

7<sup>e</sup> JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE

MARSEILLE - 8, 9, 10 MARS 1999

## Résonance non-linéaire entre une onde solitaire interne et une onde courte de surface

H. Michallet<sup>1</sup> et F. Dias<sup>2</sup>

1) Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels (UJF-INPG-CNRS),  
BP53, 38041 Grenoble Cedex 9, France  
Fax: +33 4 76 82 52 71; Email: michalle@hmg.inpg.fr

2) Institut Non-Linéaire de Nice (UMR 6618 - CNRS & UNSA),  
1361, route des Lucioles, 06560 Valbonne, France  
Fax: +33 4 93 65 25 17; Email: dias@inln.cnrs.fr

### Résumé

Nous nous intéressons aux ondes solitaires généralisées résultant de la résonance non-linéaire d'une onde solitaire interne avec une houle de surface. Ce phénomène, caractérisé par un pulse central et des oscillations à l'infini, permet de mieux comprendre la dissipation des ondes longues internes. Nous présentons une méthode numérique de résolution des équations d'Euler qui permet de décrire ce phénomène. Les résultats numériques indiquent que l'amplitude des oscillations n'est jamais zéro et peut, dans certaines conditions, être du même ordre de grandeur que l'amplitude du pulse central. En outre, nous étendons la méthode numérique aux ondes solitaires généralisées se propageant dans un milieu tri-couche.

### Summary

We consider generalized solitary waves due to the nonlinear resonance between an internal solitary wave and a short surface wave. These waves are characterized by a solitary pulse with in addition nondecaying oscillations in the far field. A study of these waves can lead to a better understanding of the dissipation of long internal waves. We present a numerical method to solve the Euler equations and compute generalized solitary waves. The numerical results show that the amplitude of the oscillations is never zero and that in some conditions it can be of the same order as the amplitude of the solitary pulse. Besides, we extend the numerical method to generalized waves propagating along the interfaces of a three-fluid system.

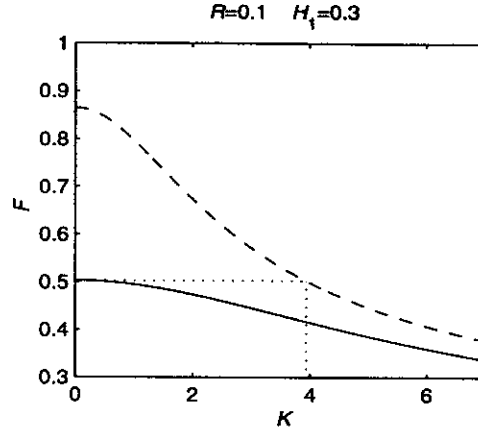


Figure 1: Diagramme de dispersion, montrant les deux branches  $F_{\text{rapide}}$  (---) et  $F_{\text{lent}}$  (—) en fonction du nombre d'onde  $K$  obtenu par (2) avec  $F = c/\sqrt{g(h_1 + h_2)}$  et  $K = k(h_1 + h_2)$ , où  $(h_1 + h_2)$  est la profondeur totale.

## 1 Introduction

Les ondes longues internes, générées par l'interaction de la marée barotrope avec la marche continentale, se propagent à l'interface qui sépare la thermocline de l'océan profond. Leur dissipation et leur interaction avec les ondes de surface restent mal comprises. Leur dynamique est pourtant importante pour l'environnement (morphodynamique côtière, mélange et transport des polluants et nutriments (Sandstrom & Elliott, 1984), etc...) et pour certaines industries. En effet, les réserves naturelles d'hydrocarbure conduisent les compagnies pétrolières à forer à la limite des plateaux continentaux. L'énergie des ondes solitaires internes est particulièrement importante dans ces régions. La propagation des ondes solitaires internes est caractérisée par un cisaillement important au niveau de l'interface, et peut donc contribuer à endommager les structures off-shore.

Nous nous intéressons dans cette étude à l'existence d'ondes solitaires non-locales ou ondes solitaires généralisées. Elles sont caractérisées par un pulse central et des oscillations à l'infini. Elles ont d'abord été étudiées dans le contexte des ondes de surface de capillarité-gravité (*e.g.* Vanden-Broeck, 1991). Dans le cas présent, il s'agit d'une onde solitaire interne à laquelle sont associées des oscillations du mode barotrope. L'onde généralisée résulte donc de la résonance d'une onde longue interne avec une onde courte de surface.

La relation de dispersion pour des ondes périodiques dans un système à deux fluides et une condition de surface libre s'écrit:

$$(1 + RT_1T_2)c^4 - \frac{g}{k}(T_1 + T_2)c^2 + \frac{g^2}{k^2}(1 - R)T_1T_2 = 0, \quad (1)$$

où  $T_1 = \tanh(kh_1)$ ,  $T_2 = \tanh(kh_2)$ ,  $R = \rho_2/\rho_1$  (ici  $R < 1$ ). (1) définit deux modes (rapide et lent) dont les vitesses de phase sont:

$$c_{\text{rapide/lent}}^2 = \left(\frac{g}{k}\right) \frac{T_1 + T_2 + /- \sqrt{(T_1 + T_2)^2 - 4(1 - R)T_1T_2(1 + RT_1T_2)}}{2(1 + RT_1T_2)}. \quad (2)$$

La relation de dispersion (1) est tracée Fig. 1. La vitesse correspondant à la limite  $k = 0$  pour le mode lent est:

$$c_{\text{lent}}^2(0) = g \frac{h_1 + h_2 - \sqrt{(h_1 + h_2)^2 - 4h_1h_2(1 - R)}}{2}. \quad (3)$$

A cette vitesse peuvent également se propager des ondes périodiques du mode rapide dont le nombre d'onde adimensionnel serait  $K \sim 4$  sur l'exemple de la figure 1.

