

7^e JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE

MARSEILLE - 8, 9, 10 MARS 1999

**Fonction de Green pour le problème
de diffraction-radiation avec petite vitesse d'avance
en profondeur d'eau finie ou infinie**

Zalar M.¹, Malenica Š.² & Chen X.B.²

(1) *BRODARSKI INSTITUT Av. V.Holjevca 20, 10020 Zagreb, Croatie*

(2) *BUREAU VERITAS - DTA 17bis Place des Reflets, La Defense 2, 92400 Courbevoie*

Résumé

La méthode d'évaluation de la fonction de Green pour le problème de diffraction-radiation avec petite vitesse d'avance est présentée. Le résultat le plus important de ce travail est une solution efficace pour le cas de la profondeur finie. L'avantage principal de la solution proposée est l'uniformité de la solution, ce qui n'était pas le cas pour les méthodes existantes [5] qui souffrent du problème de sécularité (la solution croit pour $R \rightarrow \infty$). Bien qu'aujourd'hui, le cas de la profondeur infinie soit résolu de façon satisfaisante [3], certains aspects intéressants de cette solution sont également discutés.

Summary

The method for evaluation of the Green function for the water wave diffraction-radiation at small forward speed is presented. The main result of the present study is the efficient solution for the finite water depth case. The most important advantage of the proposed solution is its uniformity which is not the case for existing methods [5] which suffer from the problem of secularity (unphysical growth of the solution for $R \rightarrow \infty$). Even if the case of the infinite depth is efficiently solved today [3], some interesting aspects of the infinite water depth Green function are also discussed.

1 Introduction

Il est bien connu que la fonction de Green est un composant essentiel de chaque méthode numérique basée sur les équations intégrales, et que l'efficacité des codes du calcul dépend principalement de l'efficacité des algorithmes d'évaluation de la fonction de Green. Dans le domaine de la diffraction-radiation, les complexités associées à l'évaluation de la fonction Green dépendent essentiellement de la condition sur la surface libre. En ce qui concerne l'approche fréquentielle, le cas le plus général qui est celui d'un corps avançant avec une vitesse arbitraire dans la houle, pose toujours des problèmes insurmontables de calcul, pour certaines conditions particulières. Ici on ne considère pas le cas général et on introduit une hypothèse supplémentaire en supposant une petite vitesse d'avance ($\tau = U\omega/g \ll 1$). Cela nous conduit au problème de diffraction radiation avec petite vitesse d'avance connu aussi comme le problème d'interaction houle-courant-corps flottant.

Le problème de diffraction-radiation avec petite vitesse d'avance est un problème important dans la technologie off-shore. En effet, les plateformes off-shore soit rencontrent le courant dans les sites où elles sont implantées, soit sont animées des mouvements lents dus aux excitations basse fréquence. Les deux problèmes étant complètement équivalents, la description mathématique aboutit au même problème aux limites dans les deux cas. Le calcul de la fonction de Green correspondante n'est malheureusement pas simple. Le cas de la profondeur infinie reste cependant moins compliqué et on peut dire qu'il est aujourd'hui résolu de façon satisfaisante. En effet, les derniers travaux en date [9, 7] montrent que la fonction de Green avec petite vitesse d'avance peut être calculée d'une façon très efficace à partir de la fonction de Green sans vitesse d'avance seulement. Une méthodologie du calcul de la fonction de Green et de la résolution du problème aux limites a été présentée dans [3]. Bien que le cas de la profondeur finie puisse paraître très similaire, il se trouve que les difficultés numériques liées à l'évaluation de la fonction de Green sont beaucoup plus importantes. Le but principal du présent papier est de clarifier ces difficultés et de proposer une méthode efficace du calcul.

2 Problèmes aux limites et équations intégrales

Les hypothèses habituelles de l'écoulement potentiel ($\Delta\phi = 0$) aboutissent à la condition linéarisée sur la surface libre suivante, dans le domaine fréquentiel [$\phi(\mathbf{x}, t) = \Re\{\varphi(\mathbf{x})e^{-i\omega t}\}$]:

$$-\nu\varphi + 2i\tau\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} - 2i\tau\nabla\bar{\phi}\nabla\varphi + i\tau\varphi\frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

avec $\nu = \omega^2/g$, $\omega = \omega_0 - k_0U \cos\beta$ est la fréquence de rencontre, ω_0 est la fréquence fondamentale de la houle incidente, β est l'angle d'incidence, k_0 est le nombre d'onde ($\omega_0^2 = gk_0 \tanh k_0h$), h est la profondeur d'eau et $\bar{\phi}$ est le potentiel de double modèle.

En adoptant la décomposition ($\varphi = \varphi_I + \varphi_L + \tau\varphi_N$) proposé dans [3] on obtient les conditions sur la surface libre suivantes pour les potentiels φ_L et φ_N :

$$-\nu\varphi_L + 2i\tau\frac{\partial\varphi_L}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_L}{\partial z} = 0 \quad ; \quad -\nu\varphi_N + 2i\tau\frac{\partial\varphi_N}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_N}{\partial z} = Q \quad (2)$$

où Q est défini par :

$$Q = 2i\tau\nabla\bar{\phi}\nabla(\varphi_I + \varphi_L) - i\tau(\varphi_I + \varphi_L)\frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial z^2} \quad (3)$$

et φ_I désigne le potentiel incident :

$$\varphi_I = -\frac{igA \cosh k_0(z+h)}{\omega_0 \cosh k_0h} e^{ik_0(x \cos\beta + y \sin\beta)} \quad (4)$$

Le problème aux limites pour les potentiels φ_L et φ_N est complété par la condition de glissement sur les surfaces rigides (corps et le fond marin) et la condition de radiation qui peut être écrite sous la forme :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \varphi_{L,N} = \frac{f(\theta, z)}{\sqrt{\kappa R}} e^{i\kappa R(1+2\tau\partial\kappa/\partial\nu \cos\theta)} \quad (5)$$

avec κ défini par $\kappa \tanh \kappa h = \nu$.

