

7<sup>e</sup> JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE

MARSEILLE - 8, 9, 10 MARS 1999

## ETUDE THEORIQUE ET EXPERIMENTALE DES EFFORTS HYDRODYNAMIQUES SUR UNE EMBASE PLANE A L'APPROCHE DU FOND MARIN

B. Molin<sup>1</sup>, P. Guérin<sup>2</sup>, D. Martigny<sup>3</sup>, Ph. Weber<sup>4</sup>

### Résumé

Le problème considéré ici est celui de la phase d'approche d'un fond horizontal par des embases pétrolières de faible épaisseur, et des efforts hydrodynamiques ressentis en phase finale, lorsque la distance au fond est faible, sous l'effet des mouvements incoercibles induits par la houle. La résolution théorique s'appuie sur la théorie potentielle et sur la méthode des développements asymptotiques raccordés. Des expressions analytiques de la masse ajoutée et des efforts hydrodynamiques sont obtenues pour des plaques sans épaisseurs, en deux et trois dimensions (la plaque étant circulaire dans le deuxième cas), à des distances au fond faibles devant leurs dimensions horizontales. Les prédictions théoriques sont comparées à des valeurs expérimentales, obtenues par la mise en mouvement forcé de cylindres aplatis au voisinage du fond. Un bon accord est obtenu, les effets visqueux jouant un rôle secondaire.

### Summary

The problem considered is the theoretical prediction of the hydrodynamic loads acting upon flat footings in forced vertical motion very close to the sea-floor. The problem is tackled via potential flow theory and the method of matched asymptotic expansions. Analytical expressions of the vertical added masses and hydrodynamic loads are obtained for 2D and 3D plates (circular in the latter case), when the gap is small as compared to their horizontal extents. Comparisons are made with results from dedicated model tests, with a good agreement.

<sup>1</sup>ESIM, 13 451 Marseille Cedex 20, molin@esim.imt-mrs.fr

<sup>2</sup>Principia R.D., 83 507 La Seyne sur Mer Cedex, principia@wanadoo.fr

<sup>3</sup>Sirehna, 1 rue de la Noë, 44 321 Nantes Cedex 03

<sup>4</sup>Technip, 92 973 Paris La Défense Cedex

## INTRODUCTION

Le problème considéré initialement est celui de la mise en place de la plateforme de production pétrolière TPG 500. Cette plateforme (figure 1) consiste en un pont supporté par trois jambes en treillis métallique, terminées à leur extrémité inférieure par des embases de 2 m de hauteur, à peu près cylindriques. Ces embases viennent se poser sur un socle en béton préinstallé.

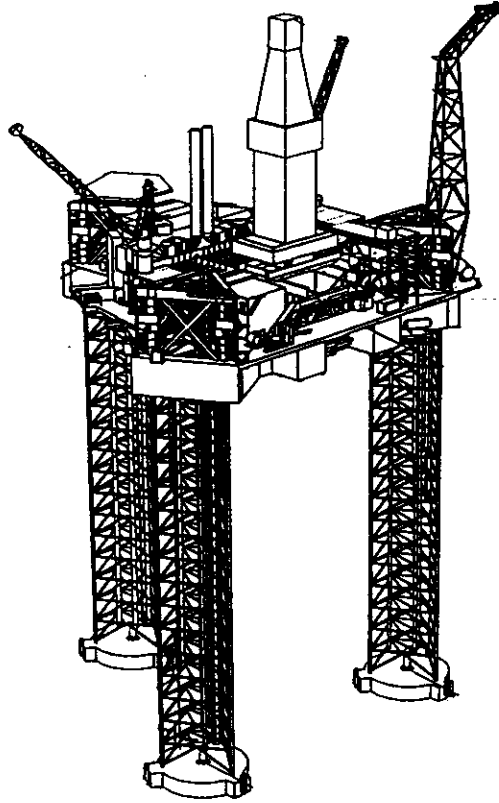


Figure 1. La plateforme de production TPG 500

La descente des jambes s'accompagne de mouvements incoercibles induits par la houle et il se pose le problème des efforts hydrodynamiques ressentis par les embases à l'approche du socle, sous l'effet de ces mouvements forcés, lorsque l'espace interstitiel devient petit.

Dans le cadre d'une théorie de fluide parfait et d'écoulement irrotationnel, les efforts se relient simplement à la masse ajoutée verticale de l'embase, et à sa variation avec la distance au socle. Cette masse ajoutée peut s'obtenir par des outils numériques, par exemple basés sur la méthode de l'équation intégrale, mais pour lesquels des problèmes éventuels de précision se posent lorsque l'espace interstitiel devient petit devant le diamètre de l'embase. Un moyen de contrôle de la validité des résultats numériques s'avère alors souhaitable.

C'est ce problème qui a motivé l'étude théorique présentée en première partie, où on se place dans le cas particulier d'une plaque sans épaisseur au dessus d'un fond horizontal. Le problème est traité successivement en deux et en trois dimensions, la plaque étant supposée de forme circulaire (un disque) dans le deuxième cas. La méthode utilisée est celle des développements asymptotiques raccordés et la masse ajoutée est obtenue analytiquement.

Des comparaisons sont ensuite présentées avec des résultats expérimentaux obtenus par la mise en mouvement forcé de modèles, à l'échelle du huitième, des embases réelles. L'importance des effets d'origine visqueuse est ensuite discutée.