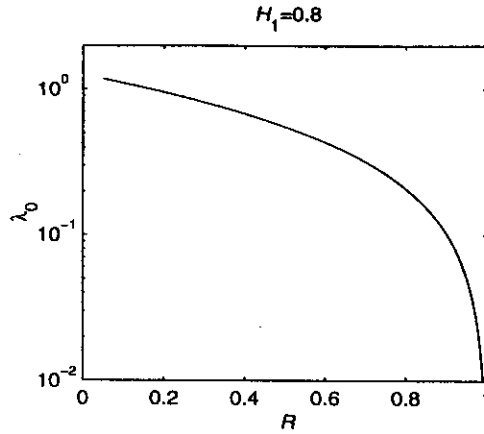


Figure 2: Longueur d'onde adimensionnelle des oscillations  $\lambda_0 = 2\pi/K_0$  en fonction du rapport de densité pour des ondes linéaires.

Sur la figure 2, nous représentons  $\lambda_0$  en fonction de  $R$ , où  $\lambda_0 = 2\pi/K_0$  (avec  $K_0 = k_0(h_1+h_2)$ ) est calculé pour  $c_{\text{rapide}}(k_0) = c_{\text{lent}}(0)$  la célérité des ondes solitaires internes linéaires. Ce sont donc les oscillations de plus petite longueur d'onde que l'on peut rencontrer dans l'interaction avec une onde solitaire interne.  $\lambda_0$  décroît avec  $R$ , c'est pourquoi la plupart des calculs ont été menés pour  $R = 0.1$  : il y a alors plus de points de collocation par longueur d'onde pour bien décrire le phénomène avec la méthode numérique décrite en section 2. Pour des rapports de densité de l'ordre de ceux rencontrés dans les océans,  $R = 0.99$  par exemple, la figure 2 donne  $\lambda_0 \sim 0.01$ . Dans un océan de profondeur totale  $(h_1 + h_2) \sim 1000$  m, une onde longue généralisée aurait des oscillations de longueur de l'ordre de 10 m.

Funakoshi & Oikawa (1986) ont développé une méthode numérique de résolution des équations d'Euler pour décrire les ondes solitaires internes. Dans la section 2, nous présentons cette méthode numérique adaptée à la description du phénomène qui nous intéresse.

Des solutions de type ondes solitaires généralisées sont présentées dans la section 3. Nous discutons de leur existence à l'aide des 4 paramètres qui les définissent: le rapport d'épaisseurs de couches, le rapport de densités, la vitesse de phase et l'amplitude des oscillations loin du pulse central.

## 2 Formulation

La méthode numérique employée a d'abord été développée par Funakoshi & Oikawa (1986) dans une configuration de toit rigide, puis adaptée au cas de surface libre par Michallet & Barthélemy (1998a; 1998b). Nous en décrivons ici les grandes lignes.

Le principe de la méthode est de considérer une onde périodique qui vérifie exactement les équations d'Euler. La longueur du domaine de calcul est grande devant la profondeur totale afin de décrire des ondes de type solitaire. Les fonctions inconnues sont cherchées sous forme de séries de Fourier (voir Holyer, 1979; Rienecker & Fenton, 1981).

Les notations sont indiquées sur la figure 3. Nous considérons un milieu bidimensionnel de profondeur totale  $H_1 + H_2 = 1$ . L'interface  $y = \eta_1(\theta)$  sépare le milieu en deux couches de densités  $\rho_1$  et  $\rho_2$  (on note:  $R = \rho_2/\rho_1$ ). Le niveau moyen de l'interface est  $H_1$ . Nous considérons une onde progressive de longueur d'onde  $L$ . L'écoulement est supposé incompressible et irrotationnel dans chaque couche: nous introduisons alors les potentiels de vitesse  $\phi_1$  et  $\phi_2$ . Les équations dans le référentiel se déplaçant avec l'onde sont:

$$0 = \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi_1, \quad 0 < y < H_1 + \eta_1$$

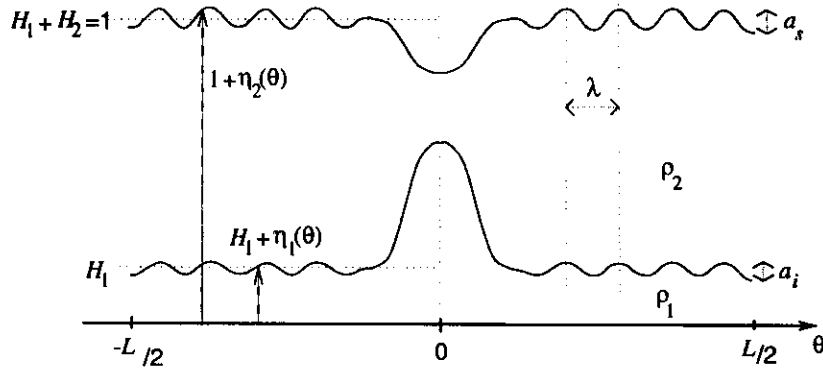


Figure 3: Schéma d'une onde solitaire généralisée et notations:  $R = \rho_2/\rho_1$ ,  $H_1 + H_2 = 1$ .

