

7<sup>e</sup> JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE

MARSEILLE - 8, 9, 10 MARS 1999

**ETUDE THEORIQUE DES VIBRATIONS INDUITES PAR VORTEX:  
COMPARAISON D'UNE APPROCHE MODALE ET D'UNE  
APPROCHE ONDE**

LE CUNFF C. et DURAND A.

Institut Français du Pétrole

1 et 4 avenue de Bois-Préau

92 852 RUEIL-MALMAISON cedex

Tél: 01-47-52-63-74

Fax: 01-47-52-70-02

e-mail: lecnffc@ifp.fr

**Résumé**

L'évolution temporelle des vibrations induites par vortex sur des câbles ou des risers est étudiée en utilisant deux approches, l'une basée sur l'excitation modale de la structure, l'autre sur la propagation d'ondes dans la structure, créées par des forces dont la fréquence est imposée par le courant. Les deux méthodes donnent des résultats similaires pour les risers mais différents pour les câbles. L'effet des vagues sur les vibrations est également pris en compte, et on observe qu'elles peuvent considérablement diminuer l'amplitude des vibrations.

**Abstract**

The time evolution of vortex-induced vibrations is studied on cables and risers. Two approaches are used; one is based on the excitation of structural modes, while the other considers the structure as a carrier of waves, created by external forces, with a frequency imposed by the current. The two methods give similar results for a riser, but differ for a cable. Wave effects are also investigated, and it is observed that they considerably dampen the vibration amplitude.

## 1 Introduction

La présence d'un cylindre dans un courant peut produire une instabilité dans le fluide. Lorsque la vitesse de l'écoulement s'accélère, le fluide se détache de la structure et crée des tourbillons, connus sous le nom d'allée de Karman. L'écoulement est dépendant du nombre de Reynolds  $Re = Ud/\nu$ , où  $U$  est la vitesse du fluide par rapport à la structure,  $d$  le diamètre du cylindre et  $\nu$  la viscosité cinématique de l'eau. Le détachement alterné tourbillonnaire peut entraîner des vibrations de la structure (VIV: vibrations induites par vortex). Les VIV ayant un rôle important sur la fatigue de la structure, une modélisation permettant d'évaluer leur rôle doit être développée. Les vibrations induites sont principalement observables dans la direction perpendiculaire au courant, Vandiver et Yong[12] ont déterminé expérimentalement que l'amplitude des vibrations alignées avec le courant est inférieure d'un ordre de grandeur à celle des vibrations transverses. Dans cet article, seuls les déplacements transverses sont considérés.

Si la structure est élastique, elle possède des modes propres qui peuvent entrer en résonance avec la fréquence du fluide. De nombreuses études tant expérimentales que numériques ont été conduites pour prédire les efforts subis par la structure. Il n'existe pas actuellement de formules dérivées des équations fluide/structure. Toute modélisation des efforts fait intervenir des coefficients empiriques au niveau de la poussée, de l'amortissement et de la traînée.

Lorsque l'écoulement est fonction de la profondeur, le phénomène devient plus complexe car plusieurs modes de la structure peuvent être excités. L'approche la plus commune pour déterminer la réponse de la structure est modale (Iwan[3], Vandiver[13], Lyons et Patel[6], Bokaian[1], Nedergaard et al.[7]). L'autre approche revient à considérer que la structure est excitée par des forces avec, à chaque point, une fréquence imposée par l'écoulement, et à calculer la propagation des ondes ainsi générées (Iwan et Jones[4], Vandiver et Chung[11], Triantafyllou et Grosenbaugh[10]).

## 2 Méthodes utilisées

Deux approches sont ici présentées. La première est une approche modale, avec un courant sur la structure dépendant du temps, les calculs étant effectués dans le domaine temporel. Le coefficient de poussée et l'amortissement suivent les courbes données par Venugopta[14], ce qui permet de retrouver approximativement les résultats de Vandiver[13] pour courant indépendant du temps, la différence étant située au niveau du découpage de la structure et du coefficient multiplicatif des forces qui dépend de la longueur de corrélation. Les modes propres sont calculés en tenant compte de la masse ajoutée. La fréquence de relâcher de tourbillons,  $f_R$ , est donnée sous forme adimensionnelle par le nombre de Strouhal,  $St = f_R d/U$ . Le mode en "lock-in" à une position donnée de la structure est le mode le plus proche de la fréquence  $f_R$  et la zone d'accrochage est définie par le critère de vitesse réduite. Un mode, de fréquence  $f$ , va entrer en vibration si la vitesse réduite définie par  $V_r = U/fd$  est comprise entre  $V_r^{min}$  et  $V_r^{max}$ .

Les différentes étapes pour obtenir l'amplitude vibratoire de la structure à chaque pas de temps sont:

- Déterminer les modes excités et la zone d'excitation de chacun de ces modes sur la structure en utilisant le critère de vitesse réduite.
- Avec l'amplitude de vibration obtenue aux pas de temps précédents, définir les coefficients de poussée et l'amortissement hydrodynamique pour chaque mode.
- Calculer les efforts de poussée à toutes les fréquences excitées. Les forces sont multipliées par un coefficient diminutif  $C_c$  qui prend en compte le déphasage des tourbillons et la longueur de la zone excitée.

- Calculer la réponse temporelle de la structure par mode.

$$X(t, x) = \sum_{i=1}^N X_i(t) Y_i(x) \quad (1)$$

et

$$X_i(t) = \sum_{r=1}^N X_{ir}(t) \exp(j\omega_r t) \quad (2)$$

avec:

$$X_{ir}(t) = \frac{1}{\omega_1 - \omega_2} \left[ \int_0^t F_{ir}(\tau) \exp(\omega_1(t - \tau)) d\tau - \int_0^t F_{ir}(\tau) \exp(\omega_2(t - \tau)) d\tau \right] \quad (3)$$

où

$$F_{ir} = \frac{1}{m_i} \int_{L_r} f_{\omega_r} Y_i(x) dx \quad (4)$$

et, en introduisant l'amortissement global de la structure  $\epsilon$ , pour  $\epsilon \leq 1$ ,

$$\omega_1 = -\epsilon\omega_i - j(\omega_r + \omega_i\sqrt{1 - \epsilon^2}) \quad (5)$$

$$\omega_2 = -\epsilon\omega_i - j(\omega_r - \omega_i\sqrt{1 - \epsilon^2}), \quad (6)$$

pour  $\epsilon > 1$ ,

$$\omega_1 = (-\epsilon - \sqrt{\epsilon^2 - 1})\omega_i - j\omega_r \quad (7)$$

$$\omega_2 = (-\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 - 1})\omega_i - j\omega_r. \quad (8)$$