Pour résoudre ces problèmes aux limites on utilise la fonction de Green $G(x; \xi)$ satisfaisant la condition linéaire homogène de la surface libre :

$$-\nu G + 2i\tau \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

Utilisation de la méthode des sources aboutit aux équations suivantes pour les potentiels $\varphi_{L,N}$ et les densités de sources correspondants $\sigma_{L,N}$:

$$\varphi_L = \iint_{S_B} \sigma_L G dS, \quad \left\{ -\frac{1}{2}\sigma_L + \iint_{S_B} \sigma_L \frac{\partial G}{\partial n} dS = V_n \right\}_{S_B} \quad (7)$$

$$\varphi_N = \iint_{S_B} \sigma_N G dS - \iint_{S_F} Q G dS, \quad \left\{ -\frac{1}{2}\sigma_N + \iint_{S_B} \sigma_N \frac{\partial G}{\partial n} dS = \iint_{S_F} Q \frac{\partial G}{\partial n} dS + i \frac{m_j}{\nu} \right\}_{S_B} \quad (8)$$

où $V_n = -\partial\varphi_I/\partial n$ pour la diffraction, $V_n = n_j$ pour radiation, et m_j sont les termes bien connus, qui tiennent compte de l'interaction du potentiel stationnaire avec les mouvements du corps.

Comme on peut le constater, les équations intégrales ressemblent à celles du problème sans vitesse d'avance sauf qu'il apparaît une intégrale sur la surface libre, dans le second membre (8). Cette intégrale dépend des solutions pour ϕ_L et $\bar{\phi}$ (3), et elle peut être évaluée relativement facilement dû au fait que $Q(r, \theta)$ n'est significative que localement près du corps. La difficulté principale reste l'évaluation de la fonction de Green et de ces dérivées.

3 Fonction de Green

3.1 Profondeur finie

La fonction de Green de diffraction-radiation avec petite vitesse d'avance en profondeur d'eau finie, doit satisfaire les équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \Delta G &= \delta(x - \xi) & 0 \geq z \geq -h \\ -\nu G + 2i\tau \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial z} &= 0 & z = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial z} &= 0 & z = -h \\ G &\rightarrow \frac{f(\xi, \theta, z)}{\sqrt{\kappa R}} e^{i\kappa R(1+2\tau\partial\kappa/\partial\nu \cos\theta)} & R \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

où δ désigne la fonction de Dirac.

Le problème est habituellement résolu en introduisant une nouvelle série de perturbation par rapport au paramètre de vitesse τ . On écrit :

$$G = G_0 + \tau G_1, \quad \tau = \frac{U\omega}{g} \quad (10)$$

La fonction G_0 représente la fonction de Green sans vitesse d'avance (avec fréquence de rencontre) qui est aujourd'hui bien maîtrisée et des algorithmes efficaces d'évaluation existent que ce soit en profondeur infinie ou finie [8, 2].

Par quelques manipulations simples il est possible de montrer que la fonction G_1 peut être écrite sous la forme suivante [6, 11, 10] :

$$G_1 = -2i \frac{\partial^2 G_0}{\partial x \partial \nu} \quad (11)$$

Il est donc possible de calculer la fonction de Green avec petite vitesse d'avance en utilisant la fonction de Green sans vitesse d'avance seulement. Le seul inconvénient de la méthode est que G_1 possède un comportement séculaire du type :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} G_1 = f_1(\xi, \theta, z) \frac{(x - \xi)}{\sqrt{\kappa R}} e^{i\kappa R} = O(\sqrt{R}) \quad (12)$$

3.1.1 Calcul de la fonction de Green uniforme par la méthode des échelles multiples

On se base ici sur la méthodologie présentée dans [7] et, vu la forme de la sécularité (12) on introduit une nouvelle variable $\gamma = \tau(x - \xi)$ avec la série de perturbation suivante :

$$G(\mathbf{x}; \xi) = g_0(\gamma; \mathbf{x}; \xi) + \tau g_1(\gamma; \mathbf{x}; \xi) \quad (13)$$

Après avoir introduit cette série de perturbation dans le problème aux limites original (9), on obtient les équations suivantes pour les deux fonctions g_0 et g_1 :

$$\left. \begin{array}{l} \Delta g_0 = \delta(\mathbf{x} - \xi) \\ -\nu g_0 + \frac{\partial g_0}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial g_0}{\partial z} = 0 \\ g_0 \rightarrow \frac{f_0(\gamma, \xi, \theta, z)}{\sqrt{\kappa R}} e^{i\kappa R} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Delta g_1 = -2 \frac{\partial^2 g_0}{\partial \gamma \partial x} \\ -\nu g_1 + \frac{\partial g_1}{\partial z} = -2i \frac{\partial g_0}{\partial x} \\ \frac{\partial g_1}{\partial z} = 0 \\ (g_0 + \tau g_1) \rightarrow \frac{f(\gamma, \xi, \theta, z)}{\sqrt{\kappa R}} e^{i\kappa R(1+2\tau \partial \kappa / \partial \nu \cos \theta)} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} 0 \geq z \geq -h \\ z = 0 \\ z = -h \\ R \rightarrow \infty \end{array} \right\} \quad (14)$$

La solution la plus générale pour g_0 peut être écrite sous la forme :

$$g_0 = F(\gamma) G_0 \quad (15)$$

D'autre part la solution particulière pour g_1 peut être trouvée sous la forme :

$$g_1 = F(\gamma) \left[-2i \frac{\partial^2 G_0}{\partial \nu \partial x} + C(x - \xi) G_0 \right] \quad (16)$$

où C est la constante à déterminer en exigeant la nonsécularité de la solution. L'équation de Poisson (14) pour g_1 donne :

$$2 \frac{\partial G_0}{\partial x} \left[C F(\gamma) + \frac{\partial F(\gamma)}{\partial \gamma} \right] = 0 \quad (17)$$

d'où on déduit la solution pour $F(\gamma)$:

$$F(\gamma) = e^{-C\gamma} \quad (18)$$

Connaissant le comportement de G_0 pour $R \rightarrow \infty$, on déduit la constante C de la condition de radiation pour g_1 :

$$C = -2i\kappa \frac{\partial \kappa}{\partial \nu} \quad (19)$$

On peut maintenant écrire la solution finale pour G :

$$G = e^{2i\tau \frac{\partial \kappa}{\partial \nu} \kappa (x - \xi)} \left\{ G_0 - 2i\tau \left[\frac{\partial^2 G_0}{\partial \nu \partial x} + \frac{\partial \kappa}{\partial \nu} \kappa (x - \xi) G_0 \right] \right\} \quad (20)$$

Si on compare cette solution à la solution séculaire (12) on peut remarquer que les modifications pour obtenir la solution non-séculaire ne sont pas très importantes. La difficulté principale reste l'évaluation de la dérivée double de G_0 par rapport au nombre d'onde ν et la variable horizontale x . On doit noter que, dans le but de résoudre les équations intégrales (7,12), on devrait même calculer les dérivées triples de G_0 ce qui complique d'avantage le calcul numérique.