$$\begin{aligned}
 0 &= \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi_2, \quad H_1 + \eta_1 < y < 1 + \eta_2 \\
 0 &= -F \frac{\partial \eta_2}{\partial \theta} + \frac{\partial \eta_2}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} - \frac{\partial \phi_2}{\partial y}, \quad y = 1 + \eta_2 \\
 0 &= -F \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right)^2 \right] + \eta_2 + B_2, \quad y = 1 + \eta_2 \\
 0 &= -F \frac{\partial \eta_1}{\partial \theta} + \frac{\partial \eta_1}{\partial \theta} \frac{\partial \phi_i}{\partial \theta} - \frac{\partial \phi_i}{\partial y}, \quad i = 1, 2, \quad y = H_1 + \eta_1 \\
 0 &= -F \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} + FR \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} R \left[ \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right)^2 \right] \\
 &\quad + (1 - R)\eta_1 + B_1, \quad y = H_1 + \eta_1 \\
 0 &= \frac{\partial \phi_1}{\partial y}, \quad y = 0.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Les fonctions sont développées en séries de Fourier tronquées:

$$\eta_2(\theta) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \cos(j\kappa\theta), \tag{5}$$

$$\eta_1(\theta) = \sum_{j=1}^N \beta_j \cos(j\kappa\theta), \tag{6}$$

$$\phi_2 = \sum_{j=1}^{N-1} (p_j \sinh[j\kappa(y-1)] + q_j \cosh[j\kappa(y-1)]) \sin(j\kappa\theta), \tag{7}$$

$$\phi_1 = \sum_{j=1}^{N-1} r_j \cosh[j\kappa y] \sin(j\kappa\theta), \tag{8}$$

où  $\kappa = 2\pi/L$  est le nombre d'onde. Les séries (5) et (6) satisfont la symétrie du profil de l'onde. Les fonctions sinh- et cosh- dans (7) et (8) sont imposées par les Laplaciens des potentiels nuls dans chaque couche et l'imperméabilité du fond.

Le problème a  $(5N - 3)$  inconnues plus deux constantes de Bernoulli. Nous avons à résoudre deux équations de Bernoulli (en  $y = h$  et  $y = H$ ) et trois équations d'imperméabilité (deux en  $y = h$  et une en  $y = H$ ) en  $(N + 1)$  points de collocation  $\theta_n = \frac{Ln}{2N}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ . Les trois équations d'imperméabilité sont automatiquement vérifiées en  $\theta_0$  et  $\theta_N$ : on doit résoudre  $(5N - 1)$  équations. Le schéma numérique employé est de type Newton-Raphson. Les calculs ont

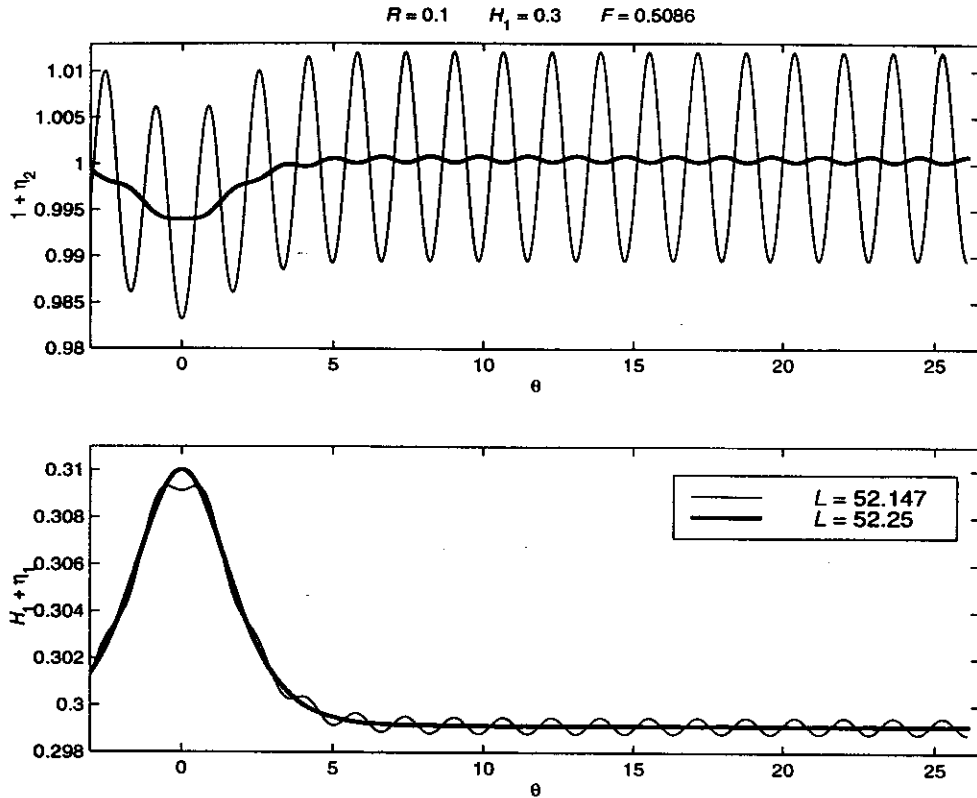


Figure 4: Profils de la surface libre  $1 + \eta_2(\theta)$  et de l'interface  $H_1 + \eta_1$ .

été généralement menés avec  $N = 200$  points de collocation. Nous avons vérifié l'indépendance des résultats avec  $N$ .

### 3 Résultats

La méthode numérique décrite dans la section précédente a été employée pour obtenir des solutions pour plusieurs valeurs de  $R$ ,  $H_1$ ,  $F$  et  $L$ . Il apparaît que, pour chaque valeur de  $R$  et  $H_1$ , il existe plusieurs familles de solutions. Chaque famille est caractérisée par les deux paramètres  $F$  et  $L$ . Puisque nous nous intéressons aux ondes de type solitaire, nous considérons de grandes valeurs de  $L$  ( $40 < L \leq 400$ ). Chaque solution est calculée à partir d'une solution obtenue pour une valeur légèrement différente de  $L$  ou  $F$ .

Les déplacements de l'interface  $h$  et de la surface  $H$  pour deux solutions particulières sont représentés sur la figure 4. Ces solutions sont caractérisées par un pulse central de type onde solitaire, auquel sont associées des oscillations. L'amplitude des oscillations est plus importante sur le signal de surface que sur l'interface, ce qui indique qu'elles sont bien du type barotrope.

