

8^{èmes} JOURNÉES DE L'HYDRODYNAMIQUE

5, 6, 7 MARS 2001 - NANTES

Solution semi-analytique du problème de l'écoulement autour d'une demi-sphère avançant sur la surface libre

L. DIEBOLD et X.B. CHEN

Bureau Veritas, DTA, 17bis, Place des Reflets, 92000 Courbevoie, France
Fax: 01-4291.3395, Email: xiao-bo.chen@bureauveritas.com

M. GUILBAUD

Laboratoire d'Etudes Aérodynamiques, CNRS UMR 6609, 43, rue de l'aérodrome
86036 Poitiers, France
Fax: 05-4953.7001, Email: guilbaud@univ-poitiers.fr

Résumé

Nous présentons ici une méthode semi-analytique pour résoudre le problème de l'écoulement autour d'une demi-sphère avançant sur la surface libre. Le cas de Neumann-Kelvin est considéré car il présente les mêmes difficultés théoriques que le cas de la tenue à la mer avec vitesse d'avance tout en étant plus simple de présentation. A la lumière des travaux réalisés par Wu et Eatock Taylor (1988), nous utilisons la représentation du potentiel de l'écoulement par une série faisant intervenir les fonctions de Legendre. Les équations intégrales pour déterminer les coefficients de la série sont établies en appliquant la méthode de Galerkin. Les coefficients d'influence dans les équations intégrales sont évalués en utilisant la méthode de la fonction de Green *intégrée* développée dans Chen et Noblesse (1998).

Abstract

A hemisphere advancing on the free surface at constant forward speed is analyzed by linearized potential theory. A mixed formulation is used. The potential over the hemisphere is expanded into a series of Legendre functions by extension of the method used by Wu (1988). A Galerkin method is used to build the linear system to solve. The coefficients are calculated by using the *integrated* Green function (super Green function) method.

1 - Introduction

La solution du problème de diffraction-radiation d'un corps flottant animé d'une vitesse d'avance est d'une importance majeure dans la pratique, notamment pour les navires rapides, pour la maîtrise du comportement dynamique du navire et le calcul des efforts exercés par la houle. Ce problème de la tenue à la mer avec vitesse d'avance a donc été l'objet de nombreuses études théoriques et de développements numériques. La méthode des tranches développée par Korvin-Kroukowsky (1955) est le premier modèle numérique fondé sur une approximation bi-dimensionnelle de l'écoulement exploitant l'élanement des navires conventionnels (Salvesen, Tuck et Faltinsen 1970). Depuis, des efforts importants ont été consacrés au développement des modèles tri-dimensionnels qui sont fort semblables et tous fondés sur la méthode des singularités utilisant la fonction de Green associée à la condition de surface libre linéarisée (Chang 1977, Guével et Bougis 1982, Inglis et Price 1982, Wu et Eatock Taylor 1989, Iwashita et Ohkusu 1992 et Ba et Guilbaud 1995). Or, ces méthodes de singularités souffrent de difficultés fondamentales associées à l'évaluation numérique de la fonction de Green et de ses dérivées, et à l'intégration de ces fonctions sur des facettes et le long des segments de ligne de flottaison. Les travaux récents réalisés par Chen (2000) démontrent que la fonction de Green est extrêmement oscillatoire quand le point influencé se situe près de la demi-droite en aval du point source (point influençant). Elle devient singulière lorsque le point source touche la surface libre. Ces difficultés notoires constituent une véritable pierre d'achoppement qui a empêché le développement d'une méthode des singularités fiable et pratique. Le nombre très faible, reconnu insuffisant, de facettes employées et la grande dispersion des résultats obtenus par les différents auteurs illustrent les difficultés numériques rencontrées dans ces méthodes des singularités classiques.

Une autre méthode de résolution du problème de la tenue à la mer formulée récemment par Noblesse, Chen et Yang (1995-1999) adopte l'approche classique de Kochin (1937, 1940) qui consiste à considérer l'écoulement généré par une distribution de singularités. Ainsi, la fonction de Green n'est pas explicitement évaluée dans cette méthode dite de Fourier-Kochin, et les difficultés associées à la singularité complexe de cette fonction et de ses dérivées sont donc évitées. Si cette méthode a eu des succès dans le prolongement lointain d'un écoulement proche (Noblesse, Yang, Löhner et Hendrix 1998), la mise en oeuvre de cette méthode en utilisant la représentation de la carène et la ligne de flottaison par des facettes et des segments n'a pas encore été faite à cause du temps de calcul excessif dans l'évaluation des coefficients d'influence. Afin de réduire le temps d'exécution, une nouvelle méthode fondée sur les nouvelles formulations de la fonction de Green (Chen, 1999) et la représentation de la carène par des panneaux quadratiques a été récemment développée par Chen, Diebold et Doutreleau (2000). Cette nouvelle méthode de fonction de Green fournit des résultats très prometteurs. Au cours du développement numérique d'une telle méthode, un élément important consiste à confronter des résultats venant d'une approche indépendante. Les résultats de benchmark obtenus par une méthode analytique ou semi-analytique sont à ce titre les plus facilement exploitables. En effet, les solutions semi-analytiques de Wu (1995) ont été extrêmement utiles pendant le développement de la méthode de fonction de Green. Cependant, seuls les résultats semi-analytiques pour une sphère immergée sont disponibles. La constitution d'une base de résultats de benchmark pour un corps flottant est donc le premier objectif de la présente étude.

Une solution analytique ou semi-analytique du problème de diffraction-radiation avec vitesse d'avance présente, à elle seule, des intérêts d'ordres théorique et pratique. Elle permet de connaître la nature de la solution d'une façon plus profonde puisqu'elle est exprimée sous une forme mathématique dont l'analyse est possible. Dissociée des difficultés numériques présentes dans les modèles numériques, elle donne des résultats dont la convergence et la stabilité sont assurées. Les extensions de résolution des problèmes de la tenue à la mer sont aussi possibles en exploitant cette solution semi-analytique. Nous pensons tout particulièrement à l'étude de l'influence du potentiel stationnaire sur la condition de surface libre. Nous citons aussi la perspective du développement d'une méthode de couplage entre une solution prenant en compte des effets non

linéaires ou/et visqueux dans un domaine proche du corps limité par une surface de contrôle, et une solution potentielle/linéaire semi-analytique dans le domaine extérieur à partir de la surface de contrôle.