Cette solution suppose qu'à  $t = 0$ , le déplacement et la vitesse sont nuls. Numériquement, pour ne pas accroître le temps de calcul en recalculant les intégrales de 0 à  $t$ , et conserver des arguments négatifs dans les fonctions exponentielles, la formule suivante est utilisée pour calculer les intégrales temporelles

$$\begin{aligned} \Gamma_{ir}(t) = \int_0^t F_{ir}(\tau) \exp(\omega_1(t - \tau)) d\tau &= \exp(\omega_1 dt) \times \Gamma_{ir}(t - dt) \\ &+ \int_{t-dt}^t F_{ir}(\tau) \exp(\omega_1(t - \tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (9)$$

- La nouvelle amplitude est obtenue, et si elle est maximale, elle est gardée en mémoire pour le pas de temps suivant.

Une deuxième méthode, basée sur la propagation des ondes le long de la structure est également utilisée. Triantafyllou et Grosenbaugh[10] ont montré expérimentalement que le coefficient de poussée en phase avec la vitesse de la structure peut être considéré comme linéairement décroissant avec l'amplitude de vibration, et qu'il devient négatif lorsque l'amplitude atteint approximativement un diamètre. La force est donc modélisée par ce coefficient de poussée et une pulsation donnée localement par la fréquence de Strouhal. C'est un avantage important de cette méthode puisqu'il peut être difficile de définir les modes propres dans certaines situations. Par exemple, un riser caténaire en acier soumis à effet de vagues, a une longueur entre la surface et le point de "touch-down" qui peut varier d'une centaine de mètres, les modes propres sont alors dépendants du temps, et le lock-in n'aura pas le temps de se mettre en place. De plus, le concept de lock-in en écoulement cisailé n'est pas forcément bien défini. Par contre, si le courant est constant sur une partie importante de la structure, la fréquence de Strouhal n'est pas exactement la bonne fréquence puisque la structure influe sur la fréquence du fluide.

Pour un câble, l'équation linéique à résoudre est donnée par:

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \rho d U^2 C_l \exp(i\omega t + i\phi), \quad (10)$$

où  $T$  est la tension, et  $c$  l'amortissement structurel. La pulsation est donnée par le nombre de Strouhal ( $St$ ):

$$\omega = \frac{2\pi USt}{d}. \quad (11)$$

Si la pulsation est fonction du temps,  $\exp(i\omega t)$  est remplacé par:

$$\exp\left(i \int_0^t \omega(t') dt'\right). \quad (12)$$

Le coefficient de poussée en phase avec la vitesse est modélisé par:

$$C_{i/v} = (C_0 - C_1 \frac{|A|}{d}). \quad (13)$$

Cette formulation caractérise le fait que la force devient amortissement quant l'amplitude croît au-delà d'une certaine valeur. La force en phase avec l'accélération est modélisée par une masse ajoutée:

$$m_t = m + C_a \rho_{liq} \frac{\pi d^2}{4}. \quad (14)$$

Le déphasage est obtenu en considérant une onde de la forme:

$$y(x, t) = A \exp(i\omega t + ikx) \quad (15)$$

où  $\omega$  est réel et  $k$  complexe. En insérant (15) dans l'équation (10), sans tenir compte de l'amortissement, on obtient la relation de dispersion:

$$k(x) = \sqrt{\frac{m_t \omega^2}{T}}. \quad (16)$$

Entre deux points successifs, le déphasage est alors donné par  $\pm k(x)dx$ . Le déphasage est introduit au niveau des conditions initiales:

$$y(0, x) = \xi \cos(kx) \quad (17)$$

$$y_t(0, x) = \xi i \omega \cos(kx) \quad (18)$$

avec  $\xi = 10^{-5}$ .

L'équation (10) est discrétisée en utilisant les différences finies d'ordre 2 en espace et Crank-Nicholson en temps. Des essais avec Runge-Kutta explicite d'ordre 4 ont montré que ce type de méthode exigeait des pas de temps très petits et cette approche a été abandonnée. La discrétisation conduit à des matrices tridiagonales par bloc qui se prêtent à des résolutions rapides de systèmes linéaires. Le système est modifié en introduisant  $v = \partial y / \partial t$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} (T \frac{\partial}{\partial x}) \frac{1}{m_t} & -\frac{c}{m_t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F_{ext}}{m_t} \end{pmatrix} \quad (19)$$

Un algorithme similaire peut être utilisé si la dérivée d'ordre 4 est introduite dans l'équation (10) pour modéliser une poutre. Les matrices obtenues sont alors pentadiagonales par bloc. L'expression pour la relation de dispersion est dans ce cas:

$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-\frac{T}{EI} + \sqrt{\left(\frac{T}{EI}\right)^2 + \frac{4m_t \omega^2}{EI}}}, \quad (20)$$

où  $E$  est le module d'Young et  $I$  le moment d'inertie.

Les résultats des deux méthodes sont alors comparés. Les effets de mouvement en tête de structure ainsi que les effets de vague sur le lock-in sont étudiés.

### 3 Résultats

#### 3.1 Comparaison des deux méthodes sur un cas test

Le cas test choisi ici est celui utilisé par Larsen et Halse[5] pour comparer différentes méthodes de prédiction des VIV. Le courant est indépendant du temps et est défini sur une longueur de 300m comme indiqué sur la figure 1. Le courant est donc constant sur un sixième de la structure, et cisailé sur le reste. La vitesse minimale est au fond, correspondant au 0 de la hauteur d'eau.