La solution tracée en trait fin ( $L = 52.147$ ) présente des oscillations de grande amplitude à la surface, comparée à l'amplitude du pulse  $\eta_2(0)$ . On notera que les solutions se terminent (en  $\theta = L/2$ ) soit par une crête soit par un creux des oscillations par raison de symétrie. Les solutions de la figure 4 correspondent à chacun de ces deux cas pour des valeurs très proches de  $L$ .

Lorsque l'on fait varier  $L$ , l'amplitude des oscillations varie (voir la figure 5). Dans cette configuration de rapport de densités ( $R = 0.1$ ) et de rapport d'épaisseurs de couche ( $H_1 = 0.3$ ), le paramètre  $L$  contrôle l'amplitude des oscillations. On peut alors déterminer nettement un minimum d'amplitude des oscillations qui n'est pas nul (pour  $L/\lambda_0 \simeq n + 1/2$ ,  $n$  entier). Une

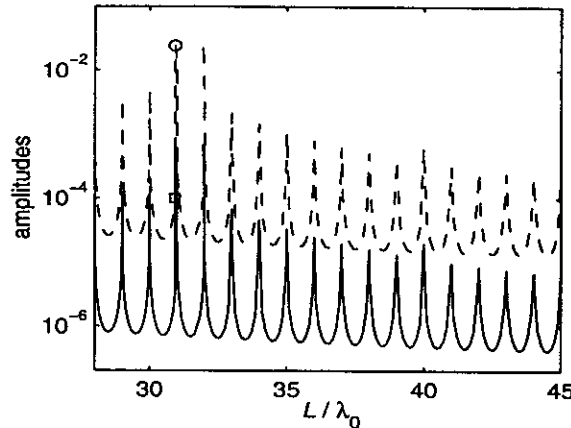


Figure 5: Amplitude des oscillations à l'interface  $a_i$  (—) et à la surface libre  $a_s$  (---) en fonction de  $L/\lambda_0$ . Les symboles ( $\circ$  et  $\square$ ) correspondent aux solutions tracées sur la figure 4 ( $R = 0.1$ ,  $H_1 = 0.3$ ,  $F = 0.5086$ ).

famille de solutions peut être définie par chaque parabolioïde telle que  $n < L/\lambda_0 < n + 1$ , une solution de chaque famille ayant le même nombre d'oscillations. Lorsque  $L \simeq n\lambda_0$ , les solutions sont plus difficiles à obtenir. La résonance non-linéaire tend à faire croître l'amplitude des oscillations et la convergence numérique devient délicate à atteindre.

Si l'on fait varier à présent le nombre de Froude  $F$ , le minimum d'amplitude des oscillations a tendance à augmenter (voir la figure 6). Les solutions peuvent être calculées jusqu'à un certain point où la méthode ne converge plus. Dans le cas  $R = 0.5$  (valeur la plus élevée pour laquelle un nombre raisonnable de points permet de décrire les oscillations – voir figure 2) le minimum d'amplitude des oscillations est plus petit que dans le cas  $R = 0.1$ . On retiendra que ce minimum n'est pas nul et qu'il tend à devenir du même ordre de grandeur que l'amplitude des pulses lorsque l'on s'approche du Froude maximum prédit par la théorie des écoulements conjugués (Mehrotra & Kelly, 1973). On peut donc s'attendre à ce qu'il existe des ondes généralisées présentant des oscillations d'amplitude non négligeable même pour des rapports de densité proches de 1. S'il est aisé de déterminer le minimum d'amplitude des oscillations, il est impossible de prédire un maximum d'amplitude avec la méthode numérique utilisée. Des travaux théoriques récents (Dias & Il'ichev, 1999) tendent à prouver que le cas limite d'une onde solitaire généralisée est une onde périodique sur tout le domaine. Ce cas limite correspondrait à la limite supérieure des pics sur la figure 5. Nous représentons sur la figure 7 le domaine des solutions que nous avons pu obtenir numériquement pour  $R = 0.1$  et  $H_1 = 0.3$ . La courbe inférieure (trait discontinu) correspond à la courbe en trait gras sur la figure 6-a et a été prolongée jusqu'à la valeur du Froude maximum. La courbe supérieure correspondrait à une onde périodique sur tout le domaine. La figure 7 présente ainsi le domaine supposé d'existence des ondes solitaires généralisées pour  $R = 0.1$  et  $H_1 = 0.3$ .

Nous montrons sur la figure 8 la décroissance des coefficients de la série (5) pour deux solutions correspondant à  $R = 0.1$  et  $H_1 = 0.3$ . La figure 8 soulève plusieurs remarques. On note un pic pour  $j = 50$  qui correspond au nombre d'onde des oscillations ( $L/\lambda \simeq 50$  pour ces solutions). Les harmoniques de ce nombre d'onde sont également présents. Lorsque le nombre de Froude est faible, les coefficients  $\alpha_j$  décroissent rapidement. Pour la dernière valeur du nombre de Froude pour laquelle nous arrivons à converger ( $F = 0.5291$ ), les pics correspondant à l'énergie des oscillations deviennent très importants. C'est ce qui rend la convergence numérique difficile à obtenir.

