

8^{èmes} JOURNÉES DE L'HYDRODYNAMIQUE

5, 6, 7 MARS 2001 - NANTES

NOUVELLES TECHNIQUES DE PILOTAGE D'UN BATTEUR SEGMENTE POUR LA GENERATION DE HOULE OBLIQUE

L. BOUDET et J.P. PEROIS^(*)

DCE – Bassin d'essais des carènes
Chaussée du Vexin, 27100 Val de Reuil.

(*) Stagiaire de l'Ecole Centrale de Nantes

Résumé

Le problème étudié est celui de la génération d'une houle multidirectionnelle dans un bassin rectangulaire équipé d'un générateur de houle segmenté sur le côté opposé à la plage. Deux nouvelles techniques sont présentées pour le calcul des mouvements des segments en fonction des caractéristiques de houle désirées ; il s'agit de variantes de la méthode de Dalrymple (1989). Ces méthodes sont comparées numériquement aux techniques (Biesel, Funke et Miles) généralement utilisées sur les moyens d'essais existants. Les résultats présentés montrent que ces nouvelles approches permettent de créer des champs de vagues plus homogènes, et d'accroître la taille de la zone utile.

Summary

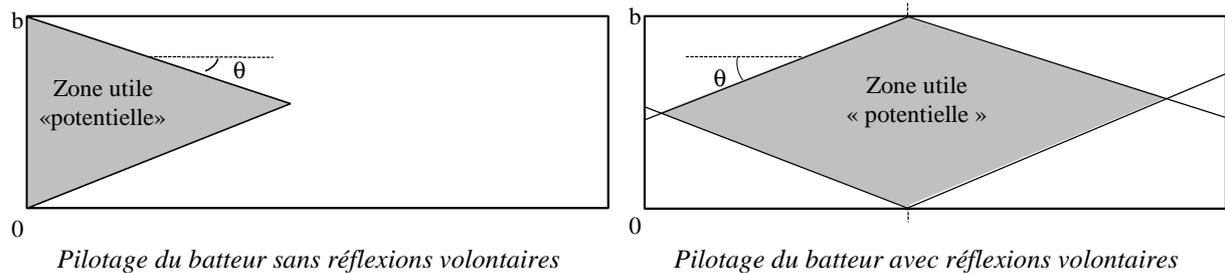
The problem studied is the generation of a directional sea state within a rectangular wave tank equipped with a segmented wavemaker located on one side of the tank. Two new techniques, which are variants of the method developed by Dalrymple (1989), are presented for the computation of the wavemaker motions versus the characteristics of the desired waves. These methods are compared numerically to techniques (Biesel, Funke and Miles) generally used on existing facilities. The results presented show that these new approaches produce more homogeneous wave fields, and provide a significant increase in the size of the usable zone.

1- Introduction

Le problème considéré est celui de la génération d'une houle multidirectionnelle dans un bassin rectangulaire équipé, sur le côté opposé à la plage, d'un générateur de houle segmenté. Une houle multidirectionnelle étant classiquement représentée par la superposition d'un nombre « infini » d'ondes planes monochromatiques, le cas élémentaire à considérer est, dans le cadre de la théorie linéaire, celui de la génération d'une houle régulière oblique au voisinage d'un point donné du bassin.

La technique de pilotage qui reste la plus utilisée sur les cuves à houles multidirectionnelles existantes est celle développée par Biesel (1954) et appelée « Snake Principle » (principe du serpent). L'objet de la communication est de présenter deux nouvelles techniques de pilotage dérivées de la méthode proposée par Dalrymple (1989), et fondées sur une approche potentielle linéarisée. Contrairement à la méthode originale de Dalrymple qui permet de considérer le cas d'un bassin dont le fond est incliné, on ne traite ici que le cas d'un bassin de profondeur d'eau constante.

Ces nouvelles techniques de pilotage peuvent être qualifiées de méthodes « inverses », dans la mesure où elles font appel à un modèle (quasi-analytique) de calcul du champ de vagues pour optimiser les mouvements des segments en fonction des caractéristiques de houle désirées. Elles peuvent être utilisées de deux manières, en exploitant ou non des réflexions volontaires sur l'une des parois latérales du bassin pour augmenter la taille de la zone utile (zone du bassin où la houle est conforme à la consigne).



Géométrie de la zone utile « potentielle » pour une houle d'incidence q

Ces techniques diffèrent principalement par la géométrie de la zone du bassin sur laquelle la houle désirée est imposée, afin d'en déduire le mouvement « optimal » des segments. Avec la méthode de Dalrymple, la houle désirée est imposée sur une ligne parallèle au batteur, et située à une abscisse donnée du batteur, paramétrable. Pour la première variante, la houle est imposée sur un cercle dont la position du centre et le rayon sont paramétrables. Enfin, pour la seconde variante, la houle objective est imposée sur une surface de forme a priori quelconque.

On évoque tout d'abord le problème « direct » qui consiste, pour un mouvement connu du batteur, à évaluer le champ de vagues généré dans le bassin. La méthode présentée est fondée sur une approche simplifiée (approche fréquentielle linéarisée, parois latérales du bassin totalement réfléchissantes, et absorption totale au niveau de la plage) mais elle offre l'avantage de fournir une modélisation analytique du champ de vagues, qui est mise à profit pour résoudre le problème « inverse », c'est à dire l'optimisation des mouvements des segments du batteur en fonction des caractéristiques de la houle de consigne. Par ailleurs, ce modèle permet d'identifier aisément les conditions (géométrie du bassin, conditions de houle) pour lesquelles des phénomènes parasites peuvent se produire.

On rappelle ensuite brièvement le principe de la méthode proposée par Dalrymple, puis on décrit les algorithmes des deux variantes développées. On procède ensuite à des comparaisons numériques des champs de vagues obtenus avec ces 3 techniques, à ceux fournis par des techniques plus anciennes, qui sont encore les plus couramment utilisées à l'heure actuelle : la technique de Biesel – sans réflexions volontaires – et la méthode de Funke et Miles (1987),

inspirée de la méthode de Biesel, mais qui met à profit des réflexions volontaires sur une paroi latérale pour accroître la taille de la zone utile. Les performances respectives des différentes méthodes ont été comparées selon deux principaux critères : l'homogénéité de la houle générée et la taille de la zone utile.