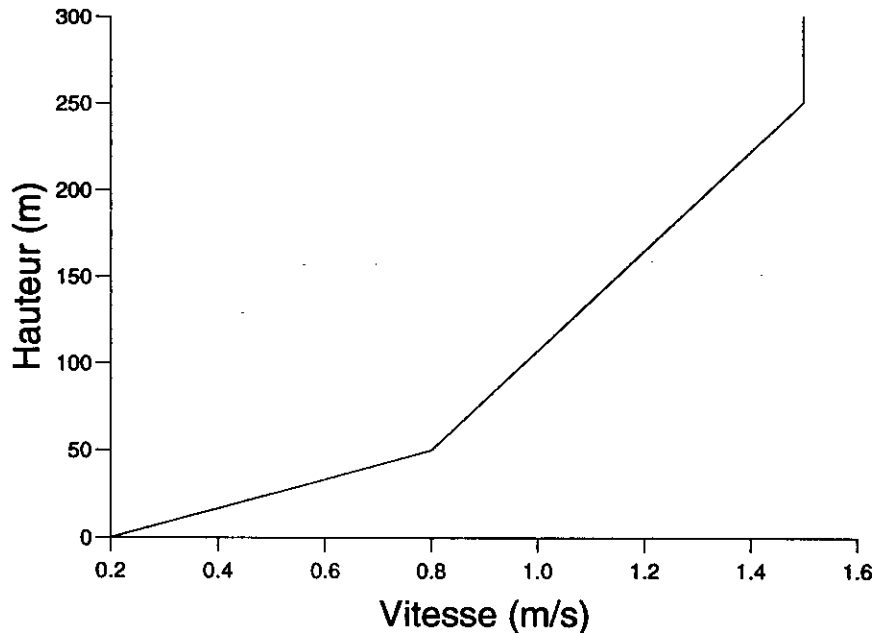


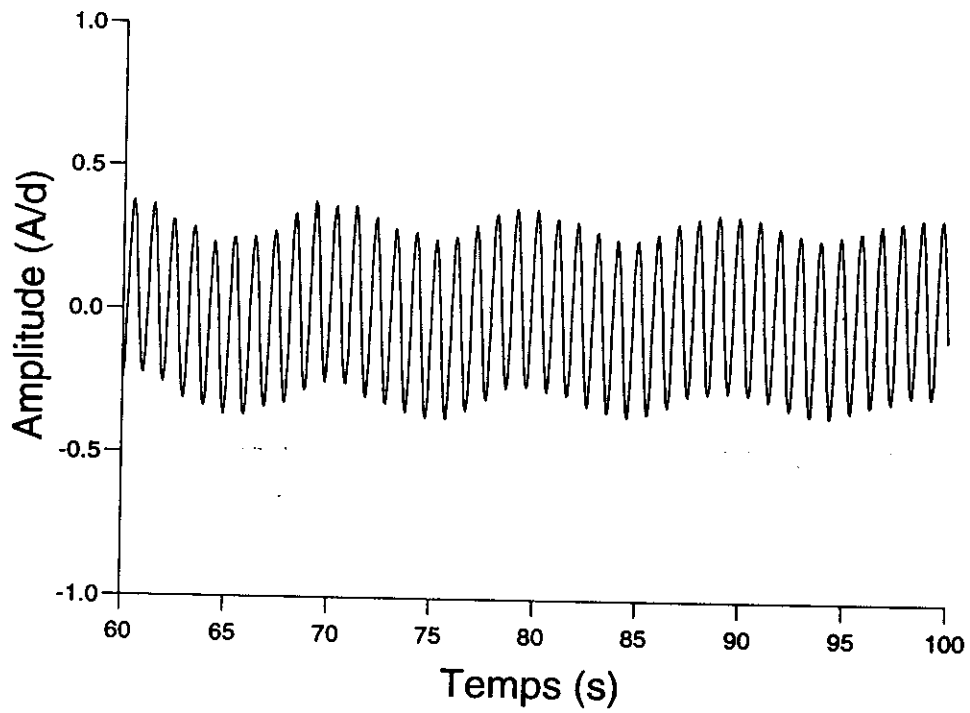
Figure 1 : Courant uniforme cisailé

##### 3.1.1 Riser

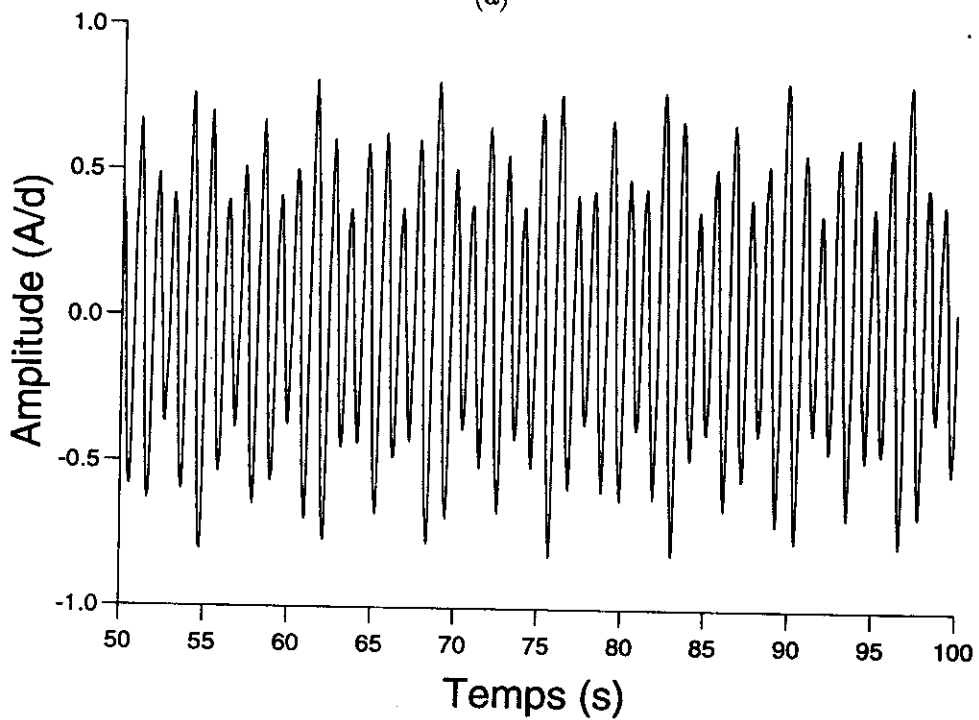
Le riser a les caractéristiques suivantes:

- longueur:  $l = 300\text{m}$
- diamètre extérieur:  $d = 0.25\text{m}$
- diamètre intérieur:  $d_i = 0.235\text{m}$
- masse linéique:  $m = 157.8\text{kg}$
- amortissement structurel:  $c = 1.5\%$
- module d'Young:  $E = 2.05 \times 10^{11}\text{N/m}^2$
- tension en haut:  $T = 1.469 \times 10^6\text{N}$

La réponse vibratoire temporelle du cylindre par l'approche onde est présentée en figure 2(a). On observe une petite fréquence et une modulation de faible amplitude. L'analyse de Fourier de ce signal indique que la haute fréquence a une valeur de 1.02Hz. Les fréquences d'excitation dues au courant varient entre 0.136 et 1.02 pour  $St = 0.17$ . La fréquence la plus haute, correspondant au courant le plus élevé s'impose donc à toute la structure. Si on considère maintenant le signal temporel correspondant (figure 2(b)) avec l'approche modale, le signal est



(a)



(b)

Figure 2 : Amplitude des vibrations en fonction du temps à  $x = 150$  par l'approche onde (a) et l'approche modale (b).

