).

5 Vers le numérique

Le couplage des équations de la dynamique de la plaque et de l'hydrodynamique qui ne transparaît pas clairement dans l'expression (27) ou (26) nous incite à quelques artifices de calcul. En effet, les systèmes d'équations des trois problèmes que nous considérons (*total* (1)–(4), *incident* (7)–(9) et *diffracté* (10)–(13)) montrent clairement la nécessité pour la résolution numérique d'introduire de nouvelles variables. Introduisons l'opérateur $\mathbb{T}_r$ défini par

$$\mathbb{T}_r : \hat{\eta} \mapsto \mathbb{H}(\hat{\eta})_{|\tilde{F}} \,.$$

On vérifie que $\mathbb{H}(\hat{\eta})$ et $\tilde{\mathbb{H}}(\mathbb{T}_r\hat{\eta})$ satisfont les mêmes équations (16). Par conséquent,

$$\mathbb{H}(\hat{\eta}) = \tilde{\mathbb{H}}(\mathbb{T}_r\hat{\eta})$$

et on en déduit la relation suivante entre les résolvantes

$$\begin{aligned} &\mathbb{T}_r R(\zeta) = \tilde{R}(\zeta) + S(\zeta) \\ &\text{avec } S(\zeta) := \zeta \tilde{R}(\zeta)\{\mathbb{I} - \mathbb{T}_r\}R(\zeta)\,. \end{aligned} \tag{28}$$

car

$$\begin{aligned} \hat{\eta} := R(\zeta)\hat{f} \quad &\Leftrightarrow \quad (\mathbb{A} - \zeta)\hat{\eta} = \hat{f} \\ &\Rightarrow \quad (\tilde{\mathbb{A}} - \zeta)\mathbb{T}_r\hat{\eta} = (\mathbb{A} - \zeta\mathbb{T}_r)\hat{\eta} = \hat{f} + \zeta(\hat{\eta} - \mathbb{T}_r\hat{\eta}) \\ &\Leftrightarrow \quad \mathbb{T}_r\hat{\eta} = \tilde{R}(\zeta)\left[\hat{f} + \zeta(\hat{\eta} - \mathbb{T}_r\hat{\eta})\right] \end{aligned}$$

On constate alors que l'écriture (28) ne correspond pas tout à fait à la décomposition préconisée en (27). En effet, notre situation nécessite une écriture adaptée pour tenir compte du couplage. Nous allons donc considérer le schéma suivant (avec de nouvelles inconnues)

$$\left\| \underbrace{\begin{matrix} \hat{\phi} := \mathbb{T}_r\hat{\eta} \;\; \text{avec } \hat{\phi}_{|F} = \hat{\eta}_F \\ \hat{\eta} = (\hat{\eta}_F\,,\hat{\eta}_P) := R(\zeta)\hat{f} \end{matrix}}_{\text{onde totale}\,:\,(\hat{\phi}\,,\hat{\eta})} \right\| \underbrace{\begin{matrix} \hat{\phi}_I := \tilde{R}(\zeta)\hat{f} \\ \hat{\eta}_I := (\hat{\phi}_{I_{|F}},0) \end{matrix}}_{\text{onde incidente}\,:\,(\hat{\phi}_I\,,\hat{\eta}_I)} \left\| \underbrace{\begin{matrix} \hat{\phi}_D := \hat{\phi} - \hat{\phi}_I \\ \hat{\eta}_D := \hat{\eta} - \hat{\eta}_I = (\hat{\phi}_{D_{|F}}\,,\hat{\eta}_P) \end{matrix}}_{\text{onde diffractée}\,:\,(\hat{\phi}_D\,,\hat{\eta}_D)} \right.$$

Ce qui revient à considérer la relation

$$\boldsymbol{R}(\zeta) = \tilde{\boldsymbol{R}}(\zeta) + \boldsymbol{S}(\zeta) \tag{29}$$

où les opérateurs précités sont définis par

$$\boldsymbol{R}(\zeta) := \begin{pmatrix} \mathbb{T}_r R(\zeta) \\ R(\zeta) \end{pmatrix}, \; \tilde{\boldsymbol{R}}(\zeta) := \begin{pmatrix} \tilde{R}(\zeta) \\ \mathbb{1}_F \tilde{R}(\zeta) \end{pmatrix} \text{ et } \; \boldsymbol{S}(\zeta) = \begin{pmatrix} S(\zeta) \\ D(\zeta) \end{pmatrix}.$$