## I. THEORIE

On se place dans le cadre de la théorie potentielle : le fluide est supposé parfait et l'écoulement irrotationnel. Le domaine fluide n'est limité que par le fond marin, supposé horizontal. Le potentiel de l'écoulement  $\Phi(x, y, z, t)$  est solution du problème aux limites :

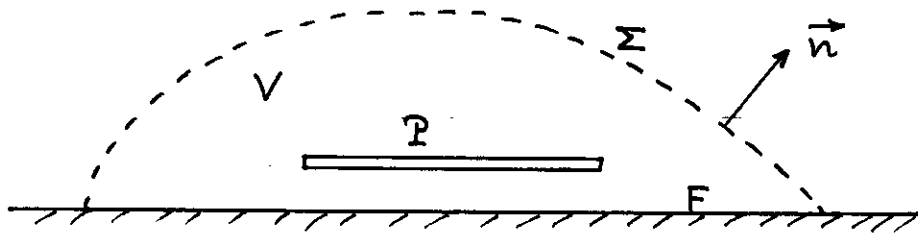
$$\Delta\Phi = 0 \quad \text{dans le domaine fluide } (V) \quad (1)$$

$$\Phi_z = 0 \quad \text{sur le fond marin } (F) \quad (2)$$

$$\Phi_z = U(t) = \dot{d} \quad \text{sur la plaque } (P) \quad (3)$$

$$\nabla\Phi \rightarrow 0 \quad x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty \quad (4)$$

la condition de glissement sur la plaque étant appliquée sur ses deux faces.



Le volume fluide étant conservé, le comportement lointain du potentiel est en  $R^{-2}$  en trois dimensions et en  $R^{-1}$  en deux dimensions,  $R$  étant la distance à l'origine.

### I.1 Expression de l'effort hydrodynamique

On peut obtenir les efforts par intégration directe de la pression  $-\rho \Phi_t - 1/2 \rho (\nabla\Phi)^2$  ou par des considérations sur la variation de quantité de mouvement dans un domaine fluide de référence contenant la plaque (voir par exemple Newman, 1977, p. 132-134). La première méthode ne fait pas apparaître explicitement la masse ajoutée et la deuxième conduit à une intégrale supplémentaire sur tout le fond marin.

Une troisième voie consiste à partir de l'expression de l'énergie cinétique  $E_C$  dans le domaine fluide limité par une surface de contrôle, fictive,  $\Sigma$ . Il vient :

$$E_C = \frac{1}{2} \rho \iiint_V (\nabla\Phi)^2 dV = \frac{1}{2} \rho \iint_{F \cup P \cup \Sigma} \Phi \nabla\Phi \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{2} \rho \iint_{P \cup \Sigma} \Phi \nabla\Phi \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{2} M_a U^2 \quad (5)$$

lorsque l'on éloigne la surface de contrôle  $\Sigma$  à l'infini et par définition de la masse ajoutée  $M_a$ , puisque  $\Phi = U \varphi_3$ ,  $\varphi_3$  étant le potentiel élémentaire associé à une vitesse unitaire dans la direction verticale. Dans les écritures précédentes,  $P$  désigne la surface mouillée de la plaque (dessus + dessous),  $F$  le fond marin et  $\vec{n}$  la normale extérieure au domaine fluide.

Exprimant la dérivée temporelle de  $E_C$  on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dE_C}{dt} &= \frac{1}{2} \rho \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\nabla\Phi)^2 dV + \frac{1}{2} \rho \iint_{P \cup F \cup \Sigma} (\nabla\Phi)^2 \vec{U} \cdot \vec{n} dS \\ &= \rho \iiint_V \nabla\Phi \cdot \nabla\Phi_t dV + \frac{1}{2} \rho \iint_P (\nabla\Phi)^2 \vec{U} \cdot \vec{n} dS \\ &= \rho \iint_{P \cup F \cup \Sigma} \Phi_t \nabla\Phi \cdot \vec{n} dS + \frac{1}{2} \rho \iint_P (\nabla\Phi)^2 \nabla\Phi \cdot \vec{n} dS \\ &= \rho \iint_P \left( \Phi_t + \frac{1}{2} (\nabla\Phi)^2 \right) \vec{U} \cdot \vec{n} dS + \rho \iint_{\Sigma} \Phi_t \nabla\Phi \cdot \vec{n} dS \\ &= -\vec{F} \cdot \vec{U} + \rho \iint_{\Sigma} \Phi_t \nabla\Phi \cdot \vec{n} dS \end{aligned}$$

la contribution sur  $\Sigma$  devenant nulle lorsque cette surface est éloignée à l'infini.

L'effort  $\vec{F}$  et la vitesse  $U$  étant dirigés suivant la verticale on en déduit :

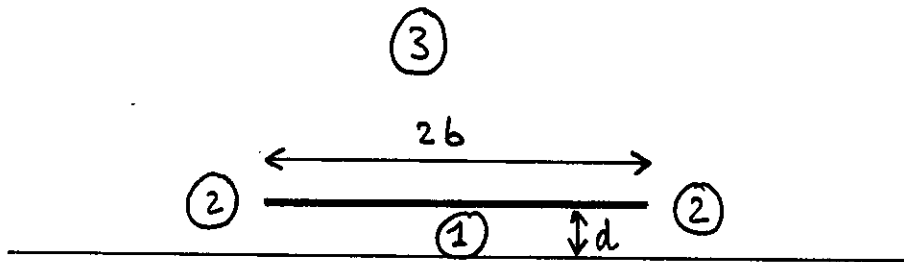
$$F = -\frac{1}{2U} \frac{d}{dt}(M_a U^2) = -M_a \frac{dU}{dt} - \frac{1}{2} U \frac{dM_a}{dt} \quad (6)$$

L'application du principe de conservation de la quantité de mouvement aurait conduit à l'expression :

$$F = -M_a \frac{dU}{dt} - U \frac{dM_a}{dt} - \frac{1}{2} \rho \iint_F (\nabla \Phi)^2 dS \quad (7)$$

moins commode d'utilisation.

## I.2 Cas bidimensionnel



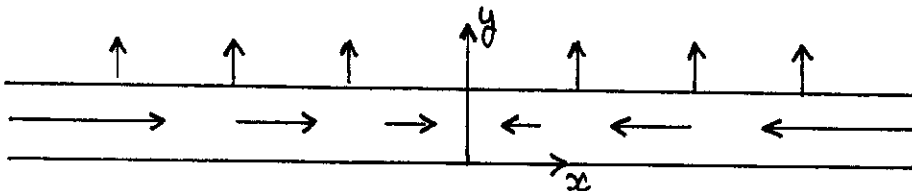
On désigne ici par  $y$  l'axe normal au fond et à la plaque, et on fait appel au potentiel complexe de l'écoulement  $f(z, t) = \Phi(x, y, t) + i \Psi(x, y, t)$  où  $z = x + i y$ .