Dans cet article, nous présentons une méthode semi-analytique de résolution du problème de Neumann-Kelvin pour une demi-sphère. Nous avons choisi le cas de Neumann-Kelvin pour les raisons suivantes. Tout d'abord, ce problème se présente sous une forme plus simple que celle du problème de la tenue à la mer. Toutefois les difficultés théoriques de ces deux problèmes, liées au comportement singulier et hautement oscillatoire de leur fonction de Green, sont semblables (Chen, 2000). La présente méthode sera donc généralisable au cas de la tenue à la mer pour la demi-sphère. Enfin, nous pourrions comparer facilement nos résultats avec ceux obtenus par les nombreux codes de Neumann-Kelvin existant.

Le problème à résoudre est présenté dans la deuxième section et les grandes lignes de la méthode de résolution le sont dans la troisième. La quatrième section présente en détails la transformation des équations intégrales, via la décomposition du potentiel en série de fonctions de Legendre et l'adoption d'une méthode de Galerkin, en un système linéaire à résoudre. Ce dernier a pour solution les coefficients de la série. Les cinquième et sixième sections sont consacrées aux calculs des coefficients du système. Elles correspondent respectivement aux effets de surface libre et aux singularités de type Rankine suivant en cela la décomposition de la fonction de Green de Neumann-Kelvin. N'ayant pas encore de résultats définitifs, nous nous contenterons de donner des résultats relatifs aux fonctions de spectre.

2 - Formulation du problème

Nous considérons l'écoulement autour d'une demi-sphère flottante dont le rayon est r_0 , animée d'une vitesse d'avance U . Nous définissons un système de coordonnées Cartésiennes (O, x, y, z) et un système de coordonnées sphériques (O, r, θ, β) . Ces deux systèmes de coordonnées présentés sur la figure 1 sont associés par la relation suivante

$$x = r \sin \theta \cos \beta, \quad y = r \sin \theta \sin \beta, \quad z = -r \cos \theta \quad (1)$$

pour $0 \leq \theta \leq \pi/2$ and $0 \leq \beta \leq 2\pi$.

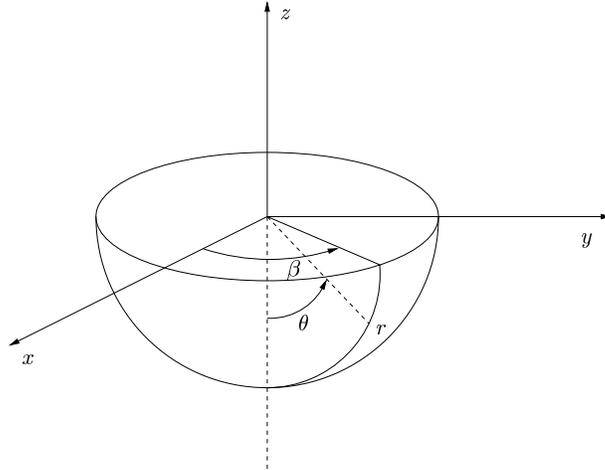


Figure 1: Définition des systèmes de coordonnées

En admettant les hypothèses de fluide parfait, d'écoulement irrotationnel et de faibles perturbations, nous pouvons représenter l'écoulement autour du corps par le potentiel de vitesse $\Phi(x, y, z)$ qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\Phi = U(\phi - x). \quad (2)$$

Le potentiel stationnaire ϕ satisfait l'équation de Laplace dans le domaine fluide et une condition de radiation à l'infini. Ce potentiel stationnaire (dit de Neumann-Kelvin) satisfait

$$\phi_z + (U^2/g)\phi_{xx} = 0 \quad \text{et} \quad \phi_n = n_1 \quad (3)$$

sur la surface libre ($z=0$) et sur la carène S_H . Dans (3), g est l'accélération gravitaire et $\phi_{z,n,xx}$ désignent respectivement les dérivées premières de ϕ par rapport à z et n , et la dérivée seconde de ϕ par rapport à x . La normale $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ sur S_H est définie positive vers le fluide.

3 - Méthode

Avant d'entrer plus avant dans le détail des calculs, nous allons résumer brièvement la démarche adoptée. Pour cela, nous rappelons tout d'abord la méthode de Wu dans le cas de la sphère (Σ) immergée avec vitesse d'avance. Wu utilise une formulation source. Le potentiel des vitesses est ainsi représenté par une distribution de sources à la surface de la sphère ($\phi = \iint_{\Sigma} \sigma G dS$). Cette distribution sur la sphère (Σ) est l'inconnue à déterminer. Or toute fonction continue sur une sphère peut être représentée par une série de fonctions de Legendre (Wu 1988) ;

$$\sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n A_n^m P_n^m(\cos \theta) \cos(m\beta) \quad (4)$$

où les $P_n^m(\cdot)$ sont les fonctions de Legendre associées de première espèce données dans Abramowitz et Stegun (1967). Les $P_n^m(\cos \theta) \cos(m\beta)$ forment une base des fonctions continues sur la sphère. Rechercher σ revient donc à calculer les coefficients A_n^m . D'autre part, les $P_n^m(\cos \theta) \cos(m\beta)$ constituent une famille de fonctions orthogonales. En effet,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} P_n^m(\cos \theta) \cos(m\beta) P_{n'}^{m'}(\cos \theta) \cos(m'\beta) \sin \theta d\beta d\theta = \delta_{nn'} \delta_{mm'}, \quad (5)$$