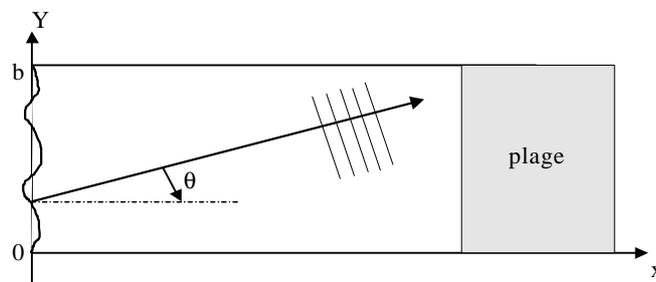
2- Calcul du champ de vagues généré dans le bassin

2.1- Géométrie du bassin

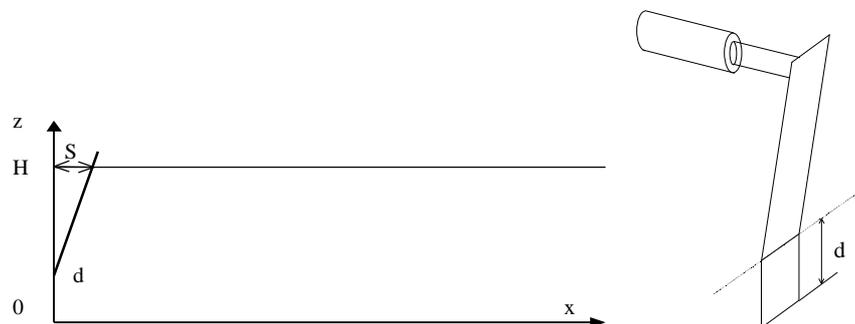
On considère un bassin de largeur b , de hauteur H , muni à une extrémité d'un batteur de houle segmenté, et à l'autre extrémité d'une plage absorbante supposée parfaite (absorption totale des ondes incidentes). Les parois latérales sont supposées totalement réfléchissantes.

Dans un premier temps, on supposera que la largeur des segments est infiniment petite (batteur « continu »). Tous les segments ont une géométrie identique. On considérera par la suite le cas des segments de type « volet », articulés au fond ou à une profondeur (d) intermédiaire. La géométrie considérée est schématisée sur les figures ci-dessous.

Vue de dessus



Vue de côté



2.2- Hypothèses et équations du problème

On se place dans le cadre de la théorie du potentiel linéarisé, et on recherche une solution du problème en régime établi. On considère que le mouvement imposé au batteur est périodique en temps de pulsation ω , ce qui revient en pratique à considérer le cas élémentaire de la génération d'une houle régulière oblique. On peut séparer les variables d'espace et de temps, et exprimer le potentiel de l'écoulement $\Phi(x, y, z, t)$ sous la forme classique:

$$\Phi(x, y, z, t) = \text{Re}\{ \mathbf{j}(x, y, z) e^{-i\omega t} \}$$

où $\mathbf{j}(x, y, z)$ est le potentiel complexe de l'écoulement, et $\text{Re}\{ \}$ désigne la partie réelle.

On est donc ramené au calcul du potentiel complexe $\mathbf{j}(x, y, z)$ qui ne dépend que des variables d'espace.

Contrairement à l'approche de Biesel (batteur infiniment large), le modèle de calcul du champ de vagues utilisé pour la méthode de Dalrymple (ou ses variantes) tient compte de la

présence des parois latérales du bassin. Le problème aux limites satisfait par le potentiel complexe $\mathbf{j}(x, y, z)$ s'écrit :

$\Delta \mathbf{j} = 0$	domaine fluide
$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x} \Big _{x=0} = U(y, z)$	batteur
$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial y} = 0$	murs latéraux ($y = 0$ et $y = b$)
$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial z} \Big _{z=0} = 0$	fond
$g \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial k} + \mathbf{w}^2 \mathbf{j} \Big _{z=H} = 0$	surface libre
+ condition de rayonnement ($x \rightarrow \infty$)	plage

Le domaine étant rectangulaire, on recherche $\mathbf{j}(x, y, z)$ sous la forme :

$$\mathbf{j}(x, y, z) = f(x).g(y).h(z)$$

Le problème aux limites est résolu en décomposant le potentiel complexe de l'écoulement sur des bases de fonctions propres.

2.3 Recherche des fonctions propres

On montre que les seules solutions convenables pour les fonctions $g(y)$ et $h(z)$ sont :

- $g(y) = \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty$
- $\begin{cases} h(z) = \text{ch}(k_0 z) & \text{avec } \mathbf{w}^2 = gk_0 \text{th}(k_0) \\ \text{ou} \\ h(z) = \cos(k_m z) & \text{avec } \mathbf{w}^2 = -gk_m \text{tg}(k_m H), \quad m = 1, 2, \dots, \infty \end{cases}$

Il reste à reporter ces solutions dans l'équation de Laplace pour trouver les fonctions $f(x)$. A ce stade, la condition de rayonnement au niveau de la plage est prise en compte en éliminant les solutions correspondant à des ondes se propageant dans la direction $x < 0$. On examine successivement les cas où $h(z) = \text{ch}(k_0 z)$ et $h(z) = \cos(k_m z)$:

- $\underline{h(z) = \text{ch}(k_0 z)}$:
$$\frac{f''}{f} - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + k_0^2 = 0$$
- Si $k_0 > \frac{n\pi}{b}$ alors $f = e^{Ix}$ avec $I = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$ (solution complexe)
- Si $k_0 < \frac{n\pi}{b}$ alors $f = e^{-Ix}$ avec $I = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k_0^2}$ (solution réelle)

- $\underline{h(z) = \cos(k_m z)} \quad (m = 1, 2, \dots \infty) \quad \frac{f''}{f} - \left(\frac{n\mathbf{P}}{b}\right)^2 - k_m^2 = 0$

alors $f = e^{-I x}$ avec $I = \sqrt{\left(\frac{n\mathbf{P}}{b}\right)^2 + k_m^2}$ (solution réelle)

Bilan : de manière générale, on obtient donc l'expression suivante pour le potentiel de l'écoulement :

$$\mathbf{j}(x, y, z) = ch(k_0 z) \sum_{n=0}^{\infty} a_{0n} \cos(\mathbf{m}_n y) e^{i I_n x} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos(k_m z) \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \cos(\mathbf{m}_n y) e^{-I_{mn} x}$$

avec $\mathbf{m}_n = \frac{n\mathbf{P}}{b}$ et

$$I_n^2 = \begin{cases} k_0^2 - \left(\frac{n\mathbf{P}}{b}\right)^2 & \text{si } k_0 > \frac{n\mathbf{P}}{b} \\ i^2 \left(k_0^2 - \left(\frac{n\mathbf{P}}{b}\right)^2\right) & \text{si } k_0 < \frac{n\mathbf{P}}{b} \end{cases} \quad \text{avec } k_0 \text{ solution de } \mathbf{w}^2 = g k_0 th(k_0 H)$$

$$I_{mn}^2 = k_m^2 + \left(\frac{n\mathbf{P}}{b}\right)^2 \quad \text{avec } k_m \text{ solution de } \mathbf{w}^2 = -g k_m tg(k_m H) \quad m = 1, \dots, \infty$$