3.2 Profondeur infinie

Dans le cas de la profondeur d'eau infinie, les premiers essais pour trouver une solution uniforme de la fonction de Green ont été fait dans [6]. Les auteurs ont identifié les causes de la sécularité en étudiant la partie vague (les residus) de la fonction de Green, et ont proposé une correction obtenue par inspection. Une approche plus directe a été proposée dans [9] où les auteurs utilisent une nouvelle décomposition des effets de surface libre et opèrent directement sur la représentation intégrale de la fonction de Green. On résume brièvement le résultat principal de cette étude.

Si on écrit la fonction de Green sans vitesse d'avance G_0 sous la forme :

$$4\pi G_0(x; \xi) = -\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} - 2\nu \bar{G}(\bar{R}, \bar{Z}) \quad (21)$$

la fonction de Green avec vitesse d'avance peut être écrite comme :

$$4\pi G = -\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} (2e^{2i\tau \bar{X}} - 1) - 2\nu e^{2i\tau \bar{X}} [\bar{G} - 2i\tau(1 + \bar{Z}) \frac{\bar{X}}{\bar{R}} \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{R}}] \quad (22)$$

où :

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2} \quad , \quad r' = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2} \quad (23)$$

$$\bar{R} = \nu \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \quad , \quad \bar{X} = \nu(x - \xi) \quad , \quad \bar{Z} = \nu(z + \zeta) \quad (24)$$

On remarque donc, que pour calculer la fonction de Green avec petite vitesse d'avance on n'a besoin que de la fonction de Green sans vitesse d'avance et de sa dérivée radiale.

En ce qui concerne la méthode des échelles multiples elle reste pratiquement la même dans le cas de la profondeur infinie, et la solution finale peut être déduite de l'expression (20) en mettant simplement $\kappa = \nu$:

$$G = e^{2i\tau \bar{X}} \left\{ G_0 - 2i\tau \left[\frac{\partial^2 G_0}{\partial \nu \partial x} + \bar{X} G_0 \right] \right\} \quad (25)$$

Pour démontrer que les deux solutions (25,22) sont les mêmes à l'ordre $O(\tau)$ on utilise la propriété suivante de la fonction $\bar{G}(\bar{R}, \bar{Z})$:

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{Z}} = \bar{G} + \frac{1}{\nu r'} \quad (26)$$

En sachant que la dérivée par rapport au nombre d'onde peut être écrite sous la forme :

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial \nu} = R \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{R}} + Z \frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{Z}} \quad (27)$$

il est aisé de démontrer l'équivalence des deux solutions.

4 Evaluation numérique de la fonction de Green en profondeur d'eau finie

Le cas de la profondeur finie est plus compliqué essentiellement parce que il n'existe pas de relation équivalente au (26), ce qui fait que tous les dérivées doubles et triples doivent être effectuées numériquement. Pour mieux comprendre le processus on rappelle d'abord la façon dont la fonction de Green sans vitesse d'avance est approximée.

4.1 U=0

Ici on utilise la méthode présentée dans [2] et seuls les résultats les plus importants sont présentés. On notera que bien qu'on dit $U = 0$, ce n'est pas vraiment le cas car on utilise la fréquence de rencontre ω au lieu de la fréquence fondamentale ω_0 .

4.1.1 Fonction de Green

Après l'utilisation des transformées de Fourier, l'expression suivante pour la fonction de Green $G_0(x; \xi) = \Re\{G_0\} + i\Im\{G_0\}$ est obtenue :

$$\begin{aligned} 4\pi\Re\{G_0\} &= -\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} - VP \int_0^\infty \frac{2(k+\nu)e^{-kh}}{k \sinh kh - \nu \cosh kh} \cosh k(z+h) \cosh k(\zeta+h) J_0(kR) dk \\ 4\pi\Im\{G_0\} &= -\frac{4\pi\kappa}{2\kappa h + \sinh 2\kappa h} \cosh \kappa(z+h) \cosh \kappa(\zeta+h) J_0(\kappa R) \end{aligned} \quad (28)$$

4.1.2 Approximations de la fonction de Green

Dans l'approximations de la fonction de Green, on doit tout d'abord distinguer deux domaines. En fait, loin de la source on peut utiliser la représentation de la fonction de Green en série dite de John :

$$\begin{aligned} 4\pi G_0 &= -i \frac{4\pi\kappa}{2\kappa h + \sinh 2\kappa h} \cosh \kappa(z+h) \cosh \kappa(\zeta+h) H_0(\kappa R) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\kappa_n}{2\kappa_n h + \sin 2\kappa_n h} \cos \kappa_n(z+h) \cos \kappa_n(\zeta+h) K_0(\kappa_n R) \end{aligned} \quad (29)$$

où H_0 est la fonction de Hankel $H_0 = J_0 + iY_0$, K_0 est la fonction de Bessel modifiée et κ_n sont définis par $-\kappa_n \tan \kappa_n h = \nu$.

Cette série converge bien pour $R \geq h$ et seulement 5 termes sont nécessaires pour avoir une précision de 10^{-6} . On adopte donc, cette représentation pour $R \geq h$.