où δ_{ij} est la fonction de Kronecker. Afin de tirer parti de cette orthogonalité pour le produit de la distribution de sources et de la fonction de Green de Neumann-Kelvin (σG), cette dernière est décomposée en harmoniques sphériques sur et à l'extérieur de la sphère (Σ). Ce développement est valide car chacun des termes de cette décomposition satisfait les conditions de surface libre et de Laplacien nul dans le milieu fluide. Il est à noter que le développement de $E(\vec{x})$ (14) fait apparaître une série de terme général $k^n \exp(-kh)$. L'immersion de la sphère ($h > 0$) assure la convergence. Toutefois, cette méthode ne pourra être appliquée dans notre cas ($h = 0$). Nous y reviendrons. Enfin pour calculer les coefficients A_n^m , la condition de glissement sur la sphère est exploitée ($n_x = \phi_n = \iint \sigma G_n dS$). L'emploi implicite d'une méthode de Galerkin, utilisant la propriété d'orthogonalité des $P_n^m(\cos \theta) \cos(m\beta)$, permet d'identifier les termes des membres de droite et de gauche. Dans le cas qui nous intéresse, on ne peut développer ($E(\vec{x})$) en harmoniques sphériques sous peine de faire apparaître des intégrales divergentes. Nous ne développerons que la fonction inconnue de notre problème à l'aide des $P_n^m(\cos \theta) \cos(m\beta)$ sur la sphère. Cette inconnue sera le potentiel des vitesses car nous adopterons une formulation mixte. Sinon les équations intégrales dont les coefficients de la série sont solution, seront aussi établies en appliquant la méthode de Galerkin. Les coefficients d'influence seront évalués par la méthode de fonction de Green intégrée développée dans Chen et Noblesse (1998).

4 - Equations intégrales

Le potentiel des vitesses en un point $\vec{\xi}$ de la sphère (S_H) est solution d'une équation intégrale qui peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\frac{1}{2}\phi(\vec{\xi}) + \chi(\vec{\xi}) = \psi(\vec{\xi}) \quad (6)$$

où les potentiels ψ et χ correspondent à des distributions de sources et de dipôles normaux a priori connues et inconnues sur la carène (S_H) et la ligne de flottaison (W). Une fois ces inconnues déterminées, le potentiel $\phi(\vec{\xi})$ en un point quelconque du fluide peut être calculé par la représentation $\phi(\vec{\xi}) = \psi(\vec{\xi}) - \chi(\vec{\xi})$. Les potentiels de source et dipolaire ont pour expression :

$$\chi(\vec{\xi}) = \iint_{S_H} \phi(\vec{x}) G_n(\vec{\xi}; \vec{x}) dS(\vec{x}) + F^2 \int_W \{ \phi(\vec{x}) G_x(\vec{\xi}; \vec{x}) - [\phi_\theta c_\theta + \phi_\beta c_\beta] G(\vec{\xi}; \vec{x}) \} t_y dl(\vec{x}) \quad (7a)$$

$$\psi(\vec{\xi}) = \iint_{S_H} n_x(\vec{x}) G(\vec{\xi}; \vec{x}) dS(\vec{x}) + F^2 \int_W n_x(\vec{x}) c_n G(\vec{\xi}; \vec{x}) t_y dl(\vec{x}) \quad (7b)$$

où $F = U/(gL)$ désigne le nombre de Froude. La fonction de Green de Neumann-Kelvin $G(\vec{\xi}; \vec{x})$, présente dans (7), représente le potentiel des vitesses de l'écoulement généré par une source unitaire située au point $\vec{x} = (x, y, z)$ en un point $\vec{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$. L'intégrale de contour le long de la ligne de flottaison (W), orientée dans le sens horaire, provient de l'intégrale double sur la surface libre par application du théorème de Stokes. Le vecteur \vec{t} est le vecteur tangent à cette ligne de flottaison et $dl(\vec{x})$ en est l'élément d'arc différentiel au point \vec{x} . L'identité

$$\phi_x = \phi_\theta c_\theta + \phi_\beta c_\beta + \phi_n c_n \quad (8)$$

est aussi utilisée dans (7), avec

$$c_n = \frac{\partial r}{\partial x} = \cos \beta ; c_\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 ; c_\beta = \frac{\partial \beta}{\partial x} = -\frac{\sin \beta}{r_0}$$

le long de la ligne de flottaison (W) ($\theta = \pi/2$). A la lumière des travaux de Wu, le potentiel des vitesses ϕ sur la sphère est décomposé sous la forme d'une série de fonctions de Legendre. Le problème étant symétrique par rapport au plan ($y = 0$), le terme antisymétrique est absent. On peut donc écrire :

$$\phi(\vec{\xi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_n^m P_n^m(\cos \theta_\xi) \cos(m\beta_\xi) \quad , \quad \theta_\xi \in [0; \pi/2], \quad \beta_\xi \in [0; 2\pi] \quad (9)$$

où $\vec{\xi} = (\xi, \eta, \zeta) = (r_0 \sin \theta_\xi \cos \beta_\xi, r_0 \sin \theta_\xi \sin \beta_\xi, -r_0 \cos \theta_\xi)$. En introduisant cette expression (9) dans l'équation intégrale (6), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_n^m \left(\frac{1}{2} P_n^m(\cos \theta_\xi) \cos(m\beta_\xi) + C_n^m(\vec{\xi}) + W_n^m(\vec{\xi}) \right) = S(\vec{\xi}) \quad (10)$$

$$\text{avec } \begin{cases} C_n^m(\vec{\xi}) &= \iint_{S_H} P_n^m(\cos \theta_x) \cos(m\beta_x) G_n(\vec{\xi}; \vec{x}) dS(\vec{x}) \\ W_n^m(\vec{\xi}) &= F^2 P_n^m(0) \int_W \left\{ \cos(m\beta_x) G_x(\vec{\xi}; \vec{x}) + m \sin(m\beta_x) c_\beta G(\vec{\xi}; \vec{x}) \right\} t_y dl(\vec{x}) \\ S(\vec{\xi}) &= \iint_{S_H} n_x G(\vec{\xi}; \vec{x}) dS(\vec{x}) + F^2 \int_W n_x c_n G(\vec{\xi}; \vec{x}) t_y dl(\vec{x}). \end{cases}$$