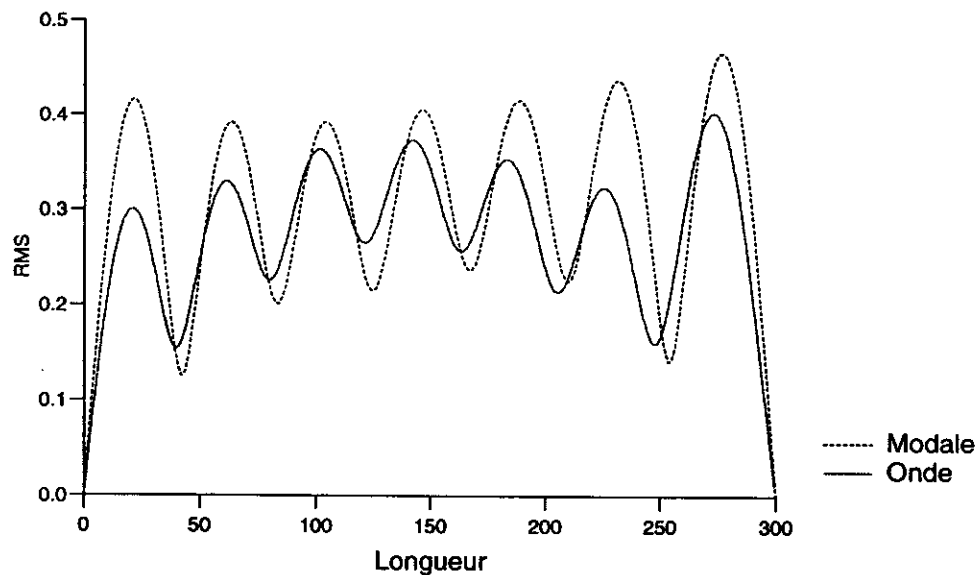


Figure 3 : Comparaison des amplitudes RMS avec l'approche modale et l'approche onde.

un peu plus élevé en amplitude mais la fréquence dominante est la même. En effet le mode dominant de la structure est le mode 7 avec une fréquence de 0.95Hz.

Ceci est renforcé par l'analyse de l'amplitude rms présentée en figure 3. Le septième mode, correspondant aux sept pics, est le mode dominant dans les deux approches. Si on compare les maxima de vibrations, l'ordre de grandeur est similaire:

Méthodes	Max rms
Modale	0.452
Onde	0.401

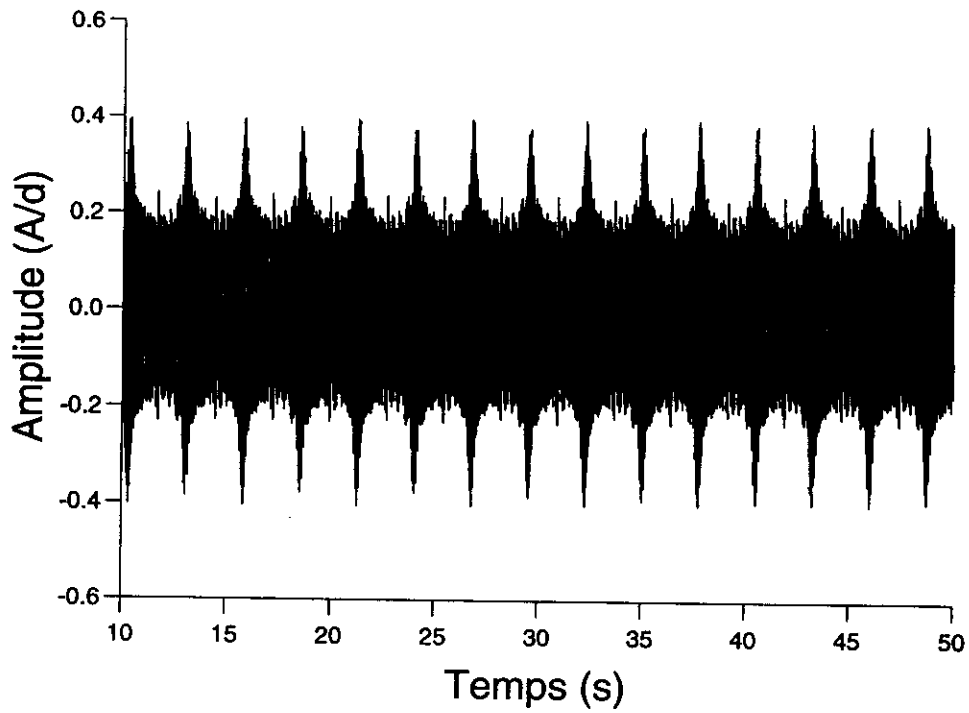
Pour un riser, les deux approches fournissent donc des résultats cohérents tant en amplitude qu'en fréquence.

### 3.1.2 Câble

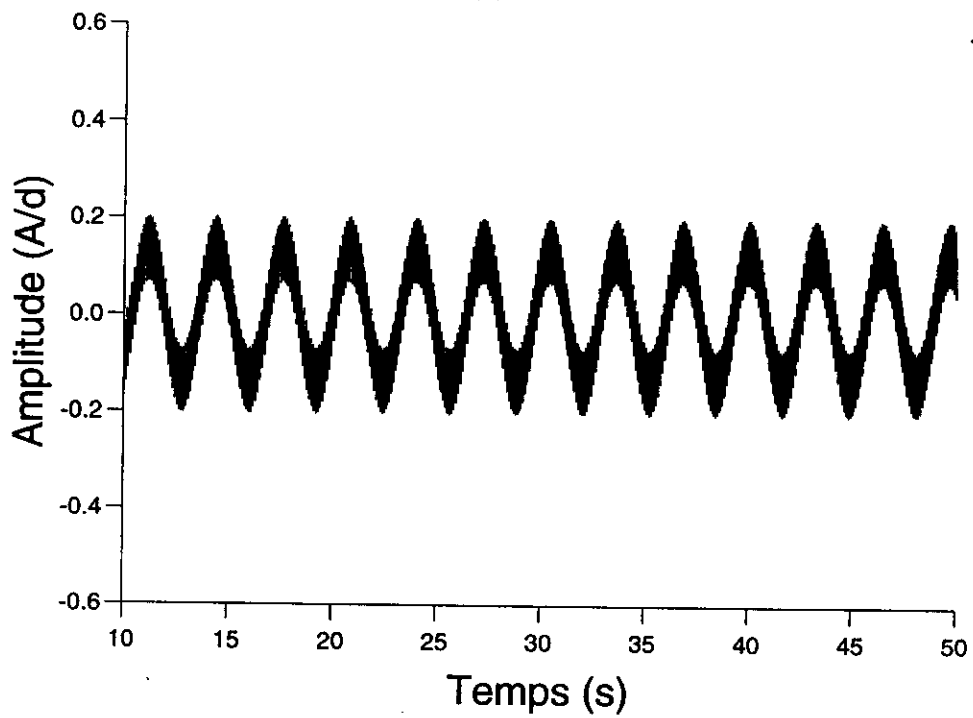
Le câble est défini par:

- longueur:  $l = 300\text{m}$
- diamètre:  $d = 0.02\text{m}$
- masse linéique:  $m = 1.728\text{kg}$
- amortissement structurel:  $c = 1.5\%$

Pour un câble, les résultats des deux modèles sont différents. L'approche de type modal prévoit une dominance du mode correspondant au courant le plus élevé, le mode 35 dans ce cas, avec une fréquence de 12.75Hz. Cette fréquence est dominante dans le signal temporel de la figure 4(a). On peut également observé un phénomène qui s'apparente à celui de "beating", observé expérimentalement par Grosenbaugh et Triantafyllou [2]. Le signal se décompose en une fréquence de base (12.75Hz) et une fréquence de modulation (0.37hz). Grosenbaugh et Triantafyllou pensent que le "beating" est caractéristique des câbles et provient du fait que des paquets d'onde se propagent le long de la structure en partant des zones les plus excitées. La fréquence de 0.37Hz correspond à la différence entre deux modes successifs et a été observée expérimentalement dans le fluide[8], au niveau de l'interface entre deux tourbillons de fréquences différentes.



(a)



(b)

Figure 4 : Amplitude des vibrations en fonction du temps à  $x = 270$  par l'approche modale (a) et l'approche onde (b).



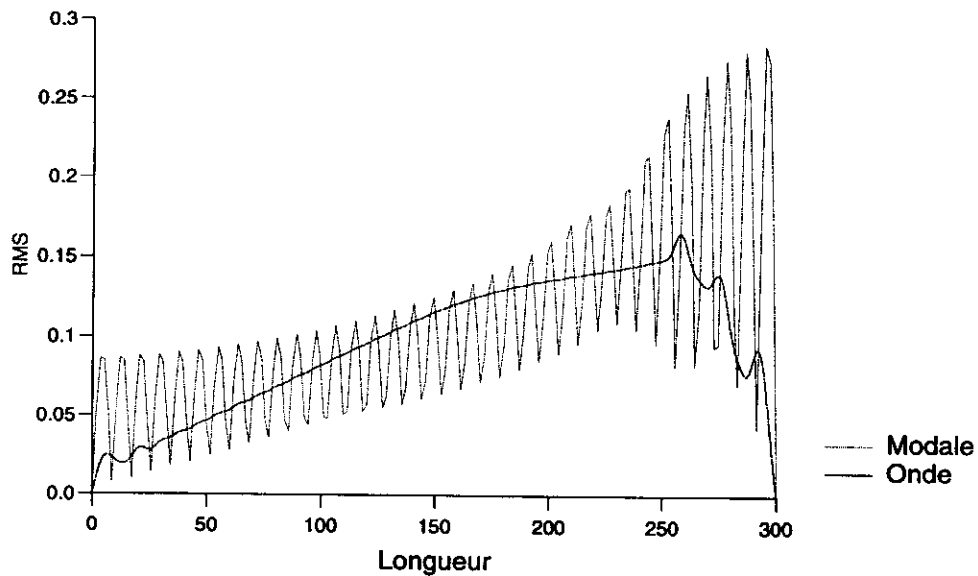


Figure 5 : Comparaison des amplitudes RMS avec l'approche modale et l'approche onde pour un câble.

Les résultats de l'approche onde, présentés en figure 4(b) sont différents. Le mode 35 est toujours présent mais la structure oscille avec un mouvement global d'une fréquence proche de 0.33Hz. Dans l'approche modale, les forces sont liées à la déformée du mode. Par contre, dans l'approche onde, le déphasage évolue avec le temps si les forces sont de pulsations différentes et reste constant si les pulsations, et donc le courant, sont uniformes. Différents déphasages ont été imposés à  $t = 0$ . Les oscillations de la figure 4(b) ont été obtenues en utilisant une fréquence constante par demi longueur d'onde.

L'amplitude RMS de la déformée, présentée en figure 5, indique clairement les nœuds et ventres de vibration du mode 35 pour l'approche modale. Avec l'approche onde, la réponse de la structure, également en Fig. 5 ne présente pas un seul mode bien établi avec nœuds et ventres de vibration fixes.

Les résultats d'amplitude RMS maximale pour différentes méthodes sont présentés dans la table suivante, les valeurs pour les autres méthodes étant extraites de Larsen et Halse[5] (MAR: Marintek, MIT,V: Vandiver, MIT,T: Triantafyllou):

Méthodes	Max rms (1)
MAR.	0.42
MIT,T	0.25
MIT,V	0.27
Modal	0.285
Onde	0.166

Les résultats sont obtenus dans le cas onde avec  $C_0 = C_1 = 0.7$ , et indique une amplitude plus faible.

Les deux méthodes présentent des différences conceptuelles qui vont jouer un rôle important lorsqu'un grand nombre de modes est excité. Premièrement, l'approche onde ne prend pas en compte le phénomène de lock-in. Ensuite, l'amortissement hydrodynamique est pris en compte localement à travers le coefficient de poussée, alors qu'il est lié à la pulsation locale dans l'approche modale.