On se place dans le cadre asymptotique où l'espace interstitiel  $d$  est très petit devant la largeur  $2b$  de la plaque, et on utilise la méthode des développements asymptotiques raccordés. Le domaine fluide est décomposé en trois sous-domaines :

- le domaine 1, sous la plaque
- le domaine 2, au débouché de l'interstice
- le domaine 3, extérieur.

On détermine la forme générale du potentiel complexe dans chaque sous-domaine, puis on effectue le raccordement.

### Domaine 1 (sous la plaque)



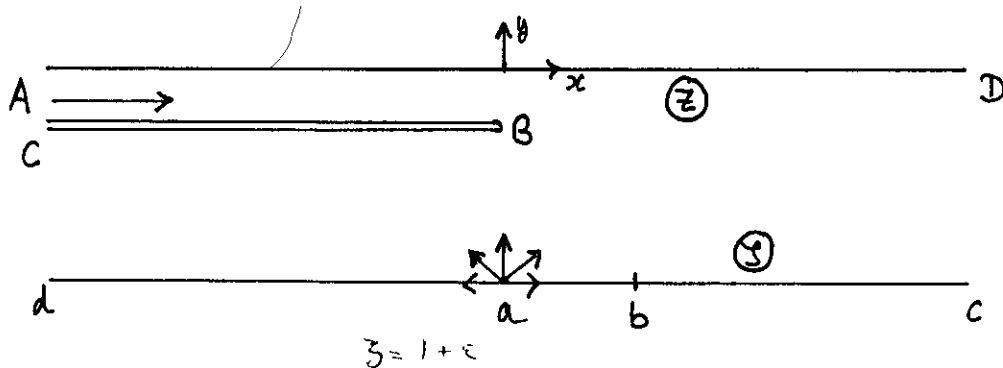
Dans ce domaine on ne voit pas les extrémités de la plaque. Le potentiel complexe  $f_1$  s'écrit simplement :

$$f_1(z, t) = -\frac{U(t)}{2d(t)} z^2 + A_1(t) \quad (8)$$

On vérifie en effet que la vitesse complexe  $u_1 - i v_1 = f_1' = -U/d (x + i y)$  satisfait  $v_1 = 0$  en  $y = 0$  et  $v_1 = U$  en  $y = d$ . L'inconnue est la constante  $A_1(t)$  qui sera déterminée par le raccordement.

### Domaine 2 (débouché)

La plaque apparaît comme semi-infinie. On utilise une méthode classique de transformation conforme où, pour se placer dans une situation plus familière, on met la demi-droite sous l'axe  $x$ . La vitesse propre de la plaque ( $U$ ) étant petite devant la vitesse d'éjection du fluide ( $U b/d$ ), on la considère fixe.



On vérifie que la transformation :

$$\frac{dz}{d\zeta} = -\frac{d}{\pi} \frac{\zeta - 1}{\zeta} \quad (9)$$

qui s'intègre en

$$z = -\frac{d}{\pi} (\zeta - 1 - \ln \zeta) - i d \quad (10)$$

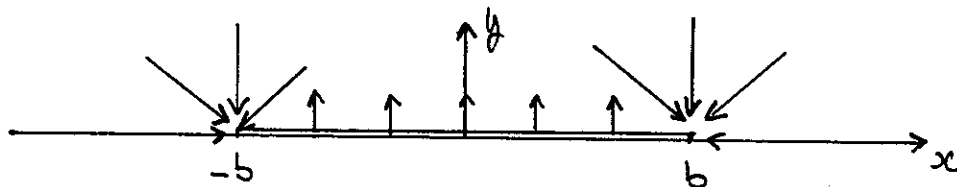
fait correspondre le demi-plan  $\text{Im}(\zeta) > 0$  au domaine  $z$  représenté au-dessus.

Dans le plan  $\zeta$  l'écoulement est simplement celui dû à une source à l'origine, de demi-débit  $-b U$  :

$$f_2(\zeta, t) = -\frac{b U(t)}{\pi} \ln \zeta + A_2(t) \quad (11)$$

Si on inverse le signe de la transformation (10) on se ramène à l'extrémité gauche de la plaque.

### Domaine 3 (extérieur)



Dans ce domaine la plaque apparaît posée sur l'axe  $y = 0$ . La composante suivant  $y$  de la vitesse fluide vérifie, sur l'axe réel,  $v = 0$  pour  $|x| > b$  et  $v = U$  pour  $|x| < b$ , cependant que l'on a deux puits en  $x = \pm b$ , de demi-débit  $-b U$ .

Le potentiel complexe de l'écoulement s'écrit alors :

$$f_3(z, t) = \frac{U(t)}{\pi} \int_{-b}^b \ln(z - \zeta) d\zeta - \frac{U(t) b}{\pi} \ln(z - b) - \frac{U(t) b}{\pi} \ln(z + b) + A_3(t) \quad (12)$$

soit :

$$f_3(z, t) = \frac{U(t)}{\pi} [z \ln(z + b) - z \ln(z - b) - 2b] + A_3(t) \quad (13)$$

le comportement à l'infini de  $f_3$  étant en  $f_3 = b^2 U/(\pi z) + A_3 + O(z^{-2})$ .

Sans perte de généralité on peut supposer nulle la constante  $A_3$  qui représente la surpression dynamique appliquée à l'infini, cette surpression se faisant, *in fine*, ressentir également des deux côtés de la plaque.