Les résultats précédents correspondent à une configuration de couche inférieure mince ( $H_1 <$

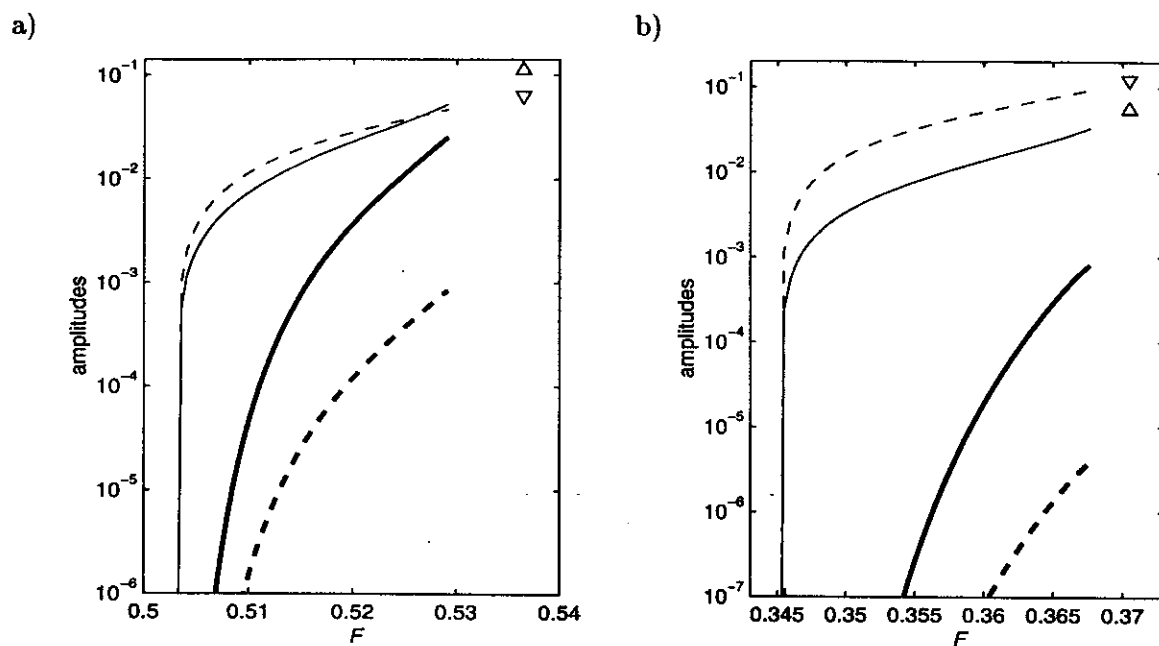


Figure 6: Amplitudes des pulses à la surface  $\eta_2(0)$  (—) et à l'interface  $\eta_1(0)$  (---), amplitudes minimum des oscillations à la surface  $\min(a_s)$  (—) et à l'interface  $\min(a_i)$  (---) en fonction du nombre de Froude  $F$ . Les valeurs de  $\max(\eta_2(0))$  et de  $\max(\eta_1(0))$ , obtenues par la théorie des écoulements conjugués (Mehrotra & Kelly, 1973), sont indiquées ( $\Delta$ ) et ( $\nabla$ ). a)  $L/\lambda \simeq 50$  pour  $R = 0.1$  et  $H_1 = 0.3$ ; b)  $L/\lambda \simeq 100$  pour  $R = 0.5$  et  $H_1 = 0.3$ .

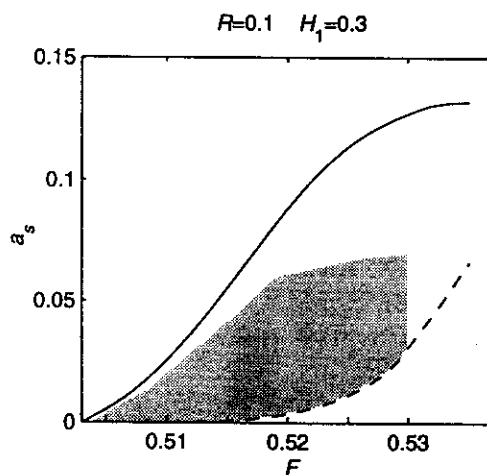


Figure 7: Amplitude des oscillations à la surface libre en fonction du nombre de Froude. La surface grisée correspond aux solutions obtenues numériquement. Sont aussi représentés les valeurs attendues des minima (---) et maxima (—) d'amplitude des oscillations.

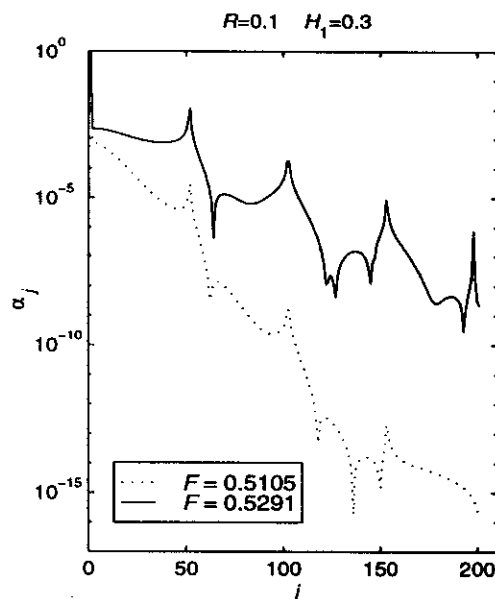


Figure 8: Coefficients de (5).