A ce stade, une méthode de Galerkin est utilisée afin d'établir les équations intégrales dont les coefficients A_n^m sont solutions. Cette méthode consiste à multiplier (10) par chacune des fonctions de base ($P_j^{i_N}$) $\cos(i_N \beta)$ (i_N désigne l'indice i . A ne pas confondre avec le i complexe) puis à intégrer sur la demi-sphère. Soit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n A_n^m (C_{nj}^{mi_N} + W_{nj}^{mi_N}) = S_j^{i_N} \quad (11)$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} C_{nj}^{mi\mathbf{N}} = C_{nj}^{mi\mathbf{N}}(A) + C_{nj}^{mi\mathbf{N}}(B) \\ C_{nj}^{mi\mathbf{N}}(A) = \frac{1}{2} \iint_{S_H} \{P_n^m(\cos\theta_\xi) \cos(m\beta_\xi)\} \{P_j^{i\mathbf{N}}(\cos\theta_\xi) \cos(i\mathbf{N}\beta_\xi)\} dS(\vec{\xi}) \\ (C_{nj}^{mi\mathbf{N}}(B), W_{nj}^{mi\mathbf{N}}, S_j^{i\mathbf{N}}) = \iint_{S_H} (C_n^m(B)(\vec{\xi}), W_n^m(\vec{\xi}), S(\vec{\xi})) \{P_j^{i\mathbf{N}}(\cos\theta_\xi) \cos(i\mathbf{N}\beta_\xi)\} dS(\vec{\xi}). \end{array} \right.$$

Dans la pratique, la série est tronquée à un ordre (N) suffisamment élevé pour assurer la convergence des calculs. Le système linéaire à résoudre, qui compte $((N+1)(N+2)/2)$ équations et inconnues, est le suivant :

$$\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n A_n^m (C_{nj}^{mi\mathbf{N}} + W_{nj}^{mi\mathbf{N}}) = S_j^{i\mathbf{N}}. \quad (12)$$

Nous décomposons alors les coefficients $(C_{nj}^{mi\mathbf{N}}, W_{nj}^{mi\mathbf{N}}, S_j^{i\mathbf{N}})$ suivant la forme adoptée pour la fonction de Green de Neumann-Kelvin. Celle-ci peut s'écrire sous la forme suivante:

$$G(\vec{\xi}; \vec{x}) = G^S(\vec{\xi}; \vec{x}) + G^F(\vec{\xi}; \vec{x}). \quad (13)$$

Ici G^S représente la partie associée aux sources de Rankine :

$$G^S(\vec{\xi}; \vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$$

où R, respectivement R', représentent les distances entre le point d'observation $\vec{\xi}$ et la source \vec{x} , respectivement l'image \vec{x}' de \vec{x} par rapport au plan $z=0$. La composante G^F associée aux effets de surface libre peut être représentée comme une superposition de solutions oscillatoires dans le plan de Fourier (Noblesse et Chen 1995) :

$$G^F(\vec{x}; \vec{\xi}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{(\alpha, \beta)} \frac{E(\vec{x})E^*(\vec{\xi})}{D_\varepsilon(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta \quad (14)$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} E(\vec{x}) = \exp[kz + i(\alpha x + \beta y)] \\ E^*(\vec{\xi}) = \exp[k\zeta - i(\alpha\xi + \beta\eta)] \\ D_\varepsilon(\alpha, \beta) = 4\pi^2[-k + (i\varepsilon - F\alpha)^2] \end{array} \right.$$

où $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ désigne le nombre d'onde. Cette décomposition de la fonction de Green nous amène à séparer les coefficients $(C_{nj}^{mi\mathbf{N}}, W_{nj}^{mi\mathbf{N}}$ et $S_j^{i\mathbf{N}})$ en une composante associée aux singularités de Rankine $(\bar{\cdot})$ d'une part et en une composante associée aux effets de surface libre $(\tilde{\cdot})$ d'autre part :

$$\begin{aligned} C_{nj}^{mi\mathbf{N}}(B) &= \bar{C}_{nj}^{mi\mathbf{N}}(B) + \tilde{C}_{nj}^{mi\mathbf{N}}(B) \\ W_{nj}^{mi\mathbf{N}} &= \bar{W}_{nj}^{mi\mathbf{N}} + \tilde{W}_{nj}^{mi\mathbf{N}} \\ S_j^{i\mathbf{N}} &= \bar{S}_{nj}^{i\mathbf{N}} + \tilde{S}_{nj}^{i\mathbf{N}} \end{aligned}$$

Nous présentons plus en détails les calculs de ces coefficients dans les deux sections qui suivent.

5 - Méthode de fonction de Green intégrée appliquée aux effets de surface libre

Nous utiliserons la méthode de la fonction de Green intégrée pour le calcul des coefficients $\tilde{C}_{nj}^{mi\mathbf{N}}(B)$, $\tilde{W}_{nj}^{mi\mathbf{N}}$ et $\tilde{S}_{nj}^{i\mathbf{N}}$. Rappelons brièvement les différents avantages de cette méthode. Tout d'abord la fonction de Green de Neumann-Kelvin est très oscillatoire quand le point influencé se trouve en aval du point influençant. De plus, ce comportement oscillatoire devient

singulier quand les deux points touchent la surface libre (Euvrard, 1981). Même si ce comportement, dans notre cas particulier ou celui plus général de la tenue à la mer, est décrit de façon analytique dans (Chen 2000) cela ne nous aide pas davantage. En effet, la fonction de Green n'est pas directement utile dans les équations intégrales. Elle n'intervient que pour représenter l'écoulement généré par les distributions de singularités réparties sur le corps et la ligne de flottaison. La méthode de fonction de Green intégrée, en permutant les intégrales sur le corps et dans le plan de Fourier, exprime pleinement cette notion d'écoulement généré par une distribution de singularités et a en outre l'avantage de faire disparaître le caractère singulier décrit auparavant (Chen et Noblesse 1998). De plus, la géométrie particulièrement simple de la demi-sphère se prête de façon exemplaire à cette méthode. Le développement du potentiel ϕ en série de fonctions de Legendre permet, en effet, de bénéficier d'une distribution régulière de singularités sur la demi-sphère et la ligne de flottaison. Cette régularité est très importante dans l'optique d'une résolution robuste et précise du problème (Clarisse 1991). De plus, les expressions des fonctions de spectre seront simplifiées grâce à l'emploi des coordonnées sphériques (cf 5-1).