### Raccordement entre les sous-domaines 2 et 3

Ce raccordement va permettre de déterminer la constante  $A_2$ . On écrit que le comportement de  $f_3$ , au voisinage du point  $(-b, 0)$  est identique à celui de  $f_2$  à l'infini extérieur du débouché de la plaque.

On fait  $z = -b + \epsilon$  dans  $f_3$ , ce qui donne :

$$f_3(-b + \epsilon) = \frac{U}{\pi} [-b \ln \epsilon + b \ln 2b + i \pi b - 2b + O(\epsilon \ln \epsilon)]$$

Dans le domaine 2 l'infini extérieur correspond à  $\zeta \rightarrow \infty$ . On a alors  $z = d \zeta / \pi$  (le signe de la transformation (10) ayant été changé). D'où :

$$f_2 = -\frac{U b}{\pi} \ln z - \frac{U b}{\pi} \ln \frac{\pi}{d} + A_2$$

Le raccordement avec la solution extérieure donne :

$$A_2 = \frac{U b}{\pi} \left( \ln \frac{2 \pi b}{d} + i \pi - 2 \right) \quad (14)$$

### Raccordement entre les sous-domaines 1 et 2

On détermine d'abord le comportement de la solution intérieure au voisinage de l'extrémité. Posant  $z = -b + \epsilon$  on obtient :

$$f_1 = \frac{U b}{d} \epsilon + A_1 - \frac{U b^2}{2d} + O(\epsilon^2)$$

Pour le sous-domaine 2 l'intérieur sous la plaque correspond à  $\zeta \rightarrow 0$ . On a alors  $\zeta = \exp(-\pi z/d)$  et

$$f_2 = \frac{U b}{d} z + A_2$$

On en déduit la valeur de la constante  $A_1$  :

$$A_1 = A_2 + \frac{U b^2}{2d} = \frac{U b^2}{2d} + \frac{U b}{\pi} \left( \ln \frac{2 \pi b}{d} + i \pi - 2 \right) \quad (15)$$

Ceci complète le raccordement.

### Masse ajoutée

Elle s'obtient en faisant  $U = 1$  et en calculant :

$$M_a = \rho \oint_P \Phi n_z dl = \rho \int_{-b}^b \text{Re}(f_1 - f_3) dx \quad (16)$$

Tous calculs faits on obtient :

$$M_a = \rho b^2 \left[ \frac{2b}{3d} + \frac{2}{\pi} \left( \ln \frac{2 \pi b}{d} - 1 \right) + \frac{d}{3b} \right] \quad (17)$$

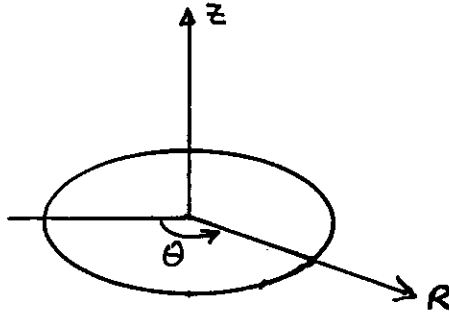
On peut alors obtenir les efforts par l'application de la relation (6), tenant compte de ce que :

$$\frac{dM_a}{dt} = \frac{dM_a}{dz} \frac{dz}{dt} = U \frac{dM_a}{dz}$$

où  $z$  est la distance au fond ( $d$ ).

### I.3 Cas tridimensionnel

Le cas bidimensionnel traité ci-dessus s'applique à une plaque rectangulaire de grande longueur devant sa largeur, via une théorie des tranches. On considère maintenant le cas tridimensionnel d'une plaque circulaire, de rayon  $a$ , et on suit la même démarche. On se place en coordonnées cylindriques  $(R, z)$ , l'angle polaire  $\theta$  n'intervenant pas dans notre problème, par raison de symétries. Les différents sous-domaines sont les mêmes que dans le cas 2D, et on commence par y établir la forme générale du potentiel  $\Phi(R, z, t)$ .



#### Sous-domaine 1 (sous la plaque)

On établit aisément que le potentiel de l'écoulement sous la plaque (loin de son bord) est de la forme :

$$\Phi_1(R, z, t) = \frac{U(t)}{2d(t)} \left( z^2 - \frac{R^2}{2} \right) + A_1(t) \quad (18)$$

de telle manière que  $\Phi_{1z}(R, 0, t) = 0$ ,  $\Phi_{1z}(R, d, t) = U$  et que le Laplacien  $\Phi_{zz} + \Phi_{RR} + \Phi_R/R$  soit nul.

#### Sous-domaine 2 (bord de la plaque)

Dans ce sous-domaine, l'échelle des longueurs est la distance intersticielle  $d$ . Si on définit les coordonnées locales sans dimension :

$$x = \frac{R - a}{d} \quad y = \frac{z}{d}$$

la condition Laplacien nul s'écrit :

$$\Phi_{yy} + \Phi_{xx} + \frac{d}{a} \Phi_x = 0$$

Lorsque l'espace intersticiel  $d$  devient très petit devant le rayon  $a$ , le dernier terme devient négligeable ce qui signifie que l'écoulement est localement bidimensionnel. Le potentiel est donc le même que dans le cas précédent, le demi-débit de la source devenant :

$$\frac{Q}{2} = -\frac{\pi a^2 U}{2\pi a} = -\frac{a U}{2}$$

D'où le potentiel complexe de l'écoulement, dans le plan complexe  $\zeta$  :

$$f_2(\zeta, t) = -\frac{U(t) a}{2\pi} \ln \zeta + A_2(t) \quad (19)$$

### Sous-domaine 3 (extérieur)

A nouveau on combine sources réparties sur la surface de la plaque et puits sur sa circonférence, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \Phi_3(R, z, t) = & -\frac{U(t)}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{z^2 + R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha}} \\ & + \frac{U(t) a^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{z^2 + R^2 + a^2 - 2Ra \cos \alpha}} + A_3(t) \end{aligned} \quad (20)$$

où, à nouveau, sans perte de généralité, on peut prendre  $A_3$  égal à zéro.