L'expression (29) particulièrement bien adaptée au traitement numérique comme nous le verrons, va nous fournir le prolongement analytique de η_D à travers celui de l'opérateur $\boldsymbol{S}(\cdot)$:

$$\eta \simeq \tilde{\eta} + \phi_D^{\text{pôles}} + \phi_D^{\text{cut}} \quad \text{sur } F$$

$$\eta \simeq \tilde{0} + \eta_P^{\text{pôles}} + \eta_P^{\text{cut}} \quad \text{sur } P$$

où

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\phi_D^{\mathrm{cut}}\\ \eta_D^{\mathrm{cut}}\end{pmatrix}(t) &= \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\oint_{\mathrm{cut}\cap\{\Re e(p)>p_0\}} \mathrm{e}^{pt}\boldsymbol{S}(-p^2)\begin{pmatrix}\hat{f}\\ \hat{f}\end{pmatrix}(p)\,\mathrm{d}p\,,\\
\begin{pmatrix}\phi_D^{\text{pôles}}\\ \eta_D^{\text{pôles}}\end{pmatrix}(t) &= \sum_{p_k\in\{\Re e(p)>p_0\}} \mathrm{e}^{p_k t}\boldsymbol{S}_k^{(-1)}\begin{pmatrix}\hat{f}\\ \hat{f}\end{pmatrix}(p_k)\,.
\end{aligned}$$

5.1 Prolongement analytique de la résolvante et résonances

La méthode permettant l'obtention du prolongement analytique de la résolvante consiste à user de manière cruciale de la représentation intégrale de la résolvante du problème libre (15) (sans démonstration, nous admettrons qu'il suffit dans (21) de prendre $g(\lambda) = 1/(\lambda-\zeta)$:

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(\zeta)\hat{f}(x) &= \int_{\tilde{F}} G_\zeta(x,y)\,\hat{f}(y)\,\mathrm{d}y\,,\\
\text{où } G_\zeta(x,y) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\big((x-y)\lambda\big)}{\lambda-\zeta}\mathrm{d}\lambda\,.
\end{aligned} \tag{30}$$

La fonction G_ζ peut être vue comme la trace sur $\tilde{F}$ de la fonction de Green 2D du problème libre de tenue à la mer (sans la plaque). Cette représentation intégrale conduit à une équation intégrale couplée aux vibrations de la plaque dont l'interprétation variationnelle (du couplage) restreinte en domaine borné permet d'exhiber le prolongement analytique. La détermination des fréquences de résonance se réduit alors à la résolution d'un problème non linéaire de valeurs propres et celle des résidus s'obtient en développant la solution du problème variationnel au voisinage de la fréquence de résonance associée.

5.1.1 Équation intégrale et formulation variationnelle

En utilisant la représentation (30), il découle de (28) le système couplé suivant :

$$\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}_I(x) + \zeta\int_P(\hat{\eta}_P-\hat{\phi})(y)G_\zeta(x,y)\mathrm{d}y\,,\ \forall x\in\tilde{F} \tag{31}$$

$$\mathbb{A}_P\hat{\eta}_P = \hat{\phi}+\gamma(\hat{f}+\zeta\hat{\eta}_P)\quad \text{sur } P\,, \tag{32}$$

où $\mathbb{A}_P := \mathbb{I}_P + \beta\partial_x^4$ est un opérateur auto-adjoint positif. Avec $\hat{\phi}_D$, les équations (31) et (32) deviennent

$$\hat{\phi}_D(x) = -\zeta\int_P\hat{\phi}_I(y)G_\zeta(x,y)\mathrm{d}y + \zeta\int_P(\hat{\eta}_P-\hat{\phi}_D)(y)G_\zeta(x,y)\mathrm{d}y\,,\ \forall x\in\tilde{F} \tag{33}$$

$$\mathbb{A}_P\hat{\eta}_P = \hat{\phi}_D+\gamma(\hat{f}_D+\zeta\hat{\eta}_P)\quad \text{sur } P\,, \tag{34}$$