Dans le cas de $R < h$ la partie imaginaire de la fonction de Green reste celle définie par (28) tandis que les expressions pour la partie réelle peuvent être synthétisées sous la forme :

$$4\pi\Re\{G_0\} = -\frac{1}{r} - \sum_{j=1}^5 \frac{1}{r_j} - 2 \begin{cases} \kappa \tilde{G}(\tilde{R}, \tilde{Z}_p, \tilde{Z}_m, \tilde{H}) + \nu \Re\{\tilde{G}(\tilde{R}, \tilde{Z})\} & 0 \leq \tilde{Z}_p < 1 \\ \kappa \tilde{G}(\tilde{R}, \tilde{Z}_p, \tilde{Z}_m, \tilde{H}) & 1 \leq \tilde{Z}_p \leq 2 \end{cases} \quad (30)$$

avec :

$$\tilde{R} = \frac{R}{h}, \quad \tilde{Z}_p = -\frac{z+\zeta}{h}, \quad \tilde{Z}_m = -\frac{z-\zeta}{h}, \quad \tilde{H} = \kappa h \quad (31)$$

et :

$$r_j = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta_j)^2} \quad (32)$$

$$\zeta_1 = -\zeta, \quad \zeta_2 = -\zeta - 2h, \quad \zeta_3 = \zeta - 2h, \quad \zeta_4 = \zeta + 2h, \quad \zeta_5 = -\zeta - 4h \quad (33)$$

La différence essentielle par rapport à la fonction de Green en profondeur infinie est l'apparition de la fonction $\tilde{G}(\tilde{R}, \tilde{Z}_p, \tilde{Z}_m, \tilde{H})$. En réalité les variables \tilde{Z}_p et \tilde{Z}_m peuvent être séparées et on obtient finalement deux fonctions de trois variables :

$$\tilde{G}(\tilde{R}, \tilde{Z}_p, \tilde{Z}_m, \tilde{H}) = \tilde{G}_p(\tilde{R}, \tilde{Z}_p, \tilde{H}) + \tilde{G}_m(\tilde{R}, \tilde{Z}_m, \tilde{H}) \quad (34)$$

Ces fonctions sont ensuite approximées par les polynômes triples de Chebychev qui sont ensuite transformés en polynômes ordinaires. Cela nous mène aux expressions suivantes :

$$\tilde{G}_p(\tilde{R}, \tilde{Z}_p, \tilde{H}) = \sum_{i=0}^{N_i} \sum_{j=0}^{N_j} \sum_{k=0}^{N_k} \alpha_{ijk} \tilde{R}^{2i} \tilde{Z}_p^{j,k}, \quad \tilde{G}_m(\tilde{R}, \tilde{Z}_m, \tilde{H}) = \sum_{i=0}^{N_i} \sum_{j=0}^{N_j} \sum_{k=0}^{N_k} \beta_{ijk} \tilde{R}^{2i} \tilde{Z}_m^{j,k} \quad (35)$$

où t est une fonction linéaire de \bar{H} qui dépend de l'intervalle de \bar{H} dans laquelle on effectue l'approximation [2].

Du point de vue de l'efficacité du calcul, il est important de noter que la dépendance en \bar{H} peut être factorisée pour un couple fréquence-profondeur et être calculé une fois, avant le début du calcul des coefficients d'influence. On écrit pour \tilde{G}_m par exemple :

$$\tilde{G}_m(\tilde{R}, \tilde{Z}_m, \bar{H}) = \sum_{i=0}^{N_i} \sum_{j=0}^{N_j} B_{ij} \tilde{R}^{2i} \tilde{Z}_m^{2j} \quad , \quad B_{ij} = \sum_{k=0}^{N_k} \beta_{ijk} t^k \quad (36)$$

On remarque que dans l'expression pour \tilde{G}_m (et de façon similaire pour \tilde{G}_p) seuls les coefficients B_{ij} dépendent du nombre d'onde ν ce qui est un avantage important pour le calcul de la dérivée de la fonction de Green par rapport au nombre d'onde (20).

4.2 U > 0

Il s'agit ici de calculer l'expression (20) et son gradient à partir des approximations décrites dans la section précédente. La difficulté principale est de calculer les dérivées de la fonction G_0 par rapport au nombre d'onde ν et les variables d'espace. En ce qui concerne la partie imaginaire de G_0 il n'y a pas de difficulté puisque elle est connue de façon analytique (28) et les dérivées peuvent être effectuées directement. Il en va de même pour la région $\tilde{R} \geq 1$ où l'expression de John (29) peut être utilisée. La seule partie "critique" reste la partie réelle de G_0 dans la région $\tilde{R} < 1$ (30). Comme on l'a vu dans la section 3.2 la partie concernant la fonction \tilde{G} est également facile à calculer et on se concentre maintenant sur la fonction \tilde{G} . Considérons donc la fonction :

$$f = -2\kappa \tilde{G}(\tilde{R}, \tilde{Z}_p, \tilde{Z}_m, \bar{H}) \quad (37)$$

Dans le but d'évaluer les coefficients d'influence, on doit calculer les dérivées suivantes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \nu \partial x} \quad , \quad \frac{\partial^3 f}{\partial \nu \partial x^2} \quad , \quad \frac{\partial^3 f}{\partial \nu \partial x \partial y} \quad , \quad \frac{\partial^3 f}{\partial \nu \partial x \partial z} \quad (38)$$

Vu que seule la variable \bar{H} dépend de ν cela donne les expressions suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} = -2 \frac{\partial \kappa}{\partial \nu} \left[\tilde{G} + \bar{H} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \bar{H}} \right] \quad (39)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \nu \partial x} = -\frac{2}{h} \frac{\partial \kappa}{\partial \nu} \frac{x}{R} \left[\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tilde{R}} + \bar{H} \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial \tilde{R} \partial \bar{H}} \right] \quad (40)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \nu \partial x^2} = -\frac{2}{h} \frac{\partial \kappa}{\partial \nu} \left\{ \left(\frac{1}{R} - \frac{x^2}{R^3} \right) \left[\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tilde{R}} + \bar{H} \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial \tilde{R} \partial \bar{H}} \right] + \frac{1}{h} \frac{x^2}{R^2} \left[\frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial \tilde{R}^2} + \bar{H} \frac{\partial^3 \tilde{G}}{\partial \tilde{R}^2 \partial \bar{H}} \right] \right\} \quad (41)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \nu \partial x \partial y} = -\frac{2}{h} \frac{\partial \kappa}{\partial \nu} \left\{ -\frac{xy}{R^3} \left[\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tilde{R}} + \bar{H} \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial \tilde{R} \partial \bar{H}} \right] + \frac{1}{h} \frac{xy}{R^2} \left[\frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial \tilde{R}^2} + \bar{H} \frac{\partial^3 \tilde{G}}{\partial \tilde{R}^2 \partial \bar{H}} \right] \right\} \quad (42)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \nu \partial x \partial z} = -\frac{2}{h} \frac{\partial \kappa}{\partial \nu} \frac{x}{R} \left\{ -\frac{1}{h} \left[\frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial \tilde{R} \partial \tilde{Z}_p} + \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial \tilde{R} \partial \tilde{Z}_m} + \bar{H} \left(\frac{\partial^3 \tilde{G}}{\partial \tilde{R} \partial \bar{H} \partial \tilde{Z}_p} + \frac{\partial^3 \tilde{G}}{\partial \tilde{R} \partial \bar{H} \partial \tilde{Z}_m} \right) \right] \right\} \quad (43)$$

On voit donc apparaître les dérivées triples de la fonction \tilde{G} . Comme on l'avait déjà dit, ces dérivées seront calculés en dérivant directement les séries polynomiales (36).