Les coefficients complexes a_{0n} ($n=0, \dots, \infty$) et a_{mn} ($m=1, \dots, \infty$; $n=0, \dots, \infty$) sont pour l'instant inconnus. Pour les déterminer, il reste à satisfaire la condition de glissement sur le batteur. Quelle que soit la technique de génération de houle utilisée, on peut exprimer le mouvement du batteur sous la forme générale:

$$X_{\text{batteur}}(y, z) = Re(\tilde{X} e^{i\omega t}) \quad \text{avec } \tilde{X}(y, z) = \mathbf{a}g(z)f(y)$$

La condition de glissement sur le batteur s'écrit :

$$\left. \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x} \right|_{x=0} = ch(k_0 z) \sum_{n=0}^{\infty} i I_n a_{0n} \cos(\mathbf{m}_n y) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\cos(k_m z) \sum_{n=0}^{\infty} -I_{mn} a_{mn} \cos(\mathbf{m}_n y) \right) \\ = U(y, z) = -i\mathbf{w}a g(z)f(y)$$

Les coefficients a_{0n} et a_{mn} sont finalement calculés en utilisant les propriétés d'orthogonalité, d'une part, des fonctions $\cos(\mathbf{m}_n y)$ en y sur $[0, b]$ et, d'autre part, des fonctions $ch(k_0 z)$ et $\cos(k_m z)$ en z sur $[0, H]$:

$$i I_n a_{0n} \int_0^b \cos^2(\mathbf{m}_n y) dy \int_0^H ch^2(k_0 z) dz = -i\mathbf{w}a \int_0^b \cos(\mathbf{m}_n y) f(y) dy \int_0^H ch(k_0 z) g(z) dz \\ -I_{mn} a_{mn} \int_0^b \cos^2(\mathbf{m}_n y) dy \int_0^H \cos^2(k_m z) dz = -i\mathbf{w}a \int_0^b \cos(\mathbf{m}_n y) f(y) dy \int_0^H \cos(k_m z) g(z) dz$$

2.4- Analyse des résultats : ondes progressives ou évanescentes

Les termes en $\cos(k_m z)$ de l'expression du potentiel correspondent tous à des ondes évanescentes. On montre qu'en houle oblique, ces ondes décroissent au moins aussi vite qu'en houle de face ; elles ne posent donc pas de problèmes particuliers pour la génération de houle oblique.

Pour les termes en $ch(k_0 z)$ de l'expression du potentiel, on a affaire soit à des ondes progressives (ondes se propageant vers les $x > 0$), soit à des ondes évanescentes.

- ondes progressives pour $k_0 > \frac{nP}{b}$
- ondes évanescentes pour $k_0 < \frac{nP}{b}$

Un problème est que le coefficient λ_n , correspondant au premier mode évanescent,

$$I_n = \sqrt{\left(\frac{nP}{b}\right)^2 - k_0^2} \quad \text{avec} \quad n = \min \left\{ j \in N / \left(\frac{jP}{b}\right)^2 - k_0^2 > 0 \right\},$$

peut être très petit suivant la valeur du nombre d'onde k_0 (donc de la période de la houle que l'on veut générer). L'onde correspondante va décroître très lentement en x , et c'est donc un mode qu'il vaut mieux éviter de solliciter.

3- Principe de la méthode de Dalrymple

On rappelle brièvement le principe de la technique de pilotage publiée par Dalrymple (1989), en considérant le cas d'un batteur « continu » (segments infiniment étroits) et d'une profondeur d'eau constante. Le principe consiste à déterminer le mouvement du batteur qui, sur une ligne parallèle au batteur située à une abscisse X_d , produit un champ de vagues conforme à la houle de consigne.

Le bassin étant de largeur b finie, on peut décomposer le mouvement du batteur en série de Fourier. Dalrymple exprime ce mouvement sous la forme:

$$X = \text{Re}(\tilde{X} e^{-i\omega t}) \quad \text{avec} \quad \tilde{X} = g(z) \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_n \cos(\mathbf{m}_n y)$$

Pour ne pas générer d'ondes évanescentes à décroissance longitudinale très lente, la série doit être tronquée (au dernier terme correspondant à des ondes progressives) :

$$\tilde{X} = g(z) \sum_{n=0}^{n_0} \mathbf{a}_n \cos(\mathbf{m}_n y) \quad \text{avec} \quad n_0 = E\left(\frac{k_0 b}{P}\right)$$

D'après ce qui précède (paragraphe 2.4), le potentiel de l'écoulement généré ne va comprendre que des modes évanescents à décroissance rapide en x (liés à la différence entre le profil vertical $g(z)$ des segments et la fonction $ch(k_0 z)$) et des ondes progressives. Si la houle de consigne est imposée à une distance suffisamment importante du batteur, on peut simplifier l'expression du potentiel de l'écoulement en ne retenant que la contribution des ondes progressives :

$$\mathbf{j}_{\infty} = ch(k_0 z) \sum_{n=0}^{n_0} a_{0n} \cos(\mathbf{m}_n y) e^{i\lambda_n x}$$

En appliquant la condition de glissement sur le batteur, on peut exprimer les coefficients a_{0n} en fonction des coefficients α_n intervenant dans l'expression du mouvement des segments ; il vient :

$$a_{0n} = -\frac{w}{I_n} G_0(d, H) \mathbf{a}_n$$

où $G_0(d, H)$ est une fonction qui dépend de la géométrie du batteur. Le potentiel de l'écoulement s'exprime maintenant :

$$\mathbf{j}_\infty = ch(k_0 z) \sum_{n=0}^{n_0} \frac{-w}{I_n} G_0(d, H) \mathbf{a}_n \cos(\mathbf{m}_n y) e^{i I_n x}$$

où les coefficients α_n sont pour l'instant inconnus. Pour les déterminer, Dalrymple impose que le potentiel de l'écoulement généré dans le bassin soit identique à celui de la houle de consigne, sur une ligne parallèle au batteur et placée à l'abscisse $x = Xd$. Soit

$$\mathbf{j}_\infty \Big|_{x=Xd} = \frac{ag}{iw} \frac{ch(k_0 z)}{ch(k_0 H)} e^{i k_0 (\cos(\mathbf{q}) Xd + \sin(\mathbf{q}) y)}$$

En tirant encore parti de l'orthogonalité de $\cos(\mathbf{m}_n y)$ sur $(0, b)$, on obtient :

$$\mathbf{a}_n = I_n \frac{ia g}{w^2 ch(k_0 H)} \times \frac{e^{i Xd (k_0 \cos(\mathbf{q}) - I_n)}}{G_0(d, H)} \frac{\int_0^b (e^{i k_0 \sin(\mathbf{q}) y} \cos(\mathbf{m}_n y) dy)}{\int_0^b \cos^2(\mathbf{m}_n y) dy}$$

On constate que cet algorithme met implicitement à profit des réflexions volontaires sur une paroi latérale du bassin lorsque la houle de consigne est imposée à une certaine distance du batteur ($Xd > 0$), ce qui permet d'accroître la taille de la zone utile mais conduit en contrepartie à des débattements plus importants d'une partie des segments. On peut également utiliser cette technique en spécifiant la houle de consigne au niveau du batteur ($Xd = 0$) ; dans ce cas, il n'y a pas de réflexions volontaires sur un mur latéral ce qui entraîne une réduction sensible de la zone utile (la zone utile est également réduite par la présence d'ondes évanescentes au voisinage du batteur) mais les débattements des segments sont plus faibles.