où

$$\hat{f}_D := \hat{f}+\gamma^{-1}\hat{\phi}_I\,.$$

Nous allons maintenant nous attacher à établir une formulation variationnelle de (33)–(34). Tout d'abord nous admettrons ici que le sytème couplé (33)–(34) peut être restreint au domaine de la plaque ($x \in P$) sans perte d'information sur le domaine extérieur ($x \in F$). En d'autres termes, les problèmes en domaine borné et en domaine non borné sont équivalents. Soit $(\hat{\phi}' ,\hat{\eta}')$ une fonction test. Des équations satisfaites par $(\hat{\phi}_D ,\hat{\eta}_P)$ solution de la restriction de (33)–(34) à la plaque, que nous noterons désormais $(\hat{\phi} ,\hat{\eta})$, on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \boldsymbol{u} = (\hat{\phi} ,\hat{\eta}) \text{ tel que pour tout } \boldsymbol{u}' = (\hat{\phi}' ,\hat{\eta}') \\ a(\boldsymbol{u} ,\boldsymbol{u}') + c_\zeta(\boldsymbol{u} ,\boldsymbol{u}') = l(\boldsymbol{u}') \end{array} \right. \tag{35}$$

avec

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{u} ,\boldsymbol{u}') &= \int_P \hat{\phi}(x)\overline{\hat{\phi}'}(x)\mathrm{d}x + \int_P \mathbb{A}_P^{1/2}\hat{\eta}(x)\mathbb{A}_P^{1/2}\overline{\hat{\eta}'}(x)\mathrm{d}x\,, \\ c_\zeta(\boldsymbol{u} ,\boldsymbol{u}') &= -\zeta \int_{P\times P} (\hat{\eta} - \hat{\phi})(y)G_\zeta(x,y)\overline{\hat{\phi}'}(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x - \int_P (\gamma\zeta\hat{\eta} + \hat{\phi})(x)\overline{\hat{\eta}'}(x)\mathrm{d}x\,, \\ l(\boldsymbol{u}') &= \gamma \int_P \hat{f}_D(x)\overline{\hat{\eta}'}(x)\mathrm{d}x - \zeta \int_{P\times P} \hat{\phi}_I(y)G_\zeta(x,y)\overline{\hat{\phi}'}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,. \end{aligned}$$

Cette formulation variationnelle va nous permettre non seulement d'établir le prolongement analytique que nous recherchons, mais en plus c'est le point de départ d'une discrétisation par éléments finis qui conduit à une approximation numérique.

5.1.2 Les pôles du prolongement analytique

Nous allons montrer comment (35) nous permet de réduire la détermination des fréquences de résonance à un problème aux valeurs propres non linéaire. Considérons les opérateurs bornés $\mathbb{J}$, $\mathbb{K}(\zeta)$, $\mathbb{L}(\hat{\boldsymbol{f}}_D,\zeta)$ associés respectivement aux formes sesquilinéaires $a(\cdot ,\cdot)$ et $c_\zeta(\cdot ,\cdot)$ et à la forme anti-linéaire $l(\cdot)$, où $\hat{\boldsymbol{f}}_D := (\hat{\phi}_I ,\hat{f}_D)$:

$$(\mathbb{J}\boldsymbol{u} ,\boldsymbol{u}') := a(\boldsymbol{u} ,\boldsymbol{u}')\ ,\ (\mathbb{K}(\zeta)\boldsymbol{u} ,\boldsymbol{u}') := c_\zeta(\boldsymbol{u} ,\boldsymbol{u}') \text{ et } (\mathbb{L}(\hat{\boldsymbol{f}}_D,\zeta),\boldsymbol{u}') := l(\boldsymbol{u}')\,,$$

où $\mathbb{J}$ est un opérateur inversible et $\mathbb{K}$ est un opérateur compact. La formulation variationnelle (35) nous permet alors d'écrire

$$\mathcal{A}_\zeta\boldsymbol{u} := (\mathbb{J} + \mathbb{K}(\zeta))\boldsymbol{u} = \mathbb{L}(\hat{\boldsymbol{f}}_D,\zeta)\,.$$