### Raccordement entre les sous-domaines 2 et 3

Comme dans le cas 2D, il s'agit d'exprimer le comportement du potentiel  $\Phi_3$ , lorsqu'on se rapproche du bord de la plaque, et de l'identifier à celui du potentiel  $\Phi_2$ , lorsqu'on s'en éloigne.

Concernant  $\Phi_3$ , on considère d'abord la contribution des puits distribués à la circonférence. Soit donc à évaluer le comportement de l'intégrale :

$$I_{32} = a \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{z^2 + R^2 + a^2 - 2Ra \cos \alpha}}$$

lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , où  $R = a(1 + \epsilon \cos \beta)$ ,  $z = a \epsilon \sin \beta$ . On met  $I_{32}$  sous la forme :

$$I_{32} = \frac{2a}{\sqrt{z^2 + (R-a)^2}} \int_0^\pi \frac{d\alpha}{\sqrt{1 + \frac{4aR}{z^2 + (R-a)^2} \sin^2 \alpha/2}} = \frac{4a}{\sqrt{z^2 + (R-a)^2}} K(-m)$$

où  $m = 4aR/(z^2 + (R-a)^2)$ , et où  $K$  est l'intégrale elliptique complète de première espèce.

Lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$   $I_{32}$  se comporte comme :

$$I_{32} = \frac{4}{\epsilon} K\left(-\frac{4}{\epsilon^2}\right)$$

Or (Abramowitz & Stegun, 1970, 17.4.17) :

$$K(-m) = \frac{1}{\sqrt{1+m}} K\left(\frac{m}{m+1}\right)$$

Donc :

$$K\left(-\frac{4}{\epsilon^2}\right) = \frac{\epsilon}{2} K\left(1 - \frac{\epsilon^2}{4}\right) \quad \text{pour } \epsilon \rightarrow 0$$

Et (Abramowitz & Stegun, 1970, 17.3.26) :

$$\lim_{m \rightarrow 1} \left[ K(m) - \frac{1}{2} \ln \frac{16}{1-m} \right] = 0$$

On en déduit le comportement asymptotique de  $I_3$  :

$$I_{32} \simeq -2 \ln \epsilon + 6 \ln 2 \quad \text{pour } \epsilon \rightarrow 0 \quad (21)$$

Il reste à évaluer la première intégrale dans (20), soit, à un facteur multiplicatif près :

$$I_{31} = \iint_S \frac{1}{PQ} dS_Q$$



Soit, lorsque le point  $P$  est dans le plan de la plaque :

$$I_{31} = \int_C \frac{\vec{PQ}}{PQ} \cdot \vec{n} dl_Q$$

où l'intégration est effectuée sur la circonférence, la normale étant dirigée vers l'extérieur. On obtient, lorsque  $P$  est situé sur la circonférence :

$$I_{31} = 4a \quad (22)$$

De (20), (21) et (22) on déduit le comportement de  $\Phi_3$  au voisinage du bord de la plaque :

$$\Phi_3 \simeq -\frac{Ua}{2\pi} \left( \ln \frac{\rho}{a} - 4 + 3 \ln 2 \right) \quad (23)$$

où l'on a remplacé  $a + \epsilon$  par  $\rho$ , distance radiale (dans le plan  $(R, z)$ ) au débouché de la plaque. Le comportement lointain de  $\Phi_2$ , d'après (19) et l'analyse faite en 2D, est :

$$\Phi_2 \simeq -\frac{Ua}{2\pi} \ln \frac{\pi\rho}{d} + A_2 \quad (24)$$

Identifiant les deux expressions on obtient la constante  $A_2$  :

$$A_2 = \frac{Ua}{2\pi} \left[ -4 + \ln \frac{8\pi a}{d} \right] \quad (25)$$

### Raccordement entre les sous-domaines 1 et 2

Posant  $R = a + \epsilon$ , on obtient le comportement de  $\Phi_1$  au débouché de l'espace interstitiel :

$$\Phi_1 \simeq -\frac{Ua}{2d} \epsilon - \frac{Ua^2}{4d} + A_1 \quad (26)$$

Cependant que le potentiel complexe de la solution intermédiaire est :

$$f_2 \simeq \frac{Ua}{2d} z + A_2 \quad (27)$$

où l'on doit changer  $x$  en  $-x$  pour effectuer le raccordement puisque les orientations sont différentes (direction radiale pour  $\Phi_1$ , extrémité gauche de la plaque pour  $\Phi_2$ ). On obtient donc :

$$A_1 = A_2 + \frac{Ua^2}{4d} = \frac{Ua}{2\pi} \left[ -4 + \ln \frac{8\pi a}{d} \right] + \frac{Ua^2}{4d} \quad (28)$$

### Masse ajoutée

Elle s'obtient en posant  $U = 1$  et en calculant l'intégrale :

$$M_a = \rho \iint_S (\Phi_1 - \Phi_3) dS$$

Le calcul de la contribution de  $\Phi_1$  ne pose pas de problème.

En ce qui concerne  $\Phi_3$ , le calcul de la contribution du deuxième terme dans (20) est similaire à celui effectué dans le raccordement entre  $\Phi_3$  et  $\Phi_2$ . Pour le calcul de la contribution du premier terme on est amené à évaluer l'intégrale :

$$I = \iint_S \iint_S \frac{dS_P dS_Q}{PQ}$$

que l'on peut transformer de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_S dS_P \int_C \frac{\vec{PQ}}{PQ} \cdot \vec{n}_Q dl_Q \\
 &= - \int_C \vec{n}_Q dl_Q \cdot \iint_S \frac{\vec{QP}}{QP} dS_P \\
 &= - \int_C \vec{n}_Q dl_Q \cdot \int_C QP \vec{n}_P dl_P \\
 &= - \int_C \int_C QP \vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q dl_P dl_Q
 \end{aligned}$$

dont le calcul donne  $I = 16 \pi a^3/3$ .