5 Résultats numériques et discussions

Le point critique de la méthode décrite plus haut est la possible perte de la précision lorsque on dérive les séries polynomiales. Comme on l'avait dit les séries polynomiales ont été tronquées pour avoir une précision de 10^{-6} . Les fonctions approximées étant lisses [2], et vu la précision de l'approximation polynomiales [$O(10^{-6})$], on s'attendait à obtenir les résultats satisfaisant pour les dérivées. Pour démontrer que c'est effectivement le cas on a choisi de faire des tests sur la fonction de Green pour la profondeur infinie. En effet, certaines parties de la partie réelle de la fonction \bar{G} sont également approximées par les polynômes similaires aux (36). Grâce à la propriété (26) de \bar{G} et au fait qu'elle satisfait l'équation de Laplace on peut obtenir les dérivées de n'importe quelle ordre analytiquement. On a donc décidé de comparer ces dérivées analytiques aux dérivées obtenues par la dérivation directe des séries polynomiales. Sur la figure 1. et dans le tableau 1. sont présentés les dérivées double et triples de la partie réelle de la fonction \bar{G} . On voit que l'accord entre les résultats analytiques et numériques est très satisfaisant. Nombreux autres tests ont été effectués, et d'une façon générale on peut dire que la différence entre les résultats numériques et analytiques n'est importante qu'après le troisième chiffre significatif. La seule exception est la dérivées triples par \bar{Z} où des écarts de quelques pour-cent ont été observés pour certains paramètres. Il faut dire que cela était prévisible car, comme on l'avait dit auparavant, les fonctions sont approximées avec les polynômes d'ordre 5 dans chacune des directions, et la dérivation triple dans une seule direction nous emmène aux polynômes d'ordre 2. Ceci dit, grâce à l'équation de Laplace on peut toujours transformer une dérivée triple dans une seule direction en une dérivée triple combinée dans deux directions. D'un autre côté on avait montré par les expressions (39-43) que dans le cas de la profondeur finie on n'aura jamais besoin d'une dérivée triple dans une seule direction. Sur la figure 2. et dans le tableau 2. on présente maintenant les résultats pour la fonction de Green avec petite vitesse d'avance dans la profondeur d'eau infinie. Encore une fois, les résultats obtenus avec les dérivations analytiques et numériques sont comparés et encore une fois l'accord entre les deux sortes de résultats est très bon. Ce qu'il faut noter aussi, c'est que seule une partie de la fonction \bar{G} est approximée par les polynômes et le reste, qui est connu analytiquement, n'est pas affecté par les dérivations numériques. Des nombreux autres tests pour les différents paramètres ont été effectués et le même type d'accord a été observé.

On passe maintenant à la profondeur finie, et on note d'abord que, en ce qui concerne les dérivées de la fonction de Green par rapport au nombre d'onde, il est également possible de les obtenir par simple différentiation numérique :

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} = \frac{f(\nu + \epsilon) - f(\nu - \epsilon)}{2\epsilon} \quad (44)$$

ϵ étant une petite valeur judicieusement choisit.

La même chose est bien sûr valable pour la dérivation par rapport au ν des dérivées spatiales de la fonction de Green (39-43). Puisque dans le cas de la profondeur finie on n'a pas des résultats analytiques de référence, on choisit donc de comparer les dérivations obtenues par les expressions (39-43) avec ceux obtenues par différentiation numérique. Deux méthodes étant très différentes cela nous donnera une confirmation supplémentaire sur la validité des approximations utilisées. Comme on peut le voir sur la figure 3., l'accord est très bon.

Un dernier test qu'on se propose de faire afin de s'assurer de la solidité de la formulation adoptée est celui concernant la vérification de la condition sur la surface libre. On note d'abord que, la condition originale pour G (9) doit être exacte à l'ordre $O(\tau)$ et de ce fait il serait difficile d'interpréter les comparaisons car on ne pourra pas savoir si les petites valeurs qu'on va obtenir seront dus aux imprécisions des dérivations numériques où bien aux termes d'ordre $O(\tau^2)$. Pour cela on choisit plutôt de vérifier la condition suivante qui peut être vérifiée facilement :

$$-\nu \frac{\partial^2 G_0}{\partial \nu \partial x} + \frac{\partial^3 G_0}{\partial \nu \partial x \partial z} = \frac{\partial G_0}{\partial x} \quad (45)$$

\bar{R}	$\Re\{\partial^2 \bar{G}/\partial \bar{R}^2\}$		$\Re\{\partial^2 \bar{G}/\partial \bar{Z}^2\}$		$\Re\{\partial^2 \bar{G}/\partial \bar{R} \bar{Z}\}$	
	Analytique	Numérique	Analytique	Numérique	Analytique	Numérique
.25	2.41275	2.41274	7.63093	7.63082	5.50248	5.50248
.50	-.13166	-.13166	2.89577	2.89573	4.03575	4.03575
.75	-.74328	-.74329	1.10878	1.10880	2.81200	2.81200
1.00	-.96966	-.96970	.20185	.20145	2.05025	2.05023
1.25	-1.09157	-1.09160	-.36159	-.36155	1.50091	1.50091
1.50	-1.15665	-1.15665	-.73639	-.73638	1.04943	1.04944
1.75	-1.17160	-1.17160	-.97828	-.97826	.65096	.65096
2.00	-1.13691	-1.13691	-1.11255	-1.11253	.29052	.29052
2.25	-1.05399	-1.05399	-1.15448	-1.15448	-.03374	-.03374
11.75	.54218	.54218	.54161	.54161	.00056	.00056
12.00	.51426	.51426	.52476	.52476	.13298	.13298
12.25	.45577	.45577	.47600	.47600	.25456	.25456
12.50	.37083	.37083	.39897	.39897	.35811	.35811
12.75	.26508	.26508	.29893	.29893	.43772	.43772
13.00	.14529	.14529	.18246	.18245	.48900	.48900
13.25	.01898	.01898	.05699	.05699	.50937	.50937
13.50	-.10610	-.10610	-.06961	-.06961	.49816	.49816
13.75	-.22240	-.22240	-.18957	-.18957	.45665	.45665
14.00	-.32301	-.32301	-.29567	-.29567	.38789	.38789