Les opérateurs $\mathcal{A}_\zeta$ formant une famille holomorphe d'opérateurs de Fredholm, on sait par un résultat théorique, que nous n'exposerons pas ici, que les opérateurs $\mathcal{A}_\zeta^{-1} = \mathbb{S}(\zeta)$ forment une famille méromorphe dont les pôles sont les valeurs de ζ pour lesquelles $\mathcal{A}_\zeta$ n'est pas inversible :

$$\mathbb{J} + \mathbb{K}(\zeta) = 0\,.$$

En d'autres termes, d'un point de vue pratique, nous chercherons les pôles comme solutions du problème de point fixe suivant :

$$\begin{array}{c} \text{Trouver } \zeta \text{ solution de} \\ \lambda(\zeta) = -1 \end{array} \tag{36}$$

où $\lambda(\zeta)$ est une valeur propre de l'opérateur $\mathbb{J}^{-1}\mathbb{K}(\zeta)$. Ce qui d'un point de vue variationnel (et donc numérique) s'écrit

$$c_\zeta(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}') = \lambda(\zeta)\, a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}')\,. \tag{37}$$

Remarque 1 *Il est à noter que si* $(\hat{\phi}_D,\hat{\eta}_D) = \boldsymbol{S}(\zeta)\vec{\hat{f}}$*, alors* $(\hat{\phi}_{D_{|P}},\hat{\eta}_{D_{|P}}) = \mathbb{S}(\zeta)\mathbb{L}(\hat{\boldsymbol{f}}_D,\zeta)$*, où* $\vec{\hat{f}}$ *note le vecteur* $(\hat{f},\hat{f})$*. On admettra ici qu'aucune information n'est perdue par ce procédé.*
La prochaine étape va consister à donner une expression explicite de la partie singulière de $\boldsymbol{u}$ solution du problème de diffraction (35) au voisinage d'un pôle (mode résonnant).

5.2 Expression explicite de la partie singulière de $\mathbb{S}$

Nous allons dans ce paragraphe, suivre les résultats de la théorie de la perturbation de Kato [5]. Rappelons que l'on ne considère que des pôles simples. De part la propriété de prolongement de la fonction de Green, les opérateurs $\mathbb{L}(\hat{\boldsymbol{f}}_D,\zeta)$ et $\mathbb{K}(\zeta)$ sont holomorphes au voisinage d'un pôle p. On en déduit que :

$$\mathbb{L}(\hat{\boldsymbol{f}}_D,\zeta) = \sum_{n=0}^{+\infty}(\zeta-p)^n\mathbb{L}^{(n)}$$

$$\mathbb{K}(\zeta) = \mathbb{K} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\zeta-p)^n\mathbb{K}^{(n)}$$

$$\mathbb{S}(\zeta) = (\mathbb{J}+\mathbb{K}(\zeta))^{-1} = \sum_{n=-1}^{+\infty}(\zeta-p)^n\mathbb{S}^{(n)}$$

Ainsi, comme $\boldsymbol{u}(\zeta) = \mathbb{S}(\zeta)\mathbb{L}(\hat{\boldsymbol{f}}_D,\zeta)$, alors

$$\boldsymbol{u}(\zeta) = \sum_{n=-1}^{+\infty}(\zeta-p)^n\boldsymbol{u}^{(n)}$$
$$\text{avec } \boldsymbol{u}^{(-1)} = \mathbb{S}^{(-1)}\mathbb{L}^{(0)}\,.$$

Et c'est de ce dernier terme (le résidu) que nous chercherons une expression explicite. Définissons l'opérateur $\mathbb{U}(\zeta) := \mathbb{J}^{-1}\mathbb{K}(\zeta)$ qui au voisinage de p admet le développement

$$\mathbb{U}(\zeta) = \mathbb{U} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\zeta-p)^n\mathbb{U}^{(n)}$$
$$\text{avec } \mathbb{U} := \mathbb{J}^{-1}\mathbb{K} \text{ et } \mathbb{U}^{(n)} := \mathbb{J}^{(-1)}\mathbb{K}^{(n)}\,.$$

Soient $\mu_k(\zeta)$, $k = 1\ldots K$, les valeurs propres de $\mathbb{U}(\zeta)$ pour $\zeta \neq p$ et $\mathbb{P}_k(\zeta)$ les projections spectrales associées. Nous savons alors qu'un pôle p fait de -1 une valeur propre de $\mathbb{U}$. Supposons que

$$\mu_1 \to -1 \text{ quand } \zeta \to p$$

et que $\mathbb{U}(\zeta)$ est diagonalisable au voisinage de p. Alors en notant

$$(\mathbb{J}+\mathbb{K}(\zeta))^{-1}=(\mathbb{I}+\mathbb{U}(\zeta))^{-1}\mathbb{J}^{-1}\,,$$

on peut récrire $\mathbb{S}$ comme suit

$$\mathbb{S}(\zeta)=\mathbb{S}_s(\zeta)+\mathbb{S}_r(\zeta)$$

avec

$$\mathbb{S}_s(\zeta):=\frac{\mathbb{P}_1(\zeta)\mathbb{J}^{-1}}{1+\mu_1(\zeta)} \text{ et } \mathbb{S}_r(\zeta):=\sum_{k=2}^{K}\frac{\mathbb{P}_k(\zeta)\mathbb{J}^{-1}}{1+\mu_k(\zeta)}\,.$$