Appliquons cette méthode aux termes $\tilde{C}_{nj}^{mi\mathbf{N}}(B)$, $\tilde{W}_{nj}^{mi\mathbf{N}}(B)$ et $\tilde{S}_{nj}^{mi\mathbf{N}}(B)$. On obtient les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{nj}^{mi\mathbf{N}}(B) &= \iint_{(\alpha,\beta)} \frac{S_1(r_0; \alpha, \beta; i_{\mathbf{N}}, j) S_2(r_0; \alpha, \beta; m, n)}{D_\varepsilon(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta \\ \tilde{W}_{nj}^{mi\mathbf{N}}(B) &= F^2 P_n^m(0) \iint_{(\alpha,\beta)} \frac{S_1(r_0; \alpha, \beta; i_{\mathbf{N}}, j) S_3(r_0; \alpha, \beta; m)}{D_\varepsilon(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta \\ \tilde{S}_{nj}^{mi\mathbf{N}}(B) &= \iint_{(\alpha,\beta)} \frac{S_1(r_0; \alpha, \beta; i_{\mathbf{N}}, j) \left(S_4(r_0; \alpha, \beta) + F^2 S_5(r_0; \alpha, \beta) \right)}{D_\varepsilon(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta\end{aligned}$$

avec comme fonctions de spectre :

$$\begin{aligned}S_1(r_0; \alpha, \beta; i_{\mathbf{N}}, j) &= \iint_{S_H} E^*(\vec{\xi}) P_j^{i_{\mathbf{N}}}(\cos \theta_\xi) \cos(i_{\mathbf{N}} \beta_\xi) dS(\vec{\xi}) \\ S_2(r_0; \alpha, \beta; m, n) &= \iint_{S_H} E(\vec{x}) P_n^m(\cos \theta_x) \cos(m \beta_x) \left\{ i(\alpha \sin \theta_x \cos \beta_x + \beta \sin \theta_x \sin \beta_x) - k \cos \theta_x \right\} dS(\vec{x}) \\ S_3(r_0; \alpha, \beta; m) &= \int_W E(\vec{x}) \left\{ i\alpha \cos(m \beta_x) - m \sin(m \beta_x) \frac{\sin \beta_x}{r_0} \right\} t_y dl(\vec{x}) \\ S_4(r_0; \alpha, \beta) &= \iint_{S_H} E(\vec{x}) n_x(\vec{x}) dS(\vec{x}) \\ S_5(r_0; \alpha, \beta) &= \int_W E(\vec{x}) n_x(\vec{x}) \cos \beta_x t_y dl(\vec{x}).\end{aligned}$$

5 - 1 Calcul des fonctions de spectre

Les expressions des fonctions de spectre données ci-dessus sont simplifiées en utilisant le développement de $\cos(z \cos \beta)$ et $\sin(z \cos \beta)$ à l'aide des fonctions de Bessel (Abramowitz et Stegun 1967). On obtient la formule suivante :

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\beta) \exp(iz \cos \beta) d\beta = 2\pi i^m J_m(z).$$

Cette formule appliquée au calcul de S_1 nous donne :

$$S_1(r_0; \alpha, \beta; i_{\mathbf{N}}, j) = \iint_{S_H} E^*(\vec{\xi}) P_j^{i_{\mathbf{N}}}(\cos \theta_\xi) \cos(i_{\mathbf{N}} \beta_\xi) dS(\vec{\xi})$$

$$S_1(r_0; \alpha, \beta; i_{\mathbf{N}}, j) = i^{i_{\mathbf{N}}} (-1)^{i_{\mathbf{N}}} (2\pi r_0^2) \cos(i_{\mathbf{N}} \gamma) \int_{\theta_\xi=0}^{\theta_\xi=\pi/2} P_j^{i_{\mathbf{N}}}(\cos \theta_\xi) e^{-kr_0 \cos \theta_\xi} J_{i_{\mathbf{N}}}(kr_0 \sin \theta_\xi) \sin(\theta_\xi) d\theta_\xi$$

$$S_1(r_0; \alpha, \beta; i_{\mathbf{N}}, j) = i^{i_{\mathbf{N}}} (-1)^{i_{\mathbf{N}}} (2\pi r_0^2) S1(r_0; \alpha, \beta; i_{\mathbf{N}}, j) \quad , S1 \in \mathbf{R}$$

On procède de même pour les autres fonctions de spectre. Toutefois les notations étant fastidieuses, nous avons regroupé les expressions détaillées de $\{S_2, \dots, S_5\}$ dans l'annexe. Nous n'isolons ici que la partie imaginaire. On trouve les résultats suivants :

$$S_1(r_0; \alpha, \beta; i_{\mathbf{N}}, j) = i^{i_{\mathbf{N}}} (-1)^{i_{\mathbf{N}}} (2\pi r_0^2) S1(r_0; \alpha, \beta; i_{\mathbf{N}}, j) \quad , S1 \in \mathbf{R}$$

$$S_2(r_0; \alpha, \beta; m, n) = i^m (\pi r_0^2) S2(r_0; \alpha, \beta; m, n) \quad , S2 \in \mathbf{R}$$

$$S_3(r_0; \alpha, \beta; m) = i^{m+2} \pi S3(r_0; \alpha, \beta; m) \quad , S3 \in \mathbf{R}$$

$$S_4(r_0; \alpha, \beta) = i\pi S4(r_0; \alpha, \beta) \quad , S4 \in \mathbf{R}$$

$$S_5(r_0; \alpha, \beta) = i\pi r_0 S5(r_0; \alpha, \beta) \quad , S5 \in \mathbf{R}$$

Des résultats relatifs à ces fonctions de spectre sont donnés dans la section 7.