On obtient finalement pour la masse ajoutée l'expression suivante :

$$M_a = \rho a^3 \left( \frac{\pi a}{8d} + \frac{1}{2} \ln \frac{8\pi a}{d} - \frac{4}{3} + \frac{\pi d}{2a} \right) \quad (29)$$

L'effort hydrodynamique sur la plaque étant :

$$F = -\rho a^3 \left( \frac{\pi a}{8d} + \frac{1}{2} \ln \frac{8\pi a}{d} - \frac{4}{3} + \frac{\pi d}{2a} \right) \frac{dU}{dt} + \frac{1}{2} \rho a^2 \left( \frac{\pi a^2}{8d^2} + \frac{1}{2} \frac{a}{d} - \frac{\pi}{2} \right) U^2 \quad (30)$$

### Validation numérique

Bien qu'on ait argumenté en introduction que les modèles numériques soient sujets à des problèmes de précision dans le cas de faible épaisseur et de faible distance au fond marin, on présente ici une comparaison entre les masses ajoutées calculées par le programme COREV de l'IFP et celles fournies par l'expression analytique (29) ci-dessus. De fait, COREV est basé sur une formulation par éléments finis qui n'est pas incommodée par la géométrie considérée ici, au contraire des modèles basés sur la méthode d'équation intégrale. Deux épaisseurs de plaque ont été modélisées avec COREV, correspondant à des ratios  $e/a$  de 0.05 et 1.0, où  $e$  est l'épaisseur. Les résultats sont portés sur la figure 2, qui représente la masse ajoutée adimensionnée  $M_a/(\rho a^3)$  en fonction du rapport  $d/a$  de l'interstice au rayon. On rappelle qu'en fluide illimité la masse ajoutée d'un disque est égale à  $8/3 \rho a^3$ . Aux faibles distances au fond marin considérées ici les masses ajoutées sont considérablement supérieures.

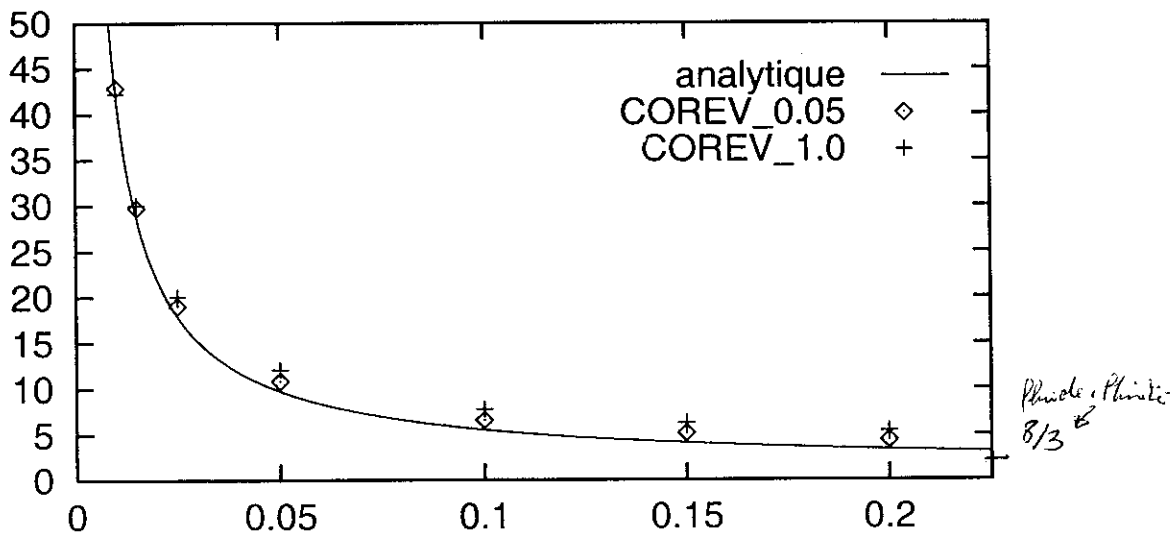


Figure 2. Masse ajoutée sans dimension  $M_a/(\rho a^3)$  en fonction du ratio  $d/a$

On constate que les valeurs numériques fournies par COREV pour la plus faible épaisseur viennent se placer sur la courbe théorique lorsque le ratio  $d/a$  tend vers zéro. Les résultats donnés par COREV et la théorie développée ici sont donc mutuellement validés. On observe aussi que les deux épaisseurs de plaque conduisent à des masses ajoutées très voisines, particulièrement aux faibles rapports  $d/a$ .

## II. COMPARAISON AVEC L'EXPERIENCE

### II.1 Description des essais

Les essais ont été réalisés par Sirehna dans les installations de l'Ecole Centrale de Nantes. La figure 3 illustre le montage expérimental. Un modèle à l'échelle géométrique du huitième d'une embase réelle simplifiée (rayon : 2 m, hauteur : 2 m) est mis en mouvement vertical au voisinage du fond du bassin à houle de l'ECN, à l'aide du Générateur de Mouvements Plans (GMP).