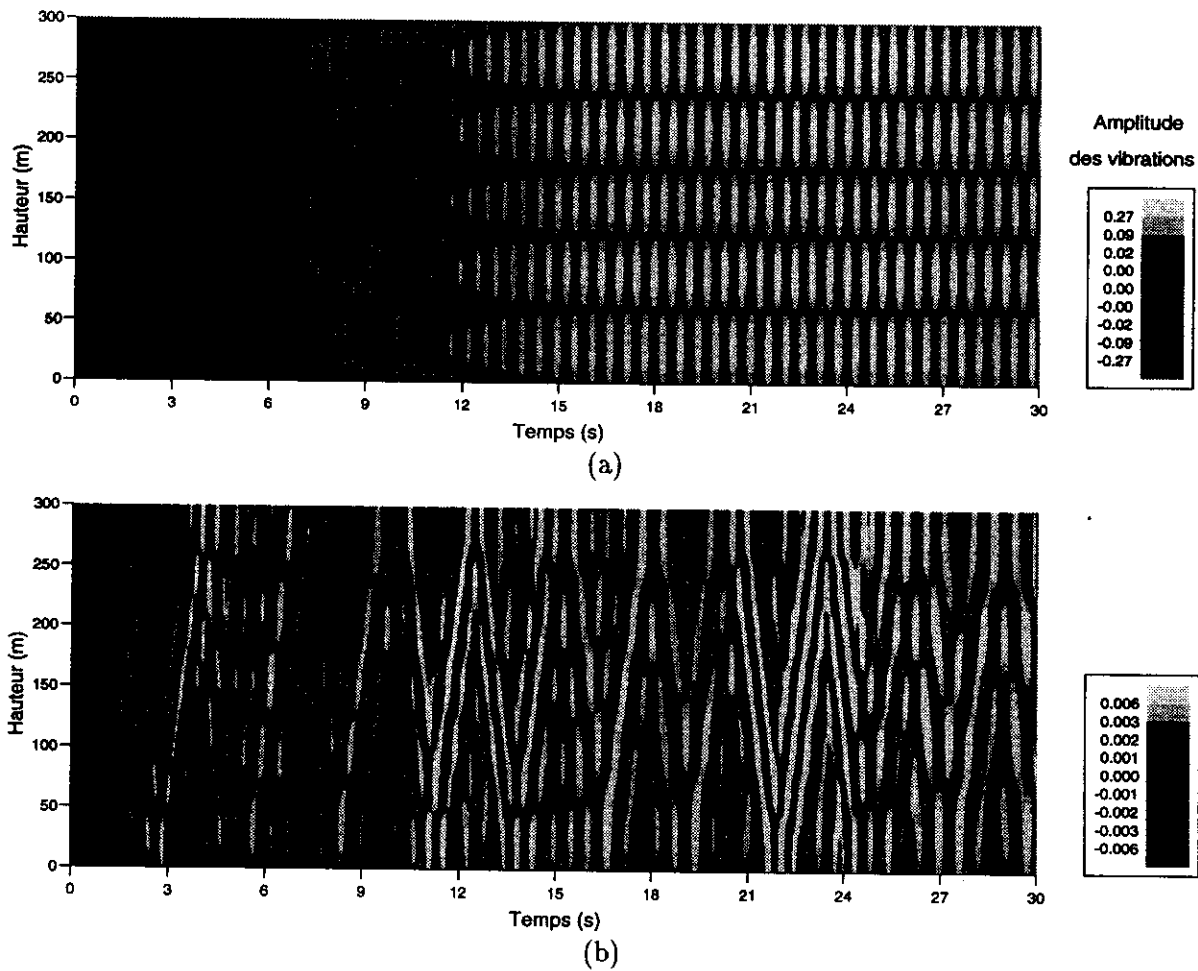


Figure 6 : Evolution de l'amplitude des vibrations le long du câble avec le temps: (a) lock-in sur le mode 5, courant uniforme de vitesse  $U = 0.2 \text{ m/s}$  et (b) avec en plus un mouvement en tête  $U_m = 0.2 \sin 0.2\pi t$

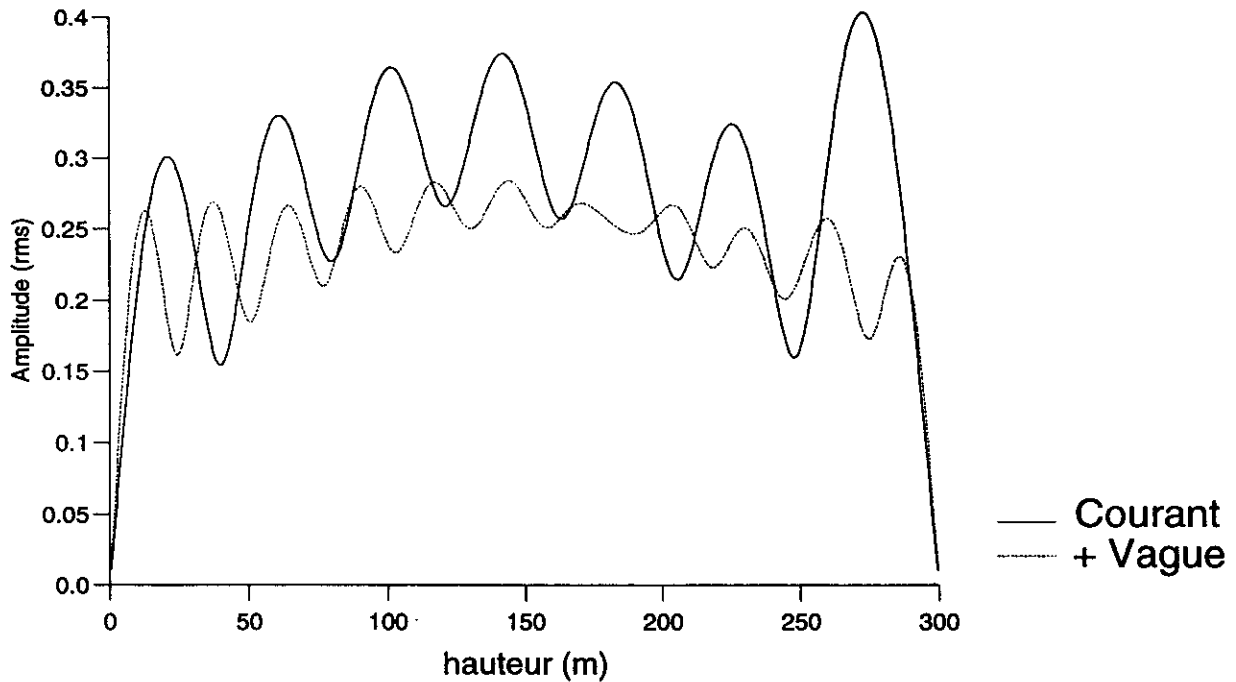


Figure 7 : Effets de vague sur l'amplitude de vibration du riser.