5 - 2 Décomposition de $\tilde{C}_{nj}^{mi_{\mathbf{N}}}(B)$, $\tilde{W}_{nj}^{mi_{\mathbf{N}}}$ et $\tilde{S}_j^{i_{\mathbf{N}}}$

Nous utilisons la formule (15) donnée dans (Noblesse et Chen 1995). Pour le problème de Neumann-Kelvin, cette formule est la suivante :

$$\iint_{(\alpha, \beta)} \frac{S(\alpha, \beta)}{D_\varepsilon(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta = i\pi \sum_{D=0} \int_{D=0} \operatorname{sgn}(\alpha) \frac{S(\alpha, \beta)}{\|\nabla D\|} ds + \iint_{(\alpha, \beta)} \frac{S(\alpha, \beta)}{D(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta \quad (15)$$

Cette formule appliquée au calcul des coefficients $\tilde{C}_{nj}^{mi_{\mathbf{N}}}(B)$, $\tilde{W}_{nj}^{mi_{\mathbf{N}}}$ et $\tilde{S}_j^{i_{\mathbf{N}}}$ donne :

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= \iint_{(\alpha, \beta)} \frac{S(\alpha, \beta)}{D_\varepsilon(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta \\ &= i\pi \sum_{D=0} \int_{D=0} \operatorname{sgn}(\alpha) \frac{S(\alpha, \beta)}{\|\nabla D\|} ds + \iint_{(\alpha, \beta)} \frac{S(\alpha, \beta)}{D(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta \\ &= \tilde{F}(w) + \tilde{F}(n) \end{aligned}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \tilde{F} = \tilde{C}_{nj}^{mi_{\mathbf{N}}}(B) & \text{et } S(\alpha, \beta) = S_1(r_0; \alpha, \beta; i_{\mathbf{N}}, j) S_2(r_0; \alpha, \beta; m, n) \\ \tilde{F} = \tilde{W}_{nj}^{mi_{\mathbf{N}}} & \text{et } S(\alpha, \beta) = F^2 P_n^m(0) S_1(r_0; \alpha, \beta; i_{\mathbf{N}}, j) S_3(r_0; \alpha, \beta; m) \\ \tilde{F} = \tilde{S}_j^{i_{\mathbf{N}}} & \text{et } S(\alpha, \beta) = S_1(r_0; \alpha, \beta; i_{\mathbf{N}}, j) (S_4(r_0; \alpha, \beta) + F^2 S_5(r_0; \alpha, \beta)) \end{cases}$$

5 - 3 Calcul de $\tilde{C}_{nj}^{mi_{\mathbf{N}}}(B_w)$, $\tilde{W}_{nj}^{mi_{\mathbf{N}}}(w)$ et $\tilde{S}_j^{i_{\mathbf{N}}}(w)$

On passe tout d'abord à l'échelle de Froude $(a, b, c) = F^2(\alpha, \beta, k)$ et on effectue le changement de variables (Chen et Noblesse, Euromech 1998) $ds/\|\nabla D\| = (\sqrt{c^d}/(2\sqrt{\frac{1}{4} + b^2}))(db/F^2)$ avec $c^d = 1/2 + \sqrt{1/4 + b^2}$, où c^d désigne c le long de la courbe de dispersion. Les coordonnées (c, γ)

avec $\phi_n = n_x = -P_1^1(\cos \theta) \cos \beta$. On utilise alors la représentation (9) du potentiel. Ceci nous donne :

$$\chi^S(r_\xi, \theta_\xi, \beta_\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n A_n^m \chi_n^m$$

$$\text{avec } \chi_n^m = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial r_x} G^S(r_\xi, \theta_\xi, \beta_\xi; r_x, \theta_x, \beta_x) P_n^m(\cos \theta_x) \cos(m\beta_x) \sin(\theta_x) d\theta_x d\beta_x$$

On a donc

$$C_{nj}^{mi\mathbf{N}}(A) + \bar{C}_{nj}^{mi\mathbf{N}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\phi/2 + \chi^S) P_j^{i\mathbf{N}}(\cos \theta_\xi) \cos(i\mathbf{N}\beta_\xi) \sin(\theta_\xi) d\theta_\xi d\beta_\xi$$

$$\text{donc } C_{nj}^{mi\mathbf{N}}(A) + \bar{C}_{nj}^{mi\mathbf{N}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n A_n^m A_{n,j}^{m,i\mathbf{N}}$$

$$\text{avec } A_{n,j}^{m,i\mathbf{N}} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{2} P_n^m(\cos \theta_\xi) \cos(m\beta_\xi) + \chi_n^m \right] \times \\ \times P_j^{i\mathbf{N}}(\cos \theta_\xi) \cos(i\mathbf{N}\beta_\xi) \sin(\theta_\xi) d\theta_\xi d\beta_\xi$$

Nous rappelons que :

$$G^S = -\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \quad (16)$$

qui peut être développée comme suit (MacRobert 1967) :

$$G^S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{2n+1} \frac{r_x^n}{r_\xi^{n+1}} \sum_{m=0}^n \varepsilon_m [1 - (-1)^{n-m}] P_n^m(\cos \theta_\xi) P_n^m(\cos \theta_x) \times \\ \times [\cos(m\beta_\xi) \cos(m\beta_x) + \sin(m\beta_\xi) \sin(m\beta_x)]$$

Cette expression nous donne

$$\chi_n^m = \left[-\frac{1}{4} \sum_{n'=m}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^{n-m}] n'}{2n'+1} J_{n-m, n'-m}^m P_{n'}^m(\cos \theta_\xi) \right] \cos(m\beta_\xi) \quad (17)$$

où

$$J_{n,k}^m = \int_0^1 P_{m+n}^m(x) P_{m+k}^m(x) dx = J_{k,n}^m = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \quad n+k \text{ pair} \\ 0 < |J_{n,k}^m| < 1 & n \neq k \quad n+k \text{ impair} \end{cases}$$

et $A_{n,j}^{m,i\mathbf{N}} = \pi \delta_{ml} D_{n,j}^m$, avec :

$$D_{n,j}^m = \frac{1}{2} J_{n-m, k-m}^m - \frac{1}{4} \sum_{n'=m}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^{n-m}] n'}{2n'+1} J_{n-m, n'-m}^m J_{n-m, k-m}^m \quad (18)$$

Il ne nous reste plus qu'à évaluer numériquement les coefficients.

7 - Résultats numériques

Nous donnons ci-dessous l'allure des fonctions de spectre $\{S1, \dots, S5\}$ pour $k \leq 10$. Les symétries qui nous permettent de simplifier nos intégrales simples et doubles apparaissent clairement ($r_0 = 1$).