0.5). Considérons à présent une situation où la couche supérieure est mince:  $H_1 = 0.7$ . Trois solutions sont représentées sur la figure 9. Dans cette situation, le pulse à l'interface est une onde de dépression et la signature des oscillations à l'interface est beaucoup plus nette. On notera par ailleurs que le pulse à la surface peut présenter une bosse unique, double ou triple. Sur la figure 10 est représentée l'évolution des amplitudes en fonction du nombre de Froude. Nous avons dans ce cas réalisé deux séries de calculs pour deux valeurs de  $L/\lambda$  afin de tester la précision des résultats. Les tendances sont les mêmes pour les deux séries, mais tandis que  $L/\lambda \simeq 60$  se rapproche plus du cas limite onde solitaire ( $L \rightarrow \infty$ ),  $L/\lambda \simeq 20$  permet d'obtenir des solutions pour des nombres de Froude plus élevés. Le comportement des courbes est le même que pour  $H_1 = 0.3$  jusqu'à  $F \simeq 0.54$  où le minimum d'amplitude des oscillations se met à décroître et tend apparemment vers zéro. La valeur de  $F \simeq 0.54$  correspond à l'apparition d'une seconde bosse sur le pulse à la surface (solution représentée en trait gras sur la figure 9). Lorsque l'on augmente  $F$  au delà de 0.56, le minimum d'amplitude des oscillations réaugmente jusqu'à l'apparition d'une troisième bosse sur le pulse de surface. Le minimum d'amplitude des oscillations diminue alors à nouveau, atteint un minimum pour  $F \simeq 0.6$  et réaugmente jusqu'à  $F = 0.602$  où nous perdons la convergence numérique.

Nous retiendrons dans ce cas ( $H_1 = 0.7$ ) que la structure des solutions est plus riche que dans le cas où  $H_1 = 0.3$ . Les solutions que nous avons calculées sont probablement entourées de solutions multi-modales plus compliquées: il existe apparemment des ondes longues généralisées de différents types dans une région étroite du plan des paramètres. Il apparaît toutefois que l'onde solitaire classique (bosse unique, niveaux tendant vers zéro à l'infini) n'existe vraisemblablement pas quelle que soit la position de l'interface.

## 4 Système tri-couche

La méthode numérique employée ne permet pas d'obtenir des ondes solitaires généralisées en bicouche pour des rapports de densité pouvant être réalisés expérimentalement. La discrétisation est alors trop lâche pour décrire les oscillations. Un calcul pour  $R = 0.78$  (condition des expériences de Michallet et Barthélemy, 1998a) nécessiterait au moins  $N = 1000$  points de collocation pour avoir plus de 2 points par longueur d'onde d'oscillation (cf. Fig. 2). Il est



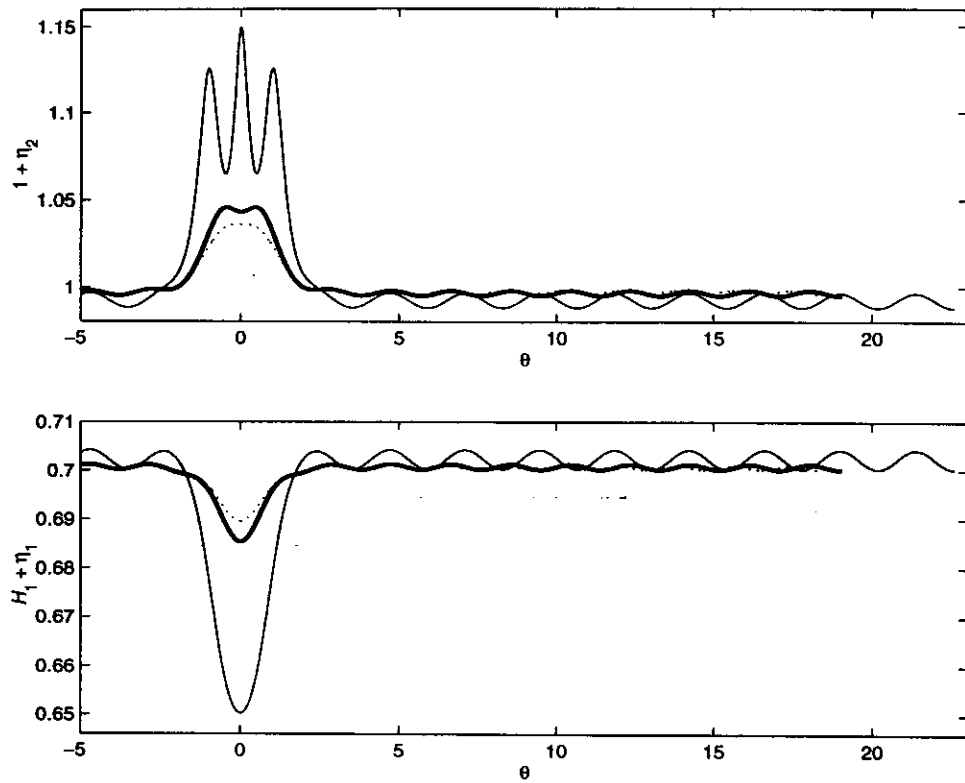


Figure 9: Profils de la surface libre  $1 + \eta_2(\theta)$  et de l'interface  $H_1 + \eta_1$  :  $R = 0.1$ ,  $H_1 = 0.7$  et  $L/\lambda \simeq 20$ .  $F = 0.534$  ( $\cdots$ ),  $F = 0.544$  ( $-$ ) et  $F = 0.602$  ( $-$ ).

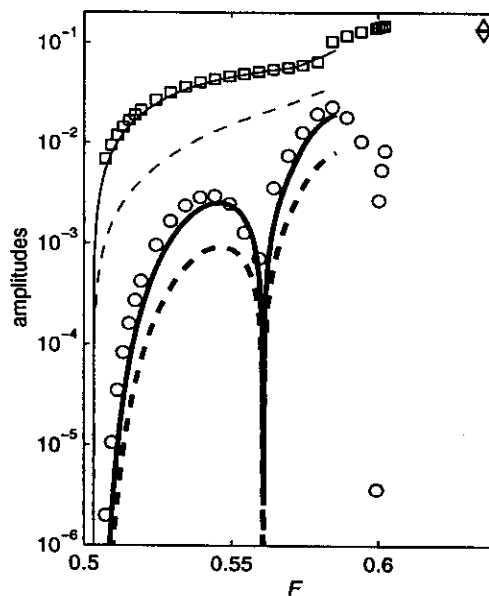


Figure 10: Idem Fig. 6 avec  $L/\lambda \simeq 60$  pour  $R = 0.1$  et  $H_1 = 0.7$  ;  $\eta_2(0)$  ( $\square$ ) et  $\min(a_s)$  ( $\circ$ ) sont aussi tracés pour  $L/\lambda \simeq 20$ .