Le seul « défaut » de cette approche est que la houle de consigne est nécessairement respectée, à l'abscisse Xd , sur toute la largeur du bassin, y compris au niveau des murs latéraux. Dans le cas d'incidences de houle assez importantes, cela entraîne une réduction assez sensible de la longueur de la zone utile.

4- Variante n°1 : méthode du « cercle »

Le principe de la méthode du « cercle » consiste à reformuler l'expression du potentiel de l'écoulement en coordonnées polaires, ce qui permet d'imposer la houle de consigne sur un cercle, dont on peut contrôler la position du centre (X_0, Y_0) et le rayon R . Avec cette approche, il n'est donc plus impératif de respecter la houle de consigne au voisinage immédiat des parois latérales.

On considère tout d'abord le cas idéalisé d'un batteur « continu » (segments infiniment étroits), puis le cas concret d'un batteur segmenté.

4.1 Cas du batteur « continu »

Comme pour la méthode de Dalrymple, le mouvement du batteur s'exprime :

$$\tilde{X} = g(z) \sum_{n=0}^{n_0} \mathbf{a}_n \cos(\mathbf{m}_n y) \quad \text{avec} \quad n_0 = E\left(\frac{k_0 b}{P}\right)$$

et le potentiel de l'écoulement généré dans le bassin (champ lointain) :

$$\mathbf{j}_\infty = ch(k_0 z) \sum_{n=0}^{n_0} \frac{-w}{I_n} G_0(d, H) \mathbf{a}_n \cos(\mathbf{m}_n y) e^{i I_n x}$$

On veut que ce potentiel soit conforme à la houle de consigne dont le potentiel est :

$$\mathbf{j} = \frac{ag}{i\mathbf{w}} \frac{ch(k_0 z)}{ch(k_0 H)} e^{ik_0(\cos(\mathbf{q})X + \sin(\mathbf{q})Y)}$$

La houle de consigne est cette fois imposée sur un cercle de rayon R centré en X_0, Y_0 .

$$X = X_0 + R \cos(\mathbf{b}) \quad ; \quad Y = Y_0 + R \sin(\mathbf{b})$$

Ainsi, on cherche à résoudre

$$0 = A(R, \mathbf{b}) = ch(k_0 z) \sum_{n=0}^{n_0} \frac{-\mathbf{w}}{\mathbf{I}_n} G_0(d, H) \mathbf{a}_n \cos[\mathbf{m}_n(Y_0 + R \sin \mathbf{b})] e^{i\mathbf{l}_n(X_0 + R \cos \mathbf{b})} \\ - \frac{ag}{i\mathbf{w}} \frac{ch(k_0 z)}{ch(k_0 H)} e^{ik_0[\cos \mathbf{q}(X_0 + R \cos \mathbf{b}) + \sin \mathbf{q}(Y_0 + R \sin \mathbf{b})]}$$

ou encore:

$$\sum_{n=0}^{n_0} \frac{\mathbf{a}_n}{\mathbf{I}_n} \cos[\mathbf{m}_n(Y_0 + R \sin \mathbf{b})] e^{i\mathbf{l}_n(X_0 + R \cos \mathbf{b})} = \frac{iag}{\mathbf{w}^2 G_0(d, H) ch(k_0 H)} e^{ik_0(X_0 \cos \mathbf{q} + Y_0 \sin \mathbf{q})} e^{ik_0 R \cos(\mathbf{b} - \mathbf{q})}$$

Du fait que $\mathbf{l}_n^2 = k_0^2 - \mathbf{m}_n^2$, on peut introduire l'angle \mathbf{v}_n tel que:

$$\mathbf{l}_n = k_0 \cos(\mathbf{n}_n) \quad \text{et} \quad \mathbf{m}_n = k_0 \sin(\mathbf{n}_n) \quad \text{avec} \quad \mathbf{n}_n = \arcsin\left(\frac{\mathbf{m}_n}{k_0}\right)$$

on a alors:

$$e^{i\mathbf{l}_n R \cos \mathbf{b}} \cos[\mathbf{m}_n(Y_0 + R \sin \mathbf{b})] = \frac{1}{2} \left(e^{i\mathbf{m}_n(Y_0 + R \sin \mathbf{b})} + e^{-i\mathbf{m}_n(Y_0 + R \sin \mathbf{b})} \right) e^{i\mathbf{l}_n R \cos \mathbf{b}} \\ = \frac{1}{2} \left(e^{i\mathbf{m}_n Y_0} e^{ik_0 R \cos(\mathbf{b} - \mathbf{n}_n)} + e^{-i\mathbf{m}_n Y_0} e^{ik_0 R \cos(\mathbf{b} + \mathbf{n}_n)} \right)$$

On introduit la fonction de Bessel de 1^{ère} espèce d'ordre m, notée J_m , et on effectue les développements en série suivants :

$$e^{ik_0 R \cos(\mathbf{b} - \mathbf{n}_n)} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{e}_m i^m J_m(k_0 R) \cos(m(\mathbf{b} - \mathbf{n}_n)) \\ e^{ik_0 R \cos(\mathbf{b} + \mathbf{n}_n)} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{e}_m i^m J_m(k_0 R) \cos(m(\mathbf{b} + \mathbf{n}_n)) \\ e^{ik_0 R \cos(\mathbf{b} - \mathbf{q})} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{e}_m i^m J_m(k_0 R) \cos(m(\mathbf{b} - \mathbf{q}))$$

avec $\begin{cases} \mathbf{e}_0 = 1 \\ \mathbf{e}_m = 2 \quad (m \neq 0) \end{cases}$

Finalement, le calcul des coefficients inconnus α_n nécessite la résolution d'un système à 2m équations ($m = 1, \dots, \infty$) et à $n_0 + 1$ inconnues :

$$\mathbf{e}_m J_m(k_0 R) \left(\sum_{n=0}^{n_0} \frac{\mathbf{a}_n}{\mathbf{I}_n} \cos(\mathbf{m}_n Y_0) e^{i\mathbf{l}_n X_0} \cos(m\mathbf{n}_n) - \frac{iag e^{ik_0(X_0 \cos \mathbf{q} + Y_0 \sin \mathbf{q})}}{\mathbf{w}^2 G_0(d, H) ch(k_0 H)} \cos(m\mathbf{q}) \right) = 0 \\ \mathbf{e}_m J_m(k_0 R) \left(\sum_{n=0}^{n_0} i \frac{\mathbf{a}_n}{\mathbf{I}_n} \sin(\mathbf{m}_n Y_0) e^{i\mathbf{l}_n X_0} \sin(m\mathbf{n}_n) - \frac{iag e^{ik_0(X_0 \cos \mathbf{q} + Y_0 \sin \mathbf{q})}}{\mathbf{w}^2 G_0(d, H) ch(k_0 H)} \sin(m\mathbf{q}) \right) = 0$$

où J_m représente la fonction de Bessel de 1^{ère} espèce d'ordre m.