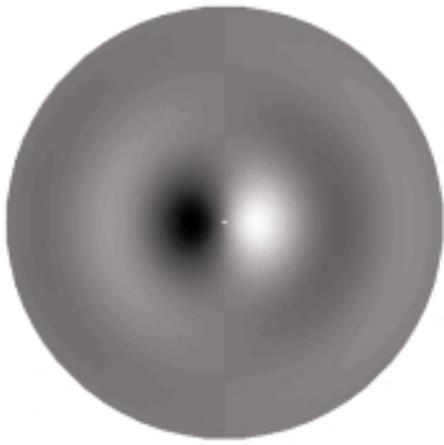


figure 1 : $S1(m=1, n=1)$

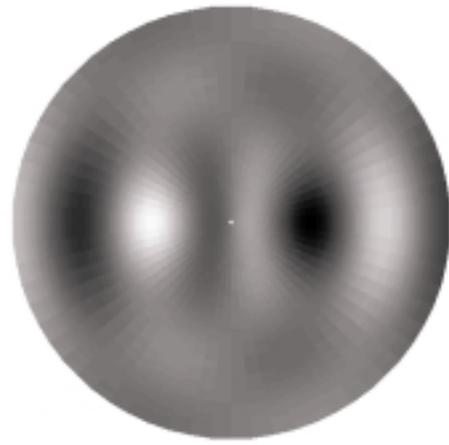


figure 2 : $S2(m=1, n=1)$

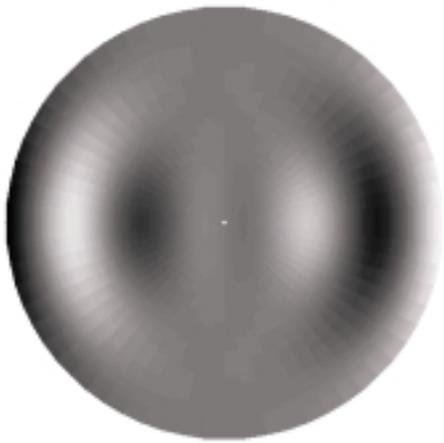


figure 3 : $S3(m=1)$

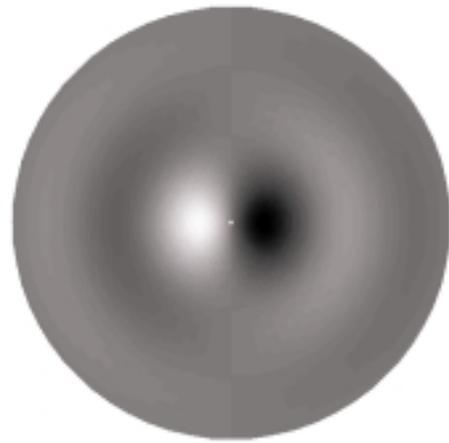


figure 4 : $S4$

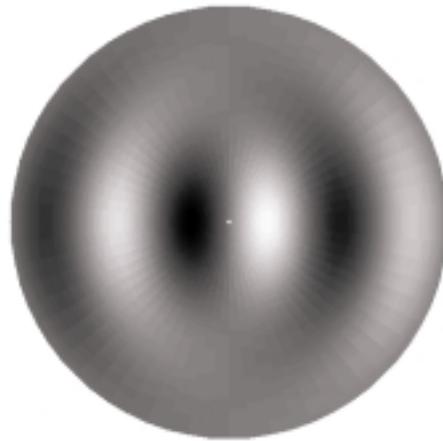


figure 5 : $S5$

8 - Discussions

Nous avons présenté une méthode semi-analytique de résolution de l'écoulement autour d'une demi-sphère avançant sur la surface libre. Cette méthode est généralisable au cas de la tenue à la mer. Les résultats finaux et validations seront présentés lors des Journées.

Références

- [1] M. Abramowitz et I.A. Stegun (1967) "Handbook of mathematical functions", Dover Publications.
- [2] M. Ba & M. Guilbaud (1995) "A fast method of evaluation for the translating and pulsating Green's function", *Ship Techn Res.* 42, pp 68-80.
- [3] M.S. Chang (1977) "Computations of three-dimensional ship motions with forward speed", 2nd Intl Conf. Ship Hydro., Berkeley, CA, pp 124-135.
- [4] X.B. Chen & F. Noblesse (1998) "Super Green functions", Proceedings of the 22nd Symposium on Naval Hydrodynamics, Washington D.C. (USA).
- [5] X.B. Chen (1999) "An introductory treatise on ship-motion Green functions", Proceedings of the 7th International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics, Nantes (France), pp1-21.
- [6] X.B. Chen, L. Diebold et Y. Doutreleau (2000) "New Green function method to predict wave-induced ship motions and loads", Proceedings of the 23rd Symposium on Naval Hydrodynamics, Val de Reuil (France).
- [7] X.B. Chen (2000) "Highly oscillatory properties of unsteady ship waves", *Proc. Instn Mech Engrs.* 214, Part C, pp813-823.
- [8] J.M. Clarisse (1991) "Highly oscillatory behaviors in the Neumann-Kelvin problem", 6th Intl Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Woods Hole, Mass.
- [9] Y. Doutreleau (1997) "Etude mathématique et numérique du problème de résistance de vagues", Rapport de recherche, ENSTA No.303.
- [10] D. Euvrard (1983) "Les mille et une facettes de la fonction de Green du problème de la résistance de vagues", Rapport de recherche, ENSTA No.144.
- [11] P. Guével & J. Bougis (1982) "Ship motions with forward speed in infinite depth", *Intl Shipbuilding Progress* 29, pp 103-117.
- [12] R.B. Inglis & W.G. Price (1980) "Calculation of the velocity potential of a translating, pulsating source", *Trans. RINA* 123, pp 141-157.
- [13] H. Iwashita & M. Ohkusu (1992) "The Green Function Method for ship motions at forward speed", *Ship. Techn. Res.* 39, pp 3-21.
- [14] B.V. Korvin-Kroukowsky (1955) "Investigations of ship motions in regular waves", *Soc. Nav. Arch. Mar. Eng. Trans.* 63, pp 386-435.
- [15] F. Noblesse & C. Yang (1995) "Fourier-Kochin formulation of wave diffraction-radiation by ships or offshore structures", *Ship Technology Research*, Vol.42, pp115-139.
- [16] F. Noblesse, C. Yang, R. Löhner, D. Hendrix (1999) "Fourier-Kochin representation of farfield steady ship waves", *Septièmes Journées de l'hydrodynamique*.
- [17] N. Salvesen, E.O. Tuck & O. Faltinsen (1955) "Ship motions and sea loads", *Soc. Nav. Arch. Mar. Eng. Trans.* 78, pp 250-287.
- [18] G.X. Wu et Eatock Taylor (1988) "Radiation and diffraction of water waves by a submerged sphere at forward speed", *Proc. R. Soc. Lond. A* 417, pp433-461.
- [19] G.X. Wu (1995) "Radiation and diffraction by a submerged sphere advancing in water waves of finite depth", *Proc. R. Soc. Lond. A* 448, pp29-54.