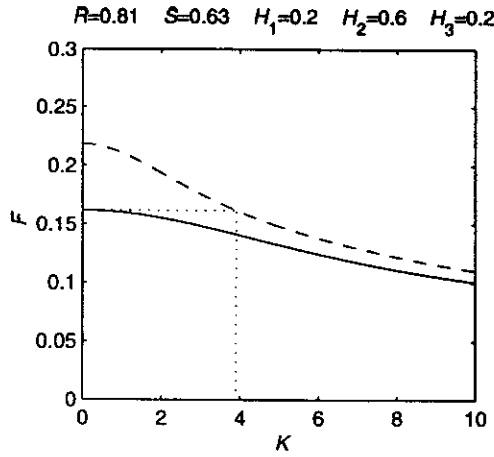


Figure 11: Les deux branches  $F_{\text{rapide}}$  (---) et  $F_{\text{lent}}$  (—) en fonction du nombre d'onde  $K$  obtenues par (10) avec  $F = c/\sqrt{g(h_1 + h_2)}$  et  $K = k(h_1 + h_2)$ .  $R = \rho_2/\rho_1 = 0.81$ ,  $S = \rho_3/\rho_1 = 0.63$ ,  $H_1 = h_1/(h_1 + h_2 + h_3) = 0.2$  et  $H_2 = h_2/(h_1 + h_2 + h_3) = 0.6$ .

alors intéressant de considérer le cas d'un milieu tri-couche qui devrait permettre de comparer résultats numériques et expérimentaux.

La relation de dispersion pour un milieu à trois couches avec un toit rigide est

$$\begin{vmatrix} (\rho_1 - \rho_2) - (\tau_1 + \tau_2) & \tau_2 / \cosh kh_2 \\ \tau_2 / \cosh kh_2 & (\rho_2 - \rho_3) - (\tau_2 + \tau_3) \end{vmatrix} = 0, \quad (9)$$

où

$$\tau_i = \frac{\rho_i k c^2}{g \tanh kh_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Si nous développons le déterminant, nous trouvons que

$$a_4 c^4 - a_2 \left(\frac{g}{k}\right) c^2 + a_0 \left(\frac{g^2}{k^2}\right) = 0, \quad (10)$$

où

$$a_4 = 1 + RT_1 T_2 + \frac{S}{T_3} \left(T_1 + \frac{T_2}{R}\right) \quad (11)$$

$$a_2 = T_1 + T_2 + \frac{T_2 S}{R} \left(\frac{T_1}{T_3} - 1\right) - T_1 S \left(1 + \frac{T_2}{T_3}\right) \quad (12)$$

$$a_0 = T_1 T_2 \left(1 - R + S - \frac{S}{R}\right) \quad (13)$$

et  $S = \rho_3/\rho_1$  et  $T_3 = \tanh kh_3$ . La relation de dispersion (10) est représentée sur la figure 11. Sur cet exemple, les deux branches correspondant aux modes lent et rapide sont très proches pour des rapports de densité reproductibles expérimentalement, soient:  $\rho_3 = 0.78$  kg/l (pétrole),  $\rho_2 = 1$  kg/l (eau) et  $\rho_1 = 1.23$  kg/l (fréon).

Dans le problème à trois couches il nous faut considérer un potentiel des vitesses supplémentaire:

$$\phi_3 = \sum_{j=1}^{N-1} o_j \cosh [j\kappa y] \sin(j\kappa\theta). \quad (14)$$

Nous avons à présent  $(6N - 4)$  inconnues ( $\alpha_j$ ,  $\beta_j$ ,  $o_j$ ,  $p_j$ ,  $q_j$  et  $\tau_j$ ) dans les séries (5)–(8) et (14) plus deux constantes de Bernoulli. Nous avons à résoudre deux équations de Bernoulli et

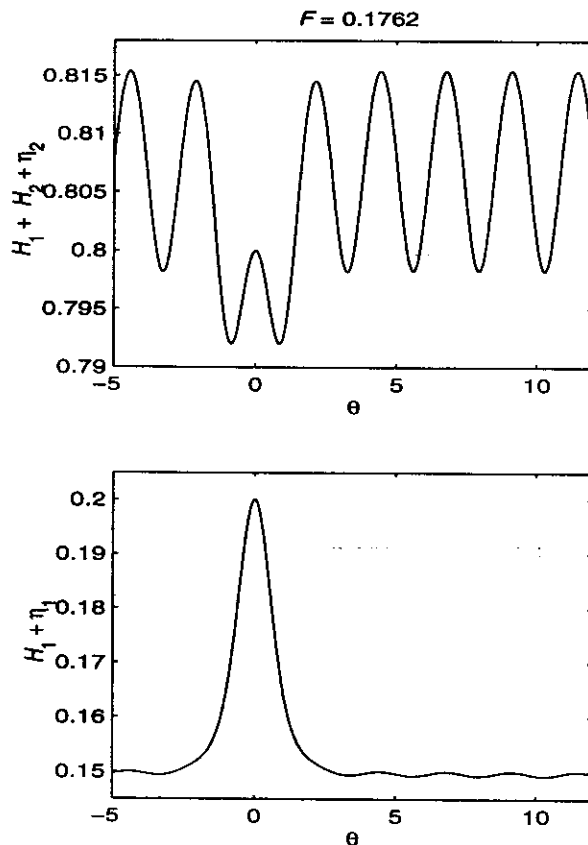


Figure 12: Profils des deux interfaces:  $R = \rho_2/\rho_1 = 0.81$ ,  $S = \rho_3/\rho_1 = 0.63$ ;  $L = 93$  and  $\lambda = 2.3367$ . Le fond et le toit rigide sont situés en  $y = 0$  et  $y = H_1 + H_2 + H_3 = 1$ .

quatre équations d'imperméabilité en  $(N + 1)$  points  $\theta_n = \frac{Ln}{2N}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ . Les conditions d'imperméabilité sont automatiquement vérifiées en  $\theta_0$  et  $\theta_N$ : nous avons à résoudre un jeu de  $(6N - 2)$  équations. Les calculs ont été effectués avec  $N = 150$  points.