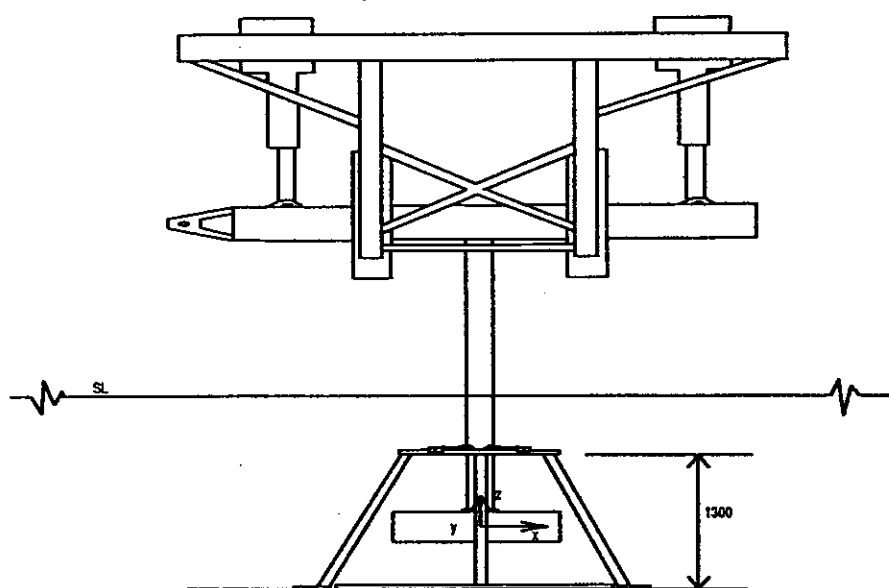


Figure 3. Montage expérimental

Les mouvements forcés sont sinusoïdaux, de périodes (au réel, suivant l'échelle de Froude) 5 et 8 secondes, et d'amplitudes variant entre cinq centimètres et un mètre (au réel), pour des distances moyennes au fond de 5, 1 et 0.176 mètres. La profondeur d'eau simulée est de 16.8 mètres.

Les efforts hydrodynamiques ressentis par l'embase sont mesurés par une balance à quartz. Le mouvement vertical est mesuré au niveau du vérin actionneur. Sur l'ensemble des essais il a été vérifié que les mouvements obtenus étaient conformes aux consignes, avec une précision de l'ordre du millimètre.

### II.2 Comparaison entre efforts mesurés et calculés

La théorie proposée s'applique préférentiellement lorsque l'embase est mise en mouvement forcé à la distance moyenne de 17.6 centimètres, la ratio  $d/a$  restant alors toujours suffisamment petit. On considère ici l'essai référencé H3LI13, où la période d'oscillation est de 8 secondes et l'amplitude de 15 centimètres.

On présente d'abord, sur la figure 4, le signal  $d(t)/a$  (en trait continu), et les deux composantes de l'effort apparaissant dans les expressions (6) et (30) : le terme  $-M_a dU/dt$  et le terme  $-1/2 U dM_a/dt$ , tous deux adimensionnalisés par  $50 \rho a^3 A \omega^2$ , où  $A$  est l'amplitude d'oscillation (0.15 m) et  $\omega$  la pulsation. On constate que le premier terme est dominant, particulièrement lorsque l'embase rase le fond du bassin.

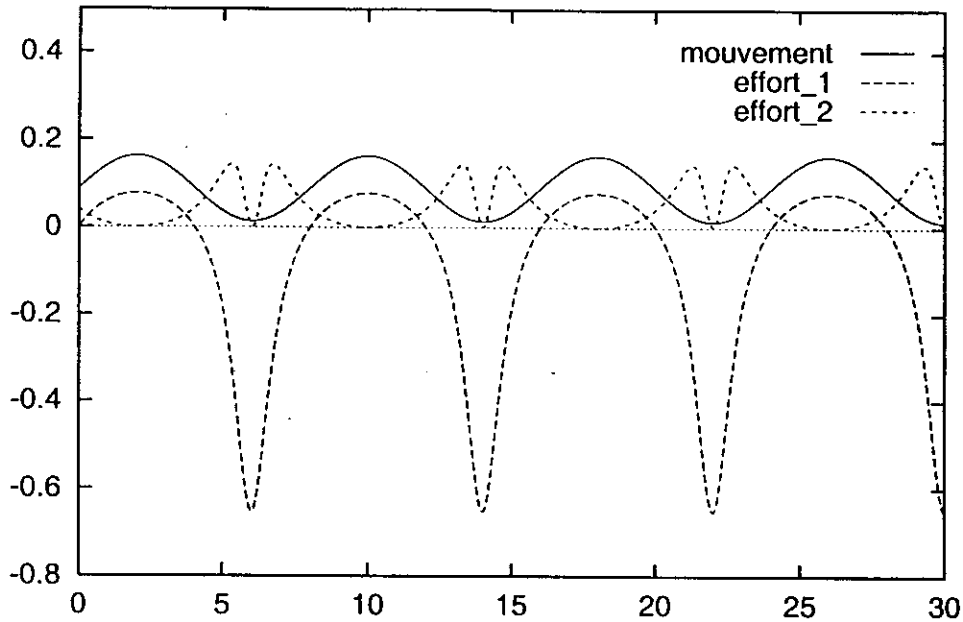


Figure 4. Essai H3LI13. Mouvement de l'embase et composantes de l'effort théorique

La figure 5, tirée du rapport d'analyse des essais (Guérin, 1997), compare l'effort théorique (la somme des deux courbes en tirets dans la figure 4) à l'effort mesuré (l'échelle verticale est différente, les conventions de mise sous forme adimensionnelle n'étant pas les mêmes). On constate un très bon accord entre les deux courbes. En particulier les minima de l'effort hydrodynamique concordent très bien.