\bar{R}	$\Re\{\partial^3 \bar{G}/\partial \bar{R} \partial \bar{R}^2\}$		$\Re\{\partial^3 \bar{G}/\partial \bar{R}^2 \partial \bar{Z}\}$		$\Re\{\partial^3 \bar{G}/\partial \bar{Z}^3\}$	
	Analytique	Numérique	Analytique	Numérique	Analytique	Numérique
.25	30.27715	30.27744	-1.44109	-1.44162	20.56881	20.56479
.50	10.71174	10.71177	-6.21422	-6.21428	1.85728	1.85751
.75	4.77469	4.77540	-3.75274	-3.75285	-.00341	-.00218
1.00	2.77582	2.77254	-2.50947	-2.50943	-.45922	-.47243
1.25	1.82138	1.82492	-1.95615	-1.95610	-.75543	-.75395
1.50	1.21061	1.20955	-1.68315	-1.68308	-.98353	-.98310
1.75	.74022	.74069	-1.51361	-1.51367	-1.14163	-1.14195
2.00	.34372	.34328	-1.37072	-1.37072	-1.22547	-1.22568
2.25	-.00013	.00001	-1.22051	-1.22053	-1.23551	-1.23551
11.75	.00060	.00056	.54095	.54094	.54100	.54107
12.00	.13303	.13305	.51310	.51310	.52418	.52420
12.25	.25460	.25459	.45468	.45468	.47546	.47541
12.50	.35815	.35815	.36981	.36981	.39846	.39842
12.75	.43776	.43774	.26412	.26412	.29845	.29846
13.00	.48903	.48899	.14439	.14438	.18200	.18195
13.25	.50940	.50940	.01812	.01812	.05656	.05650
13.50	.49819	.49819	-.10691	-.10691	-.07001	-.07003
13.75	.45667	.45669	-.22316	-.22316	-.18995	-.18986
14.00	.38792	.38791	-.32374	-.32374	-.29603	-.29601

Table 1: Les dérivées multiples de la fonction \bar{G} . Voir figure 1.

La dérivée $\partial G_0/\partial x$ étant connue, cela représente un test final sur la validité des approximations utilisées. Les résultats présentés sur la figure 4. et dans le tableau 3. montrent que la condition (45) est satisfaite avec une très grande précision. Nombreux autres tests pour les différents paramètres ont été effectués et l'accord a toujours été satisfaisant. On arrête ici les tests de validation et on présente maintenant quelques résultats sur la fonction de Green totale G pour démontrer l'utilité de tous ces développements.

Sur la figure 5. sont présentées les résultats pour la fonction de Green en profondeur finie et infinie pour mesurer l'influence de la profondeur qui peut être très importante. Pour montrer les effets néfastes de la sécularité sur la même figure est présentée la solution séculaire. On voit que la solution séculaire devient rapidement fautive quand on s'éloigne de la source et d'autre part l'effet Doppler n'y est pas présent ce qui fait que les longueurs d'ondes devant et derrière la source sont les mêmes.