### 3.2 Effet des vagues et du mouvement en tête

#### 3.2.1 Exemple de mouvement en tête sur courant constant avec l'approche modale

L'évolution temporelle de la structure est présentée sur un courant uniforme (figure 6(a)) et le câble précédemment étudié. La vitesse de l'écoulement est de 0.2m/s, ce qui donne une fréquence de Strouhal  $f_f = St.U/d = 1.7\text{Hz}$  pour un  $St$  de 0.17. Cette fréquence entre en lock-in avec le mode 5 de la structure de fréquence 1.82Hz. L'amplitude est nulle à  $t = 0$  et le maximum est établi pour  $t > 18\text{s}$ . La structure du mode 5, caractérisée par 5 pics, se retrouve dans la figure 6(a).

Pour examiner l'effet de mouvement en tête, on suppose que le courant vu par la structure est égal au courant vrai plus une vitesse sinusoïdale maximale en tête et qui décroît linéairement avec la profondeur. Cette approche n'est qu'une approximation puisque le câble va probablement se déformer avec la profondeur. On ajoute donc une vitesse  $U_m \sin 2\pi ft$  en haut de structure. La figure 6(b) présente l'évolution des vibrations le long du câble avec le temps lorsque  $U_m = 0.2\text{m/s}$  et  $f = 0.2\text{Hz}$ . D'autres modes peuvent alors être excités, en particulier, si le nombre de maxima à un instant donné est utilisé pour caractériser le mode excité, on observe qu'à  $t = 18\text{s}$ , le mode 4 est dominant, tandis qu'à  $t = 23.6\text{s}$ , le mode 6 est dominant. Cette multiplication des modes excités a pour effet de diminuer l'amplitude des vibrations.

#### 3.2.2 Effets de vague sur courant cisailé

Les effets de vague sont étudiés sur le courant cisailé de la figure 1. La vitesse due aux vagues est donnée par la théorie linéaire en mer profonde à savoir (Cf Sarpkaya[9]):

$$U_v = \pi H f_v e^{kz} \cos(2\pi f_v t), \quad (21)$$

avec

$$k = \frac{4\pi^2 f_v^2}{g}, \quad (22)$$

$z$  étant la profondeur,  $H$  la hauteur de vague,  $f_v$  la fréquence de vague et  $g$  l'accélération de la pesanteur.

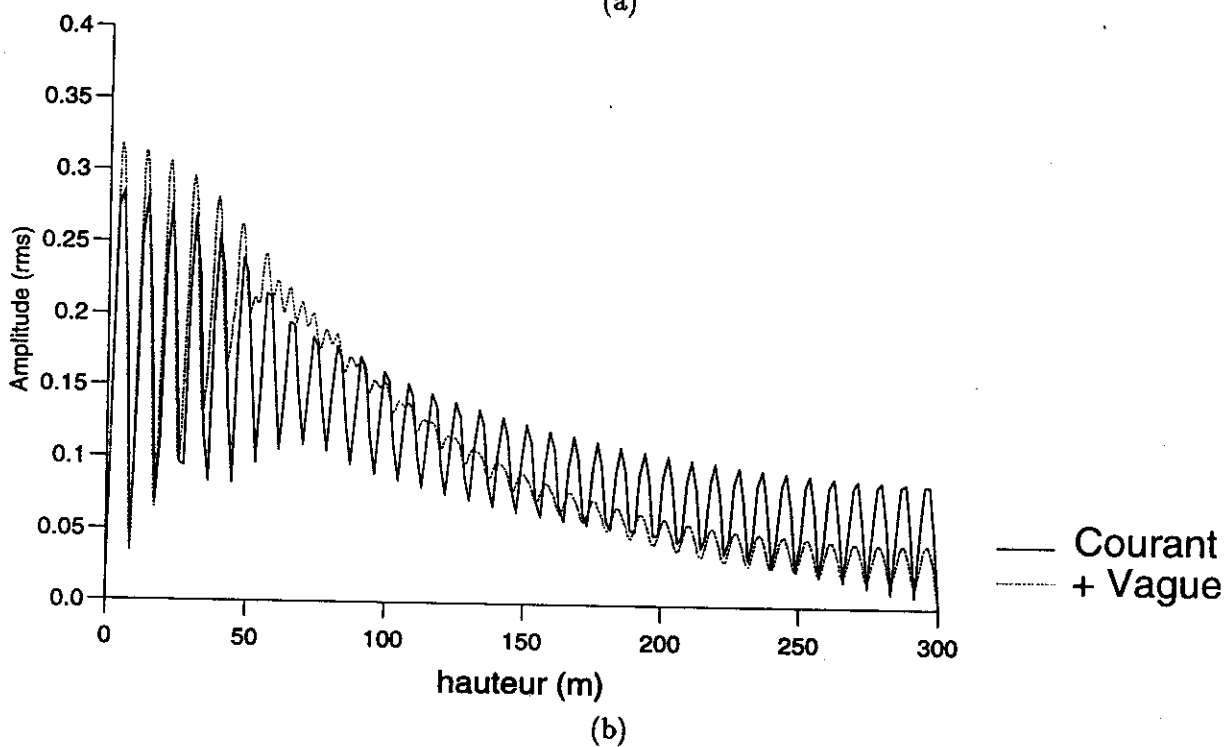
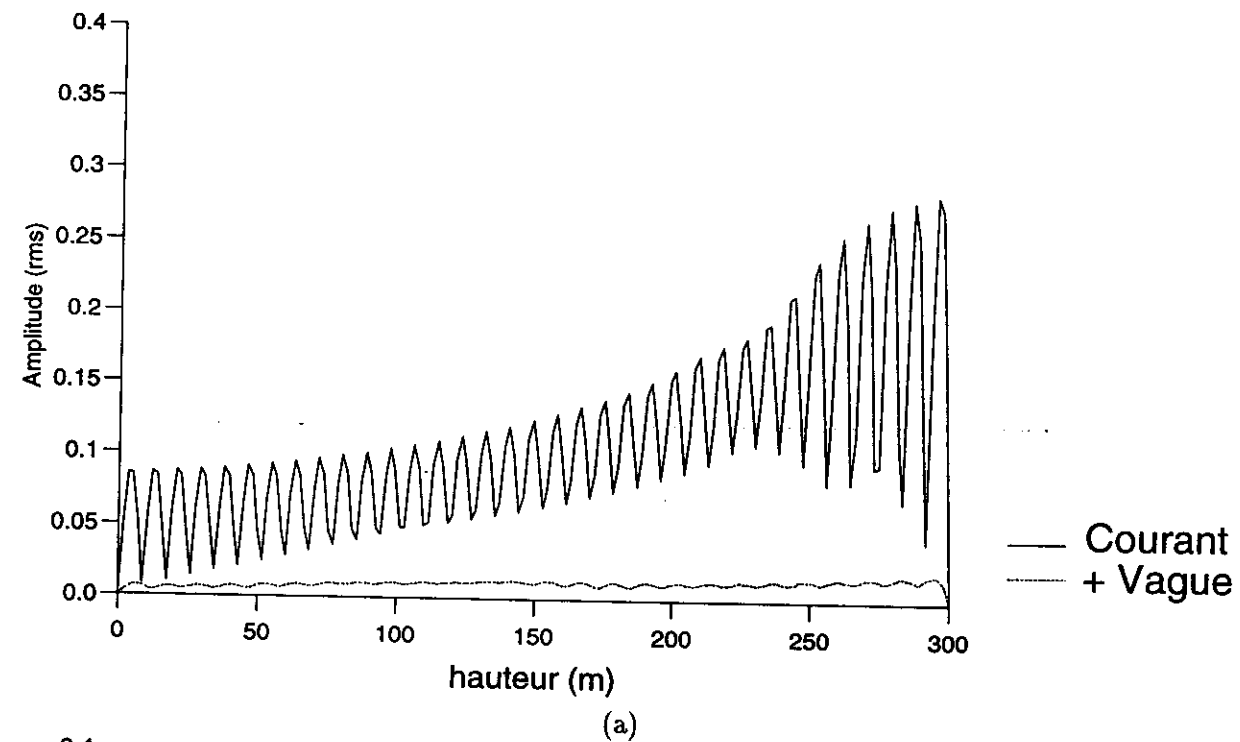