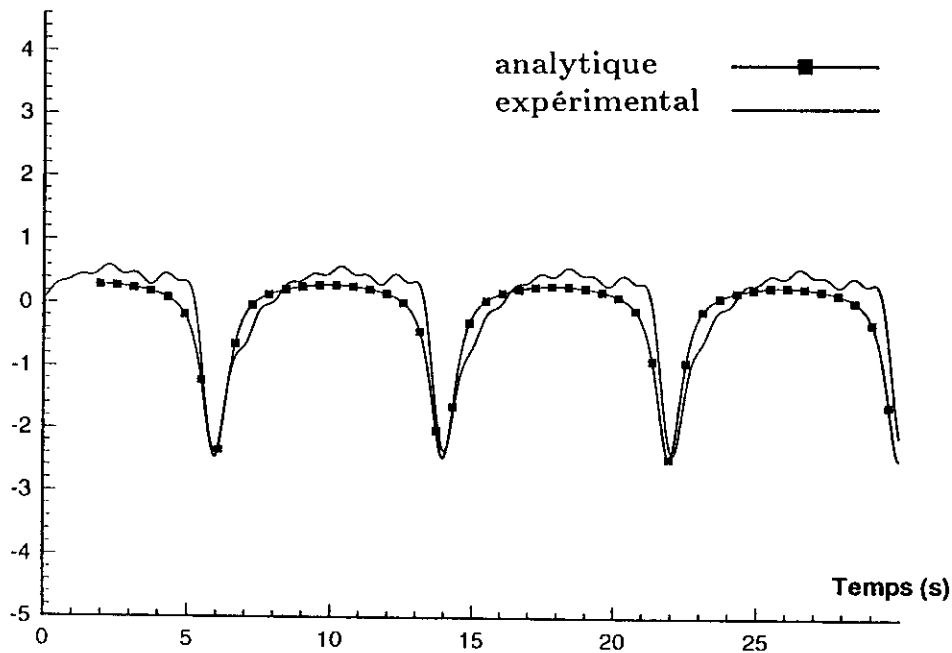


Figure 5. Essai H3LI13. Comparaison entre effort théorique et effort mesuré

## Effets visqueux

On note sur la figure 5 une légère asymétrie de la courbe expérimentale, par rapport à la courbe théorique. Il est tentant d'attribuer cet écart à des effets visqueux, liés à la séparation de l'écoulement aux angles vifs de l'embase. Très intuitivement on peut estimer que ces efforts sont proportionnels au carré (corrigé du signe) de la vitesse radiale de l'écoulement au bord inférieur de l'embase, et à une surface d'application dont l'ordre de grandeur est la circonférence multipliée par l'espace intersticiel, soit :

$$F_D = -\frac{1}{2} \rho C_D (2\pi a d) \frac{U a}{2d} \left| \frac{U a}{2d} \right| = -\frac{\pi}{2} \rho C_D \frac{a^3}{d} U |U| \quad (31)$$

où le coefficient  $C_D$  est d'ordre 1.

La figure 6 montre l'effort théorique initial et l'effort corrigé lorsqu'on prend un coefficient de traînée  $C_D$  égal à 1.5. On constate que la modification apportée rapproche le signal de l'enregistrement expérimental.

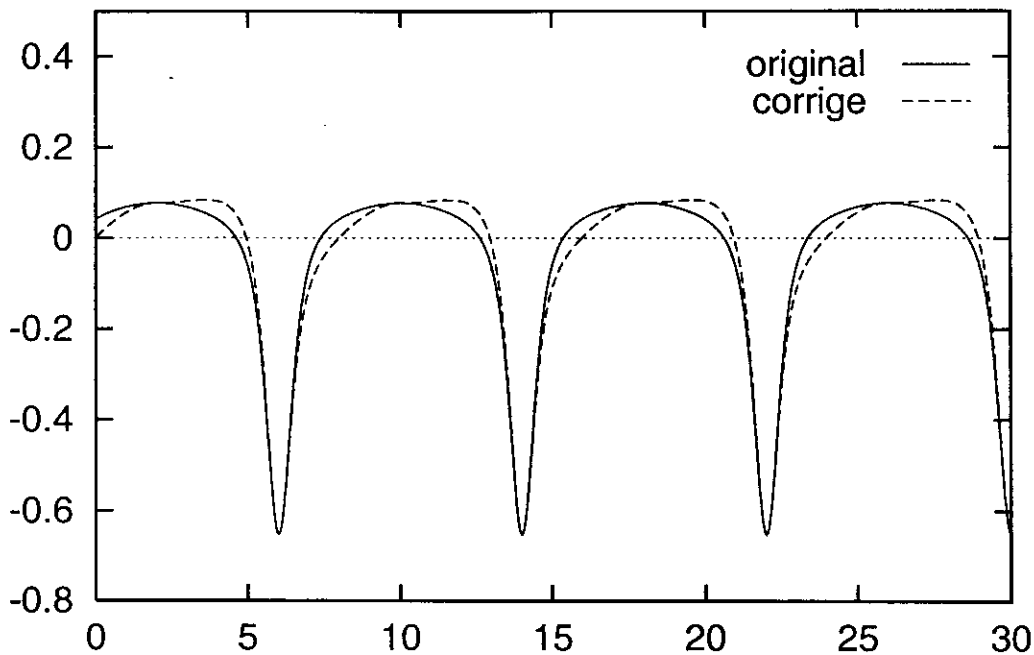


Figure 6. Essai H3L113. Effort théorique sans et avec correction due à la traînée

Faute d'espace disponible on ne présente pas d'autre comparaison entre valeurs mesurées et prédites de l'effort hydrodynamique. Le cas présenté ici est typique des autres cas d'essais et l'accord théorie expérience est généralement du même ordre.

## CONCLUSION

L'application de la théorie potentielle et de la méthode des développements asymptotiques raccordés a permis d'exprimer de façon analytique les efforts hydrodynamiques sur des plaques planes au voisinage d'un fond horizontal, mises en mouvement perpendiculairement à celui-ci. Un bon accord a été obtenu avec les mesures effectuées lors d'essais réalisés sur des cylindres aplatis (de hauteur égale au rayon), à fond lisse. Les effets visqueux sont limités et peuvent être pris en compte *a posteriori*, par une approche à la Morison. Il est permis de penser que, pour des plaques de très faible épaisseur, les forces de traînée deviendraient plus appréciables. Des essais complémentaires ont montré qu'ils peuvent devenir dominants si des appendices sont disposés sur le fond de l'embase.

## Remerciements

Ils sont adressés à Pierre Guével pour quelques rappels sur les transformations d'intégrales de surface et à l'IFP pour l'accès au programme COREV.

## Références

- Abramowitz, M. & Stegun, I.A. 1970. *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications.
- Guérin, P. 1997. "TPG500. Analyse des essais sur un pied en oscillations forcées. Nantes 1997", rapport Principia RET. 75.206.01.
- Newman, J.N. 1977. *Marine Hydrodynamics*, MIT Press.