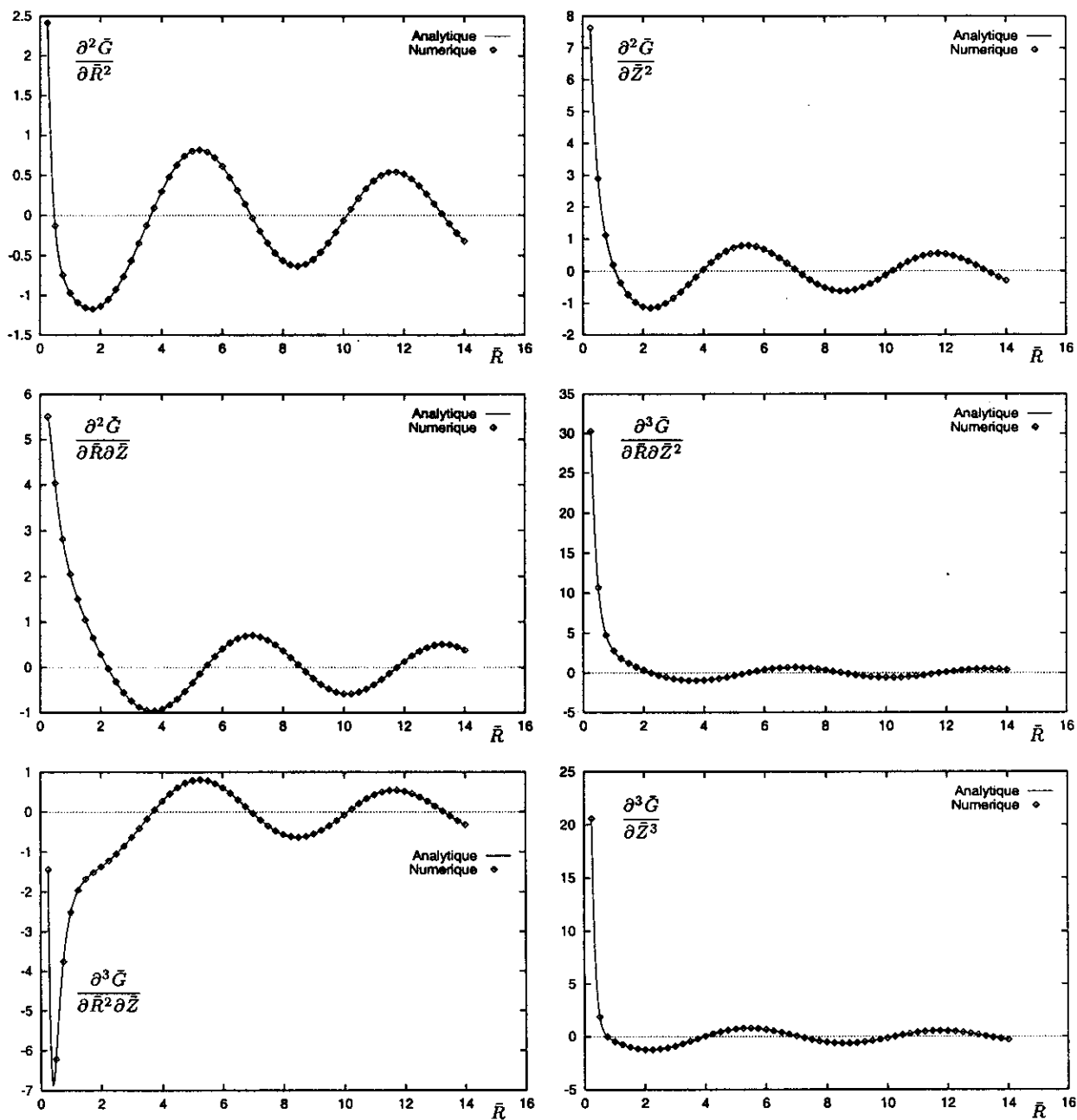


Figure 1: Les dérivées multiples de la fonction \bar{G} pour $\bar{Z} = -0.3$.

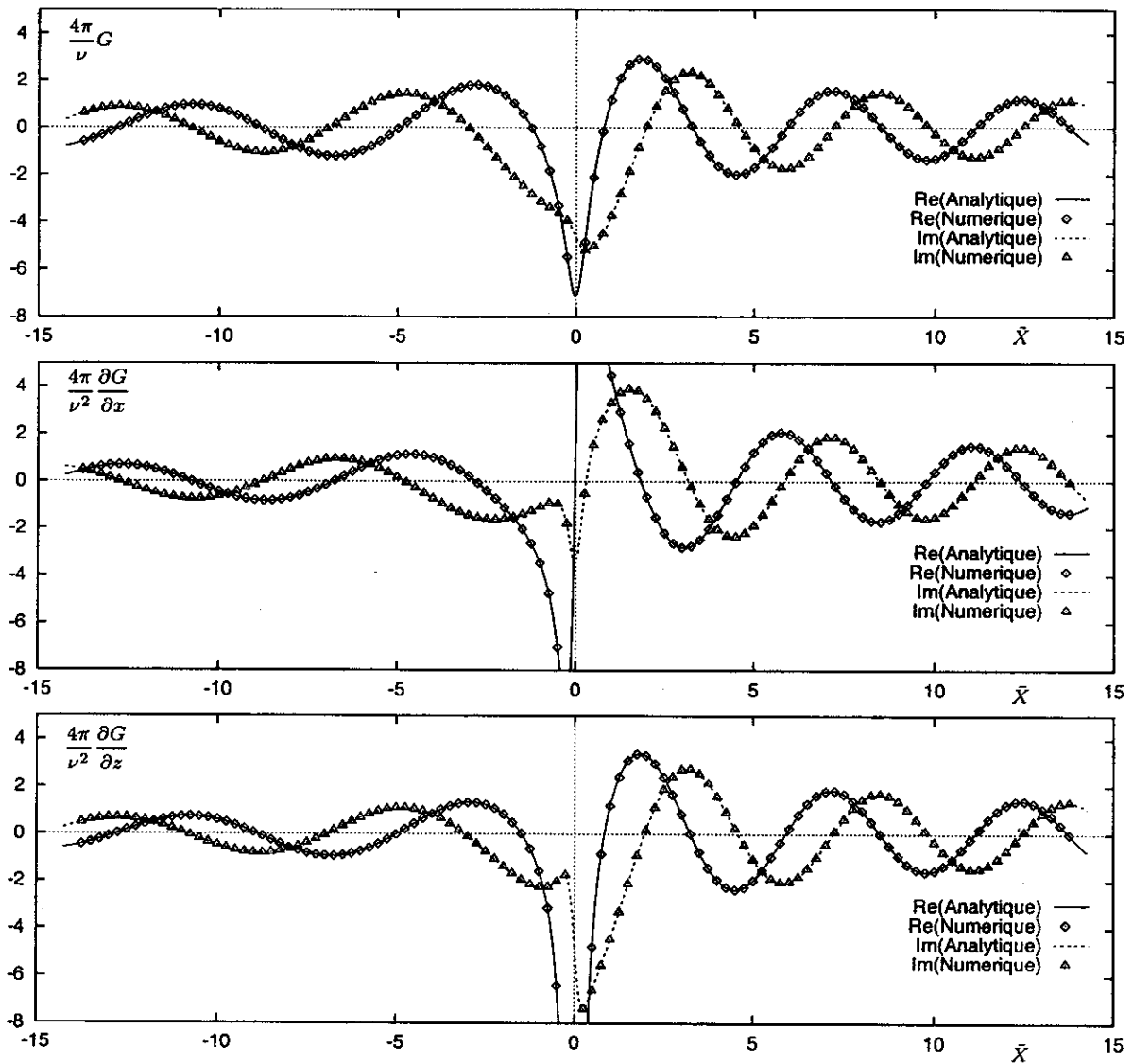


Figure 2: La fonction de Green avec vitesse d'avance, et ses dérivées dans le cas de la profondeur infinie et pour $\omega = 0.6$, $z = 0.$, $\nu\zeta = -0.3$.