Etant donné que, pour des valeurs $k_0 R$ pas trop grandes, la fonction de Bessel $J_m(k_0 R)$ tend vers 0 rapidement quand l'ordre m augmente, on s'est tout d'abord contenté de tronquer les séries à l'ordre $m = n_0/2$; on obtient ainsi un système possédant le même nombre d'équations

que d'inconnues. Cependant, cette approche ne s'est pas avérée satisfaisante car elle conduisait, dans certains cas, à des déplacements irréalistes du batteur.

On a donc ajouté des contraintes supplémentaires pour contrôler l'amplitude des déplacements du batteur. La première solution adoptée consiste simplement à tronquer les séries à un ordre m plus élevée, et à résoudre le système surdéterminé au sens des moindres carrés par la méthode de Householder. Cette approche assez « brutale » s'avère relativement efficace en pratique. Une autre méthode, proposée par Molin (1991), consiste à minimiser la fonctionnelle $A(R, \mathbf{b})$ sur une disque de rayon R , au sens des moindres carrés, en ajoutant une fonction « coût » représentative de la puissance dissipée par le batteur. Soit I la fonction à minimiser ; elle s'exprime :

$$I = \int_0^{2p} \int_0^R A(R, \mathbf{b}) A^*(R, \mathbf{b}) R dR d\mathbf{b} + C \int_0^b \left. \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x} \right|_{x=0} \left. \frac{\partial \mathbf{j}^*}{\partial x} \right|_{x=0} dy$$

où le coefficient C en facteur de la seconde intégrale est un coefficient de pondération qui permet de contrôler l'amplitude des mouvements du batteur.

4.2- Cas du batteur segmenté

On aborde maintenant le cas d'intérêt pratique où le batteur est constitué de N_{seg} segments de largeur finie notée B .

On applique une démarche similaire à celle de Biesel (1954) pour étudier ce cas. On appelle $f(\mathbf{a})$ la fonction 1 périodique qui vaut $f(\mathbf{a}) = (\frac{1}{2} - \mathbf{a})$ pour $\mathbf{a} \in [0,1]$ (fonction en dents de scie). On peut alors écrire le mouvement du batteur, dans le cadre de la méthode du cercle (ou de Dalrymple), sous la forme :

$$\tilde{X} = g(z) \sum_{n=0}^{n_0} \mathbf{a}_n \cos(\mathbf{m}_n (y + Bf(\frac{y}{B}))) \quad (z \in [d, H])$$

Chaque fonction $\cos(\mathbf{m}_n \times B \times f(\mathbf{a}))$ étant périodique, elle est décomposable en série de Fourier. Après développement, on obtient :

$$\tilde{X} = g(z) \sum_{n=0}^{n_0} \mathbf{a}_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\mathbf{t}_n)}{\mathbf{t}_n - m\mathbf{p}} \cos((\mathbf{m}_n + \frac{2\mathbf{p}m}{B})y) \quad \text{où} \quad \mathbf{t}_n = \frac{\mathbf{m}_n B}{2}$$

Les seuls termes qui contribuent à la génération d'ondes progressives sont ceux d'indice $m=0$. On présentera plus loin un critère sur la largeur B des segments qui doit être satisfait pour que les termes perturbateurs ($m \neq 0$) n'engendrent que des ondes évanescentes qui décroissent rapidement selon l'axe longitudinal. Par la suite, on supposera ce critère vérifié ; on peut dans ce cas utiliser une expression simplifiée du mouvement du batteur (suppression des termes d'indice $m \neq 0$) :

$$\tilde{X}_{prog} = g(z) \sum_{n=0}^{n_0} \mathbf{a}_n \frac{\sin(\mathbf{t}_n)}{\mathbf{t}_n} \cos(\mathbf{m}_n y)$$

D'après les résultats précédents, on en déduit facilement que le potentiel de l'écoulement résultant (en champ lointain) s'exprime, dans le cas d'un batteur segmenté :

$$\mathbf{j}_\infty = ch(k_0 z) \sum_{n=0}^{n_0} \frac{-\mathbf{w}}{\mathbf{I}_n} G_0(d, H) \frac{\sin \mathbf{t}_n}{\mathbf{t}_n} \mathbf{a}_n \cos(\mathbf{m}_n y) e^{i\mathbf{l}_n x} \quad \text{où} \quad \mathbf{t}_n = \frac{\mathbf{m}_n B}{2}$$

Cette expression est similaire à celle obtenue dans le cas du batteur continu, à un facteur $\sin \mathbf{t}_n / \mathbf{t}_n$ près.

L'application de la méthode du « cercle » au cas des segments de largeur finie est donc immédiate ; il suffit d'introduire le facteur correctif qui apparaît dans l'expression du potentiel. Les équations à résoudre pour calculer les coefficients α_n , qui peuvent être résolues avec les procédures décrites au paragraphe précédent, s'écrivent maintenant :

$$\mathbf{e}_m J_m(k_0 R) \left(\sum_{n=0}^{n_0} \frac{\mathbf{a}_n}{\mathbf{l}_n} \frac{\sin \mathbf{t}_n}{\mathbf{t}_n} \cos(\mathbf{m}_n Y_0) e^{i \mathbf{l}_n X_0} \cos(\mathbf{m} \mathbf{n}_n) - \frac{i a g e^{i k_0 (X_0 \cos \mathbf{q} + Y_0 \sin \mathbf{q})}}{\mathbf{w}^2 G_0(d, H) ch(k_0 H)} \cos(\mathbf{m} \mathbf{q}) \right) = 0$$

$$\mathbf{e}_m J_m(k_0 R) \left(\sum_{n=0}^{n_0} i \frac{\mathbf{a}_n}{\mathbf{l}_n} \frac{\sin \mathbf{t}_n}{\mathbf{t}_n} \sin(\mathbf{m}_n Y_0) e^{i \mathbf{l}_n X_0} \sin(\mathbf{m} \mathbf{n}_n) - \frac{i a g e^{i k_0 (X_0 \cos \mathbf{q} + Y_0 \sin \mathbf{q})}}{\mathbf{w}^2 G_0(d, H) ch(k_0 H)} \sin(\mathbf{m} \mathbf{q}) \right) = 0$$

Si on considère des segments de type volet, l'angle de débattement des segments s'exprime :

$$\mathbf{a}_{seg}(k) = \sum_{n=0}^{n_0} \mathbf{a}_n \cos[\mathbf{m}_n y(k)]$$

où $\mathbf{a}_{seg}(k)$ est l'amplitude complexe de débattement angulaire du segment k , et $y(k)$ la position du milieu de ce segment.