Annexe

Les coordonnées (α, β) respectivement (k, γ) désignent les coordonnées cartésiennes respectivement les coordonnées polaires dans le plan de Fourier. Nous donnons l'expression des fonctions de spectre. On obtient pour $S_2(r_0; \alpha, \beta; m, n)$:

$$\begin{aligned}
 \text{pour } m \neq 0, \quad S_2(r_0; \alpha, \beta; m, n) &= \pi i^{m+2} k r_0^2 \{Sp2b(kr_0; m, n) \cos[(m+2)\gamma] \\
 &\quad - Sp2a(kr_0; m, n) \cos(m\gamma)\} \\
 &\quad - 2\pi i^m k r_0^2 \cos(m\gamma) Sp2c(kr_0; m, n) \\
 &= i^m (\pi r_0^2) S2(r_0; \alpha, \beta; m, n) \\
 \text{pour } m=0, \quad S_2(r_0; \alpha, \beta; 0, n) &= -2\pi k r_0^2 (Sp2b(kr_0; 0, n) + Sp2c(kr_0; 0, n)) \\
 &= \pi r_0^2 S2(r_0; \alpha, \beta; 0, n)
 \end{aligned}$$

avec

$$\left\{ \begin{aligned}
 Sp2a(kr_0; m, n) &= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} P_n^m(\cos \theta_x) e^{-kr_0 \cos \theta_x} J_{m-1}(kr_0 \sin \theta_x) \sin^2(\theta_x) d\theta_x \\
 Sp2b(kr_0; m, n) &= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} P_n^m(\cos \theta_x) e^{-kr_0 \cos \theta_x} J_{m+1}(kr_0 \sin \theta_x) \sin^2(\theta_x) d\theta_x \\
 Sp2c(kr_0; m, n) &= \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} P_n^m(\cos \theta_x) e^{-kr_0 \cos \theta_x} J_m(kr_0 \sin \theta_x) \sin(\theta_x) \cos(\theta_x) d\theta_x.
 \end{aligned} \right. \quad (19)$$

De même pour $S_3(r_0; \alpha, \beta; m, n)$:

$$\begin{aligned}
 \text{pour } m \neq \{0, 1\}, \quad S_3(r_0; \alpha, \beta; m) &= i^{m+2} \left\{ \pi k \cos(\gamma) r_0 \left(\cos[(m+1)\gamma] Sp3a(kr_0; m) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \cos[(m-1)\gamma] Sp3b(kr_0; m) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \pi \frac{m}{2} \left(\cos[(m-2)\gamma] Sp3c(kr_0; m) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \cos[(m+2)\gamma] Sp3d(kr_0; m) \right) \right\} \\
 &= i^{m+2} \pi S3(r_0; \alpha, \beta; m) \\
 \text{pour } m = 1, \quad S_3(r_0; \alpha, \beta; 1) &= -i \left\{ \pi k \cos(\gamma) r_0 \left(\cos[2\gamma] Sp3a(kr_0; 1) - Sp3b(kr_0; 1) \right) \right. \\
 &\quad \left. - \pi \frac{m}{2} \left(\cos(\gamma) Sp3c(kr_0; 1) - \cos(3\gamma) Sp3d(kr_0; 1) \right) \right\} \\
 &= -i \pi S3(r_0; \alpha, \beta; 1) \\
 \text{pour } m = 0, \quad S_3(r_0; \alpha, \beta; 0) &= -2\pi k \cos^2(\gamma) r_0 Sp30(kr_0) \\
 &= -\pi S3(r_0; \alpha, \beta; 0)
 \end{aligned}$$

avec

$$\left\{ \begin{aligned}
 Sp3a(kr_0; m) &= J_{m+1}(kr_0) \quad \text{pour } m \neq \{0, 1\} \\
 Sp3b(kr_0; m) &= J_{m-1}(kr_0) \quad \text{pour } m \neq \{0, 1\} \\
 Sp3c(kr_0; m) &= J_{m-2}(kr_0) \quad \text{pour } m \neq \{0, 1\} \\
 Sp3d(kr_0; m) &= J_{m+2}(kr_0) \quad \text{pour } m \neq \{0, 1\} \\
 Sp3a(kr_0; 1) &= J_2(kr_0) \\
 Sp3b(kr_0; 1) &= J_0(kr_0) \\
 Sp3c(kr_0; 1) &= J_1(kr_0) \\
 Sp3d(kr_0; 1) &= J_3(kr_0) \\
 Sp30(kr_0; 0) &= J_1(kr_0).
 \end{aligned} \right. \quad (20)$$

On obtient pour $S_4(r_0; \alpha, \beta)$:

$$\begin{aligned} S_4(r_0; \alpha, \beta) &= 2i\pi r_0^2 \cos(\gamma) Sp2b(kr_0; 0, 0) \\ S_4(r_0; \alpha, \beta) &= i\pi S4(r_0; \alpha, \beta) \end{aligned}$$

On aura pour $S_5(r_0; \alpha, \beta)$:

$$\begin{aligned} S_5(r_0; \alpha, \beta) &= \frac{1}{2}i\pi r_0 \left(-3 \cos(\gamma) J_1(kr_0) + \cos(3\gamma) J_3(kr_0) \right) \\ S_5(r_0; \alpha, \beta) &= i\pi r_0 S5(r_0; \alpha, \beta) \end{aligned}$$