Figure 8 : Effets de vague avec (a) courant maximal en tête, (b) courant maximal en pied de structure.

Si le riser est placé dans le courant cisailé avec une vague définie par  $H = 15\text{m}$  et  $f_v = 0.0833\text{Hz}$ , l'amplitude des vibrations est diminuée comme on peut le voir sur la figure 7. Avec l'approche modale, l'effet d'atténuation est encore plus prononcé. Pour le câble, des résultats similaires sont obtenus, comme l'indique la figure 8(a). Les variations de l'amplitude rms maximale sont présentées en récapitulatif:

Méthodes	Câble		Riser	
	Courant	+ Vague	Courant	+ Vague
Modal	0.285	0.019	0.464	0.242
Onde	0.166	0.077	0.401	0.283

Un deuxième calcul a également été effectué sur le câble avec l'approche modale, en inversant le courant pour avoir la vitesse maximale en pied. Les résultats sont présentés sur la figure 8(b), où l'amplitude rms normalisée par le diamètre est donnée en fonction de la hauteur de câble.

On peut donc observer que les vagues diminuent considérablement les vibrations si elles modifient le courant maximal, qui induit la fréquence maximale, et excite le mode qui s'impose à toute la structure. En revanche, si les vagues sont situées dans la région de courant minimal, leur influence sur les vibrations est très faible.

## 4 Conclusion

L'amplitude des vibrations induites par vortex est calculée par deux méthodes. On observe que la fréquence correspondant à la vitesse maximale du courant, est présente dans la réponse de la structure, et que la région d'amplification maximale est liée au courant maximal. Lorsque le nombre de modes excités devient élevé, les deux approches produisent des résultats différents dus aux différentes méthodes sur lesquelles elles sont basées.

Dans tous les cas, introduire une perturbation, sous la forme de vagues ou de mouvement en tête dans la zone de courant maximale diminue les amplitudes des vibrations, ce qui souligne le caractère conservatif d'une approche à courant constant.

## Bibliographie

- [1] A. Bokaian. Lock-in prediction of marine risers and tethers. *Journal of Sound and Vibration*, 175(5):607–623, 1994.
- [2] M. A. Grosenbaugh, D. R. Yoerger, and M. S. Tryantafyllou. A full scale experiment study of the effect of shear current on the vortex-induced vibration and quasi-static configuration of a long tow cable. In *Eighth International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, pages 295–302, March 1989.
- [3] W. D. Iwan. The vortex-induced oscillation of non-uniform structural systems. *Journal of Sound and Vibration*, 79(2):291–301, 1981.
- [4] W. D. Iwan and N. P. Jones. On the vortex-induced oscillations of long structural elements. *Journal of Energy Resources Technology*, 109:161–167, 1987.
- [5] C. M. Larsen and K. H. J. Halse. *Comparison of models for vortex induced vibrations of slender marine structures*, pages 467–482. Bearman, 1995.
- [6] G. J. Lyons and M. H. Patel. A prediction technique for vortex induced transverse response of marine risers and tethers. *Journal of Sound and Vibration*, 111(3):467–487, 1986.

- [7] H. Nedergaard, N.-E. Ottesen Hansen, and S. Fines. Response of free hanging tethers. In *Proceedings of the Seventh International Conference on Behavior of Offshore structure*, pages 315–332, 1994.
- [8] P. S. Piccirillo and C. W. Van Atta. An experimental study of vortex shedding behind linearly tapered cylinders at low reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 246:163–195, 1992.
- [9] T. Sarpkaya and M. Issacson. *Mechanics of wave forces on offshores structures*, chapter 4. Van Nostrand Reinhold Company, 1981.
- [10] M. S. Triantafyllou and M. A. Grosenbaugh. *Prediction of vortex-induced vibrations in sheared flows*, pages 73–92. Bearman, 1995.
- [11] J. K. Vandiver and T. Y. Chung. Predicted and measured response of flexible cylinders in sheared flows. In *ASME Winter Annual Meeting Symposium on Vortex induced vibration*, 1988.
- [12] J. K. Vandiver and J.-Y. Jong. The relationship between inline and crossflow vortex-induced vibrations of cylinders. *Journal of Fluids and Structures*, 1:381–399, 1987.
- [13] J. K. Vandiver and L. Li. *SHEAR7 program theoretical manual*, 1995.
- [14] M. Venugopta. *Damping and response prediction of a flexible cylinder in a current*. PhD thesis, MIT, 1996.