4.3 Ondes parasites liées à la largeur finie des segments

On a montré, au paragraphe précédent, l'expression du déplacement du batteur dans le cas de segments de largeur finie et de la méthode du « cercle » (ou de Dalrymple). En appliquant la condition de glissement sur le batteur, on établit que le potentiel de houle correspondant s'écrit, en omettant les termes (évanescents) en $\cos(k_m z)$:

$$\mathbf{j} = ch(k_0 z) \sum_{n=0}^{n_0} a_{0n} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{\sin(\mathbf{t}_n)}{\mathbf{t}_n - m \mathbf{p}} \cos\left(\left(\mathbf{m}_n + \frac{2 \mathbf{p} m}{B}\right) y\right) e^{i \sqrt{k_0^2 - \left(\mathbf{m}_n + \frac{2 \mathbf{p} m}{B}\right)^2} x}$$

Les termes parasites, liés à la largeur finie des segments, sont ceux correspondant à $m \neq 0$. Pour s'assurer que ces termes évanescents aient une décroissance longitudinale rapide, on impose comme Biesel (1954) que tous ces termes décroissent au moins aussi vite que $e^{-k_0 x}$:

$$k_0^2 - \left(\mathbf{m}_n + m \frac{2 \mathbf{p}}{B}\right)^2 < -k_0^2 \quad \Rightarrow \quad \left|\mathbf{m}_n + m \frac{2 \mathbf{p}}{B}\right| > \sqrt{2} k_0$$

On montre que le terme le plus défavorable correspond aux indices n_0 et $m=-1$. On aboutit finalement au critère suivant pour la largeur B des segments :

$$B < \frac{2 \mathbf{p}}{\sqrt{2} k_0 + \mathbf{m}_{n_0}}$$

On notera que ce critère est le même pour la méthode originale de Dalrymple. Il implique que la largeur des segments doit être d'autant plus faible que l'on veut générer des houles de courte période. Il définit donc une limite d'utilisation à « haute fréquence » du batteur.

5- Variante n°2 : Méthode « Segment by Segment »

Cette technique est encore une variante de la méthode de Dalrymple, bien que sa mise en œuvre soit assez différente. Le principe de la méthode est le suivant :

- tout d'abord, on calcule le champ de vagues induit par le déplacement (unitaire) d'un seul segment, en utilisant l'approche présentée au paragraphe 2. On répète cette procédure pour chacun des segments constituant le batteur ;
- dans un deuxième temps, en faisant varier pour chaque segment l'amplitude et la phase, on cherche à minimiser les erreurs entre le champ de vagues généré et la houle de consigne. Cette minimisation d'erreur est effectuée sur un certain nombre de points répartis sur la surface libre. La géométrie de la surface sur laquelle on place les points de contrôle peut a priori être quelconque.

5.1- Calcul du mouvement des segments

Ainsi, on impose un mouvement élémentaire de la forme:

$$X^k(y) = \begin{cases} g(z) & \text{si } y \in [(k-1)B, kB] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

k étant le numéro du seul segment en mouvement. On note \mathbf{j}^k le potentiel de l'écoulement correspondant. Si on considère uniquement les ondes progressives, il s'exprime :

$$\mathbf{j}^k = ch(k_0 z) \sum_{n=0}^{n_0} a_{0n}^k \cos(\mathbf{m}_n y) e^{i l_n x} \quad \text{avec} \quad a_{0n}^k = -\frac{\mathbf{w}}{I_n} G_0(d, H) \left(\frac{\int_0^{kB} \cos(\mathbf{m}_n y) dy}{\int_0^{(k-1)B} \cos^2(\mathbf{m}_n y) dy} \right)$$

après calcul des intégrales en y , on obtient :

$$a_{00}^k = -\frac{\mathbf{w}}{I_n} G_0(d, H) \frac{B}{b} \quad \text{et} \quad a_{0n}^k = -\frac{\mathbf{w}}{I_n} G_0(d, H) \frac{2}{b \mathbf{m}_n} [\sin(kB \mathbf{m}_n) - \sin((k-1)B \mathbf{m}_n)]$$

Le mouvement général du batteur s'exprime :

$$\tilde{X} = \sum_{k=1}^{nseg} \mathbf{a}_k X^k(y, z)$$

et le potentiel correspondant :

$$\mathbf{j} = \sum_{k=1}^{nseg} \mathbf{a}_k \mathbf{j}^k = \sum_{k=1}^{nseg} \mathbf{a}_k ch(k_0 z) \sum_{n=0}^{n_0} a_{0n}^k \cos(\mathbf{m}_n y) e^{i l_n x}$$

On impose que ce potentiel soit conforme à la houle de consigne en un certain nombre de points (X_j, Y_j) répartis sur la surface libre, ce qui conduit à résoudre le système suivant:

$$[U](\mathbf{a}) = (\mathbf{v}) \quad \text{avec} \quad [U] = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & u_{jk} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}; \quad (\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \cdot \\ \mathbf{a}_k \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}; \quad (\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \cdot \\ v_j \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \quad \text{et}$$

$$\text{où} \quad u_{jk} = ch(k_0 z) \sum_{n=0}^{n_0} (a_{0n}^k \cos(\mathbf{m}_n Y_j) e^{i l_n X_j}) \quad \text{et} \quad v_j = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{g}}{i \mathbf{w} ch(k_0 H)} e^{i k_0 (\cos(\mathbf{q}) X_j + \sin(\mathbf{q}) Y_j)}$$

En pratique, on utilise un nombre de points de contrôle supérieur au nombre d'inconnues ; le système est résolu, comme pour la méthode du cercle, au sens des moindres carrés par la méthode de Householder. Les premiers tests numériques effectués ont montré que, suivant la position et le nombre de points de contrôle, on peut obtenir des débattements de segments excessifs. Là encore, le problème a été résolu de façon assez simple, en introduisant des équations supplémentaires. Ainsi on résout le système suivant :

$$\begin{bmatrix} [U] \\ [cI] \end{bmatrix} \times \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ 0 \end{bmatrix}$$

où le coefficient c est ajusté par dichotomie pour limiter l'amplitude de débattement des segments (plus on augmente la valeur du coefficient λ , plus on limite le débattement des segments).

On notera que cette technique peut être utilisée, comme les précédentes, avec ou sans réflexions volontaires sur une paroi latérale du bassin. Le critère concernant la largeur maximale B des segments, établi au paragraphe 4.2, est également applicable pour cette technique.