Bien entendu, $\mathbb{S}_r$ est régulier (holomorphe) au voisinage de p.
Les pôles étant simples, nous savons (voir [5]) que $\mu_1(\zeta)$ et $\mathbb{P}_1(\zeta)$ sont holomorphes au voisinage de $\zeta=p$:

$$\begin{aligned}&\mu_1(\zeta)=-1+(\zeta-p)\mu^{(1)}+O(\zeta-p)\\&\mathbb{P}_1(\zeta)=\mathbb{P}+O(1)\end{aligned}$$

avec

$$\mu^{(1)}=tr[\mathbb{U}^{(1)}\mathbb{P}]$$

où $\mathbb{P}$ est la projection spectrale associée à $\mathbb{U}$. Comme tous les pôles sont simples, on a notamment $\mu^{(1)}\neq 0$ et donc

$$\mathbb{S}_s(\zeta):=\frac{\mathbb{P}\mathbb{J}^{-1}}{(\zeta-p)\mu^{(1)}}+O(1)\,.$$

Soit e_1 le vecteur de base du sous-espace propre associé à la valeur propre -1 :

$$\mathbb{K}e_1=-\mathbb{J}e_1$$

et soit g_1 le vecteur propre adjoint :

$$\mathbb{K}^*g_1=-\mathbb{J}g_1\,,$$

(où $\mathbb{K}^*$ désigne l'adjoint de $\mathbb{K}$) tels que

$$(\mathbb{J}e_1,g_1)=1\,.$$

La projection spectrale $\mathbb{P}$ peut alors s'exprimer

$$\mathbb{P}\boldsymbol{u'}=(\mathbb{J}\boldsymbol{u'},g_1)e_1\,.$$

On en déduit alors que

$$\mu^{(1)}=(\mathbb{J}\mathbb{U}^{(1)}e_1,g_1)=(\mathbb{K}^{(1)}e_1,g_1)$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}^{(-1)}=\mathbb{S}^{(-1)}\mathbb{L}^{(0)} &= \frac{\mathbb{P}\mathbb{J}^{-1}\mathbb{L}^{(0)}}{\mu^{(1)}}\\ &= \frac{(\mathbb{L}^{(0)},g_1)}{(\mathbb{K}^{(1)}e_1,g_1)}\,e_1\,.\end{aligned}$$

6 Mise en œuvre numérique ...

Nous considérons une subdivision $P_N = \{x_k, k = 1,\ldots,N\}$ de la plaque $P = [-1,+1]$ où $-1 = x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = 1$.
Nous choisissons pour la mise en œuvre numérique une discrétisation par éléments finis couplée avec des éléments spectraux qui interviennent dans la diagonalisation de l'opérateur de plaque $\mathbb{A}_P$. Ce qui revient à faire le choix de deux discrétisations différentes. En effet, nous considérons $\mathcal{H}_h$ notre espace de discrétisation constitué des couples $\boldsymbol{u}_h = (\phi_h\,,\eta_h)$ tels que ϕ_h est un polynôme de degré 1 sur chaque intervalle $[x_k,x_{k+1}]$ et que η_h est un élément de l'espace vectoriel $\langle w_{\alpha_i}, i = 1,\ldots,M\rangle$ engendré par la famille des fonctions w_{α_i} appartenant à l'espace vectoriel $\langle \cos(\alpha_i x)\,,\cosh(\alpha_i x)\,,\sin(\alpha_i x)\,,\sinh(\alpha_i x)\rangle$. Les fonctions w_{α_i} sont les fonctions propres de l'opérateur $\mathbb{A}_P$ (d'où l'expression 'éléments spectraux') et forment une famille complète car $\mathbb{A}_P$ est auto-adjoint. Les coefficients α_i sont les solutions positives de l'équation dite de dispersion $\tan^2(\alpha) = \tanh^2(\alpha)$ qui traduit simplement sur les w_{α_i} les conditions au bord de la plaque. Ces coefficients sont reliés aux valeurs propres λ_i (de $\mathbb{A}_P$) par la formule $\lambda_i = \beta{\alpha_i}^4 + 1$.