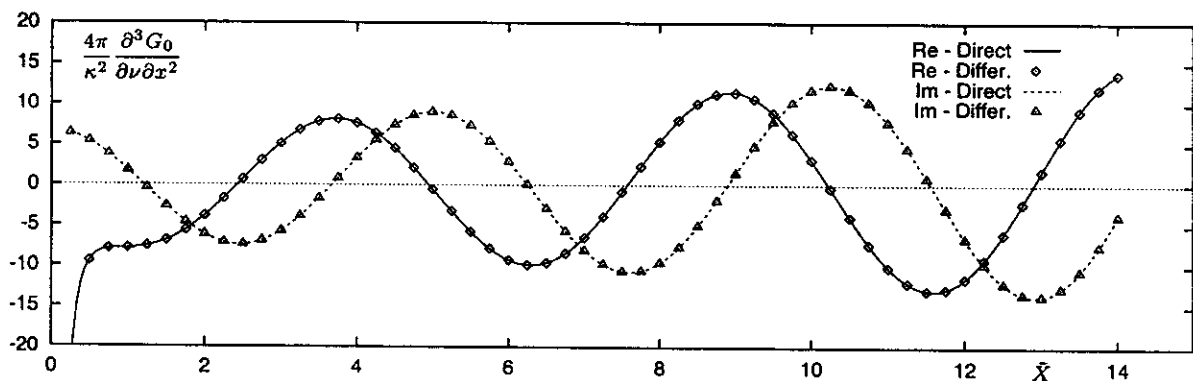


Figure 3: La dérivée triple de la fonction de Green sans vitesse d'avance pour $h = 30.$, $\omega = 0.6$, $z = 0.$, $\zeta = 0.$.

\bar{R}	$4\pi G /\nu$		$4\pi \partial G/\partial x /\nu^2$		$4\pi \partial G/\partial z /\nu^2$	
	Analytique	Numérique	Analytique	Numérique	Analytique	Numérique
-13.75	.86216	.86216	.66259	.66255	.66238	.66192
-13.50	.87034	.87034	.66869	.66870	.66883	.66895
-13.25	.87869	.87869	.67495	.67495	.67536	.67571
-13.00	.88718	.88720	.68137	.68131	.68194	.68217
-12.75	.89581	.89581	.68798	.68795	.68857	.68854
-12.50	.90460	.90459	.69479	.69480	.69524	.69536
-1.50	2.54878	2.54878	2.47549	2.47598	1.92880	1.92843
-1.25	2.83210	2.83212	2.92244	2.92131	2.22288	2.22256
-1.00	3.23786	3.23787	3.62746	3.62801	2.74883	2.75332
-.75	3.86168	3.86169	4.84342	4.84335	3.85432	3.85413
-.50	4.90942	4.90942	7.09508	7.09508	6.71279	6.71277
-.25	6.74766	6.74766	10.03511	10.03511	15.66211	15.66218
.25	7.10980	7.10980	12.29220	12.29220	16.46586	16.46568
.50	5.45547	5.45547	9.26118	9.26119	8.15500	8.15503
.75	4.49316	4.49316	6.88120	6.88125	5.61811	5.61838
1.00	3.91137	3.91136	5.54480	5.54432	4.61374	4.60884
1.25	3.52588	3.52587	4.73668	4.73776	4.08928	4.08957
1.50	3.25023	3.25023	4.20309	4.20261	3.75835	3.75865
12.50	1.19653	1.19653	1.40885	1.40883	1.40650	1.40638
12.75	1.18436	1.18436	1.39486	1.39489	1.39209	1.39212
13.00	1.17263	1.17261	1.38127	1.38133	1.37821	1.37799
13.25	1.16133	1.16133	1.36806	1.36805	1.36488	1.36452
13.50	1.15045	1.15045	1.35521	1.35521	1.35206	1.35194
13.75	1.13997	1.13997	1.34273	1.34277	1.33974	1.34019

Table 2: La fonction de Green et ses dérivées dans le cas de la profondeur infinie. Voir figure 2.

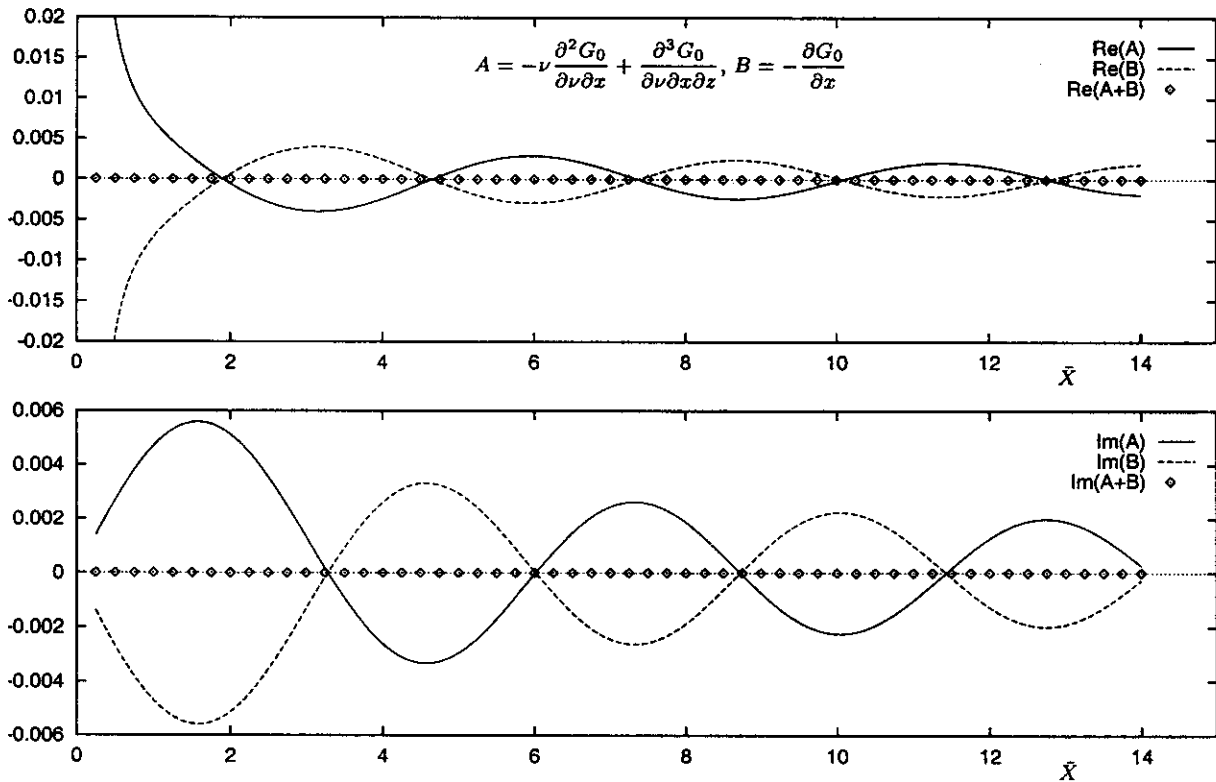