5.2- Choix des points de contrôle sur la surface libre

On a vu que, pour une houle d'incidence θ , et compte tenu des phénomènes de réflexion sur les murs latéraux, la zone utile « potentielle » a une forme triangulaire (pilotage du batteur sans réflexions volontaires) ou une forme de losange (réflexions volontaires). Il faut donc positionner les points de contrôle dans cette zone.

En pratique, la procédure de calcul des mouvements des segments a été automatisée en répartissant les points de contrôle dans une surface elliptique, contenue à l'intérieur du losange et tangente à celui-ci.

Soit α le demi-axe longitudinal de l'ellipse tangente au losange, et β le demi-axe latéral :

$$a = \frac{b \cos \mathbf{g}}{2 \operatorname{tg} \mathbf{q}} \quad , \quad b = -\frac{b}{2} \sin \mathbf{g} \quad \text{avec} \quad \mathbf{g} = \operatorname{tg}^{-1} \left(-\frac{1}{Al \operatorname{tg} \mathbf{q}} \right)$$

où $Al = \alpha / \beta$ est l'allongement de l'ellipse.

Les tests numériques effectués ont montré qu'il était dans certains cas nécessaire de réduire la taille de l'ellipse, notamment pour les houles de forte incidence. On a donc introduit un facteur supplémentaire pour réduire les axes de l'ellipse.

A priori, le contrôle de l'allongement de l'ellipse peut permettre d'adapter la forme de la zone utile au type d'essai à effectuer : un faible allongement pour un essai au point fixe, et un grand allongement pour un essai avec vitesse d'avance afin d'augmenter la longueur utile.

6- Comparaisons numériques des méthodes

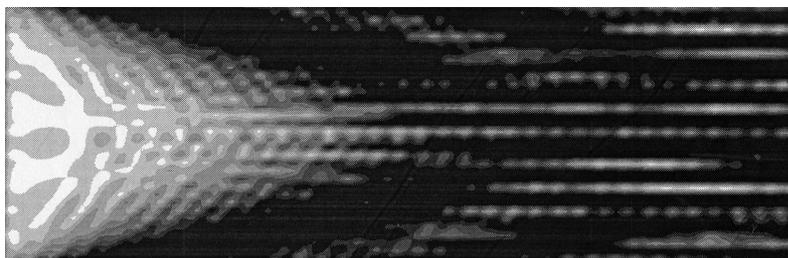
Pour ces comparaisons, on a considéré la géométrie de la nouvelle cuve à houle du Bassin d'essais des carènes, équipée d'un générateur de houle segmenté sur un petit côté du bassin. Ce bassin a des dimensions relativement modestes : longueur 32 m, largeur 10 m, et profondeur d'eau variable de 0.4 à 2.7 m. Le batteur, à dos sec, est composé de 24 segments de type « volet », dont les axes de rotation sont situés 1.8 m sous la surface libre.

Les champs de vagues ont été évalués à l'aide du modèle présenté au paragraphe 2 ; les résultats présentés prennent en compte la contribution de l'ensemble des modes évanescents, y compris ceux liés à la largeur finie des segments.

6.1- Méthodes de Biesel et de Funke-Miles

On présente sur la figure 1 des résultats obtenus respectivement avec les techniques de pilotage de Biesel (1954) et de Funke et Miles (1987), dans le cas d'un batteur « continu », et pour la même consigne de houle ($\omega = 9.5 \text{ rad/s}$, $\theta = 20^\circ$).

« Biesel »



« Funke & Miles »
(Distance $X_d = 10\text{m}$)

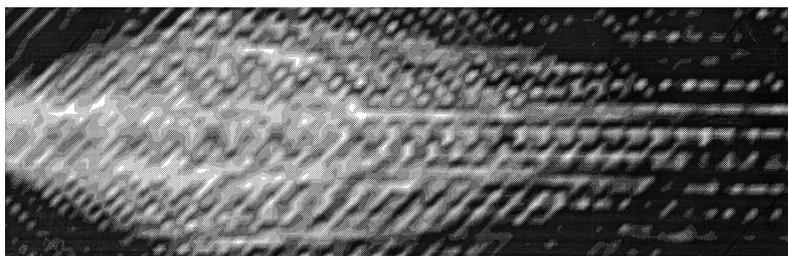


Figure 1 : Erreur entre houle générée et consigne (Biesel – Funke & Miles)

Ces figures montrent le module de l'erreur entre la houle de consigne et le champ de vagues généré dans le bassin ; les zones blanches correspondent à une erreur maximale de 5%. Le batteur est situé sur le côté gauche. On observe que la zone utile obtenue avec la méthode de Biesel a effectivement une forme triangulaire, mais le champ de vagues généré a une homogénéité assez moyenne. Dans le cas de la méthode de Funke et Miles, où des réflexions volontaires sont exploitées, la surface de la zone utile est bien augmentée mais l'homogénéité de la houle est faible. Dans les deux cas, des phénomènes de diffraction sont à l'origine de cette faible homogénéité de la houle.

6.2- Méthode de Dalrymple et variantes

Sur la figure 2, on compare la méthode de Dalrymple et les deux variantes développées, pour une houle de 0.8 sec, une incidence de 20° et une abscisse du centre de la zone utile à $X_d=10\text{m}$ (pilotage du batteur avec réflexions volontaires). Les résultats sont présentés pour le cas du batteur segmenté (24 segments sur 10m) ; la période de 0.8 sec est la période minimale pour laquelle le critère théorique sur la largeur des segments (paragraphe 4.3) est vérifié.

Ces 3 techniques permettent d'améliorer nettement l'homogénéité de la houle dans la zone utile. On constate par ailleurs que les deux variantes de la méthode originale de Dalrymple permettent d'augmenter assez sensiblement l'étendue longitudinale de la zone utile.