Les déplacements des deux interfaces relatifs à une solution particulière sont représentés sur la figure 12. On note des pulses en opposition de phase correspondant au mode lent auxquels sont associées des oscillations en phase correspondant au mode rapide.

Peu de calculs ont été conduits dans cette configuration tricouche. Il apparaît néanmoins que l'on peut obtenir numériquement des ondes solitaires généralisées dans une situation pouvant être réalisée expérimentalement avec trois fluides non-miscibles (eau, pétrole et fréon).

## 5 Discussion

L'étude présentée ici fournit une méthode efficace de résolution des équations d'Euler pour l'étude des ondes non-linéaires. Nous l'avons utilisée pour l'étude des ondes solitaires généralisées. Ces ondes correspondent à la résonance non-linéaire d'une onde solitaire d'un mode lent avec des ondes périodiques d'un mode rapide.

Pour les régimes étudiés, la solution de type onde solitaire classique (sans oscillations) n'existe pas. Quant à l'amplitude de ces oscillations, nous avons déterminé des solutions pour lesquelles elle devient de l'ordre de grandeur de l'amplitude du pulse central (pour  $R = 0.1$ ).

Pour interpréter le phénomène, il nous faut considérer qu'une onde généralisée en nature n'aurait des oscillations que d'un seul côté. Ces oscillations seraient générées par la propagation du pulse et correspondraient à la radiation de son énergie (voir Benilov *et al.*, 1993). C'est

cas	$R$	$S$	$\frac{h_1}{h_1+h_2}$	$h_1 + h_2$	$h_3$	$c_{\text{lent}}(0)$	$2\pi/k_0$
1	0.1	0	0.7	10 cm	$\infty$	50 cm/s	16 cm
2	0.78	0	0.7	10 cm	$\infty$	22 cm/s	3.1 cm
3	0.99	0	0.7	200 m	$\infty$	2.0 m/s	2.6 m
4	0.81	0.63	0.78	9 cm	1 cm	12 cm/s	7.4 cm
5	0.99	0.98	0.78	180 m	20 m	1.1 m/s	136 m

Table 1: Célérité des ondes solitaires  $c_{\text{lent}}(0)$  et longueur d'onde  $2\pi/k_0$  des ondes périodiques en résonance avec l'onde solitaire.

pourquoi l'étude des ondes solitaires généralisées est une étape pour comprendre la transfert d'énergie des ondes longues internes vers les ondes courtes.

Des valeurs physiques estimées à l'aide des relations de dispersion (1) et (10) sont fournies dans la Table 1. Pour un système à deux couches, le cas (1) correspond aux résultats numériques présentés en section 3. Le cas (2) correspond aux expériences de Michallet et Barthélemy (1998a). Le cas (3) correspond à des conditions océanographiques. Pour un système à trois couches, le cas (4) correspond aux calculs de la section 4 dans des conditions réalisables expérimentalement. Le cas (5) correspondrait à l'observation rapportée par Akylas et Grimshaw (1992). On note en effet sur leur figure 2 une onde de type solitaire (les isopycnes sont déplacées en opposition de phase) qui génère dans son sillage des ondes périodiques d'un autre mode (isopycnes en phase).

## Références

- AKYLAS, T. R., & GRIMSHAW, R. H. J. 1992. Solitary internal waves with oscillatory tails. *J. Fluid Mech.*, **242**, 279–298.
- BENILOV, E. S., GRIMSHAW, R., & KUZNETSOVA, E. P. 1993. The generation of radiating waves in a singularly-perturbed Korteweg-de Vries equation. *Physica D*, **69**, 270–278.
- DIAS, F., & IL'ICHEV, A. 1999. Preprint.
- FUNAKOSHI, M., & OIKAWA, M. 1986. Long internal waves of large amplitude in a two-layer fluid. *J. Phys. Soc. Japan*, **55**, 128–144.
- HOLYER, J. Y. 1979. Large amplitude progressive interfacial waves. *J. Fluid Mech.*, **93**, 433–438.
- MEHROTRA, S. C., & KELLY, R. E. 1973. *Tellus*, **25**, 560.
- MICHALLET, H., & BARTHÉLEMY, E. 1998a. Experimental study of interfacial solitary waves. *J. Fluid Mech.*, **366**, 159–177.
- MICHALLET, H., & BARTHÉLEMY, E. 1998b. A numerical investigation of oscillatory interfacial solitary waves. *J. Phys. Soc. Japan*, **67**(6), 1834–1836.
- RIENECKER, M. M., & FENTON, J. D. 1981. A Fourier approximation method for steady water waves. *J. Fluid Mech.*, **104**, 119–137.
- SANDSTROM, H., & ELLIOTT, J. A. 1984. Internal tide and solitons on the Scotian shelf: a nutrient pump at work. *J. Geophys. Res.*, **89**(4), 6415–6426.
- VANDEN-BROECK, J.-M. 1991. Elevation solitary waves with surface tension. *Phys. Fluids A*, **3**(11), 2659–2663.