Soit $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_h$ le produit scalaire de $\mathcal{H}_h$; nous définissons alors les matrices de masse $\mathbb{J}_h$ et de couplage du système $\mathbb{K}_h(\zeta)$ par :

$$\begin{aligned}
(\mathbb{J}_h\boldsymbol{u}_h\,,\boldsymbol{u}'_h)_h &= \int_{-1}^{1}\phi_h(x)\overline{\phi'_h}(x)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1}\mathbb{A}_P^{1/2}\eta_h(x)\mathbb{A}_P^{1/2}\overline{\eta'_h}(x)\mathrm{d}x\,,\\
(\mathbb{K}_h(\zeta)\boldsymbol{u}_h\,,\boldsymbol{u}'_h)_h &= -\int_{-1}^{1}(\gamma\zeta\eta_h + \phi_h)(x)\overline{\eta'_h}(x)\mathrm{d}x\\
&\quad -\zeta\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(\eta_h - \phi_h)(y)G_\zeta(x,y)\overline{\phi'_h}(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

La réponse approchée du système est alors la solution du problème linéaire

$$(\mathbb{J}_h + \mathbb{K}_h(\zeta))\boldsymbol{u}_h = \mathbb{L}_h(\zeta)$$

où le second membre $\mathbb{L}_h(\zeta)$ est défini, en posant f_h et ϕ_h^I les projections sur la base éléments finis des fonctions $\hat{f}_D$ et $\hat{\phi}_I$, par

$$(\mathbb{L}_h(\zeta)\,,\boldsymbol{u}'_h)_h = \gamma\int_{-1}^{1} f_h(x)\overline{\eta'_h}(x)\mathrm{d}x - \zeta\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\phi_h^I(y)G_\zeta(x,y)\overline{\phi'_h}(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Les différents calculs nécessaires à la construction des matrices et du second membre sont élémentaires hormis ceux faisant intervenir la fonction de Green. En effet, cette dernière impose que l'on soit capable d'en extraire la singularité logarithmique (essentiellement technique cette étape nécessite une formule analytique que nous exposons pas).
Considérons maintenant le problème non linéaire de valeurs propres déduit de (37)

$$\mathbb{K}_h(\zeta)\boldsymbol{u}_h = \lambda_k(\zeta)\mathbb{J}_h\boldsymbol{u}_h\,. \tag{38}$$

Par $\lambda_k(\zeta)$, nous désignons toutes les valeurs propres du problème (38). Une approximation des résonances est alors une solution de l'équation $\lambda_k(\zeta) = -1$. Pour approximer les résonances, nous envisageons dans un premier temps d'en déterminer des valeurs très approchées en calculant grossièrement les racines du déterminant de la matrice $\mathbb{K}_h(\zeta) - \lambda_k(\zeta)\mathbb{J}_h$, qui serviront par la suite de valeurs initiales à une méthode du type puissance inverse qui calculera alors une valeur plus précise des valeurs propres et vecteurs propres à gauche et à droite.

Le calcul des différents résidus requiert entre autre le calcul de $\mathbb{K}_h^{(1)}(\zeta)$ sur lequel nous ne sommes pas encore fixés.

Enfin le calcul de η_{cut} reste pour l'instant le plus gros problème. En effet, un calcul direct reste très coûteux et pas très “intelligent”. Aussi, nous travaillons à une alternative qui permettrait d'obtenir un résultat rapide et suffisamment précis.

Références

[1] C. Hazard and M. Lenoir, *Determination of scattering frequencies for an elastic floating body*, SIAM J. Math. Anal., Vol. 24, No. 6, pp. 1458–1514, 1993.

[2] Christophe Hazard and Marc Lenoir, *Surface Water Waves*, in *Scattering* (Eds.: E.R. Pike and P.C. Sabatier), Academic Press, 2001.

[3] Christophe Hazard, *The Singularity Expansion Method*, in Fifth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave propagation, SIAM, pp. 494–498, 2000.

[4] C. E. Baum, *The Singularity Expansion Method*, in Transient Electromagnetic Fields, Ed. L. B. Felsen, Springer-Verlag, New-York, 2001.

[5] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, New York, 1984.