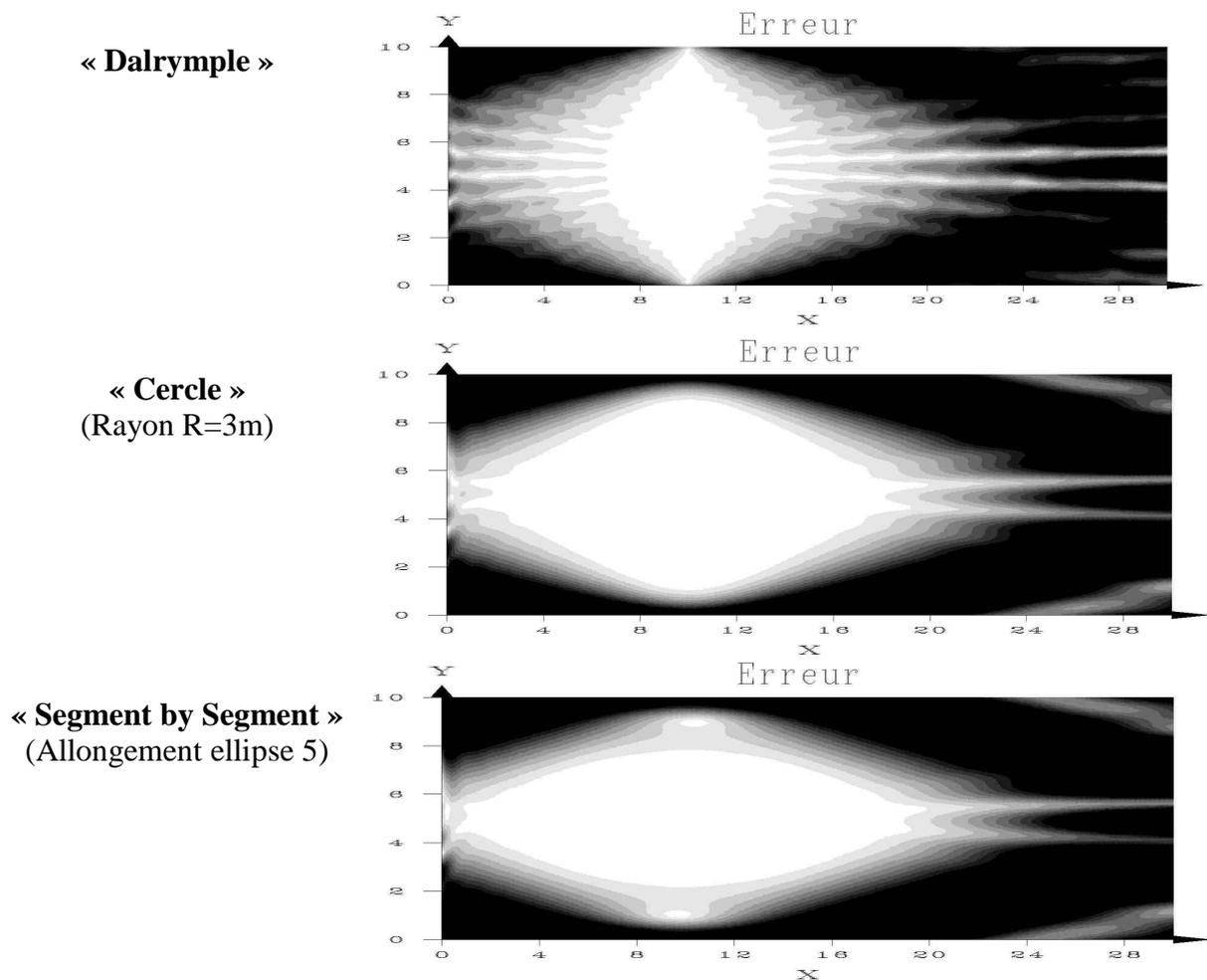


Figure 2 : Erreur entre houle générée et consigne ($T=0.8\text{s}$, $q=20^\circ$, $X_d=10\text{m}$)

Sur la figure 3, on compare les déplacements des segments, à différents instants, pour une même consigne de houle et pour trois techniques de pilotage (avec réflexions volontaires). On

constate que les mouvements des segments sont beaucoup plus réguliers avec les méthodes de Dalrymple ou du « cercle ». Dans le cas de la méthode de Funke et Miles, on distingue clairement trois zones de fonctionnement différentes du batteur, avec des discontinuités marquées entre ces zones, ce qui explique certainement la faible homogénéité du champ de vagues résultant.

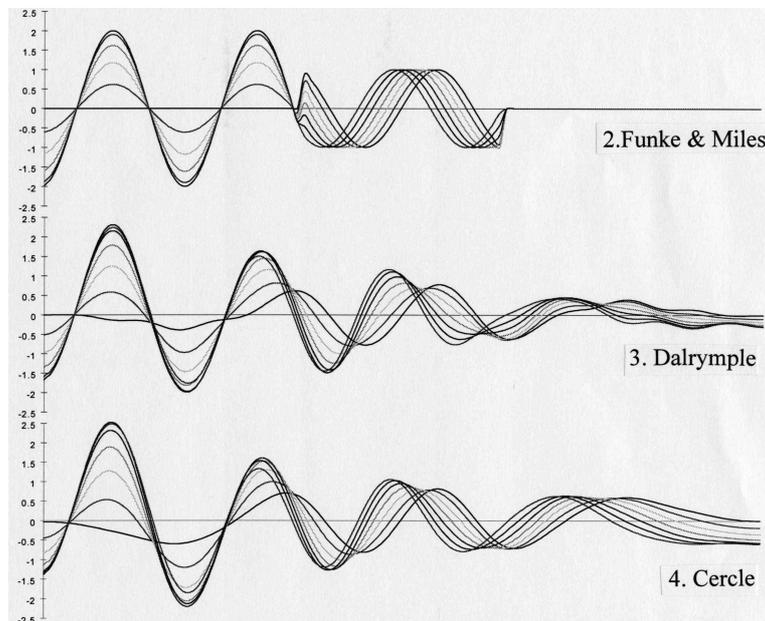


Figure 3 : Mouvements du batteur (Funke & Miles, Dalrymple et « Cercle »)

7- Conclusions

Sur la base des travaux théoriques et numériques réalisés, il semble que la méthode de Dalrymple et les deux variantes développées soient plus performantes que les méthodes de Biesel ou de Funke et Miles. Elles permettent d'obtenir une zone utile plus étendue et, surtout, une meilleure homogénéité spatiale de la houle générée.

Sur le plan pratique, les méthodes de Dalrymple et du « cercle » sont assez simples à intégrer dans un logiciel de commande d'un batteur segmenté ; en revanche, la seconde variante (« Segment by Segment »), dans la version présentée ici, manque probablement de « robustesse » en raison du nombre de paramètres plus important à gérer pour la répartition des points de contrôle sur la surface libre. La méthode du « cercle » semble a priori la méthode la plus attractive : elle permet d'obtenir une zone utile plus étendue que la méthode de Dalrymple, avec un niveau de complexité raisonnable pour une utilisation industrielle.

8- Références

BIESEL F., 1954, « *Wave Machines* », Proceedings of the 1st Conference on Ships and Waves, Octobre 1954

DALRYMPLE R.A., 1989, « *Directional Wavemaker Theory With Sidewall Reflection* », Journal of Hydraulic Research, Vol. 27, 1989, n°1

FUNKE E.R. & MILES M.D., 1987, « *Multi-Directional Wave Generation With Corner Reflectors* », Rapport technique du National Research Council, Canada.

MOLIN B., 1991, « *Génération de houle multidirectionnelle dans un bassin rectangulaire – application à une petite cuve à houle* », Rapport du Bassin d'essais des carènes réf. E2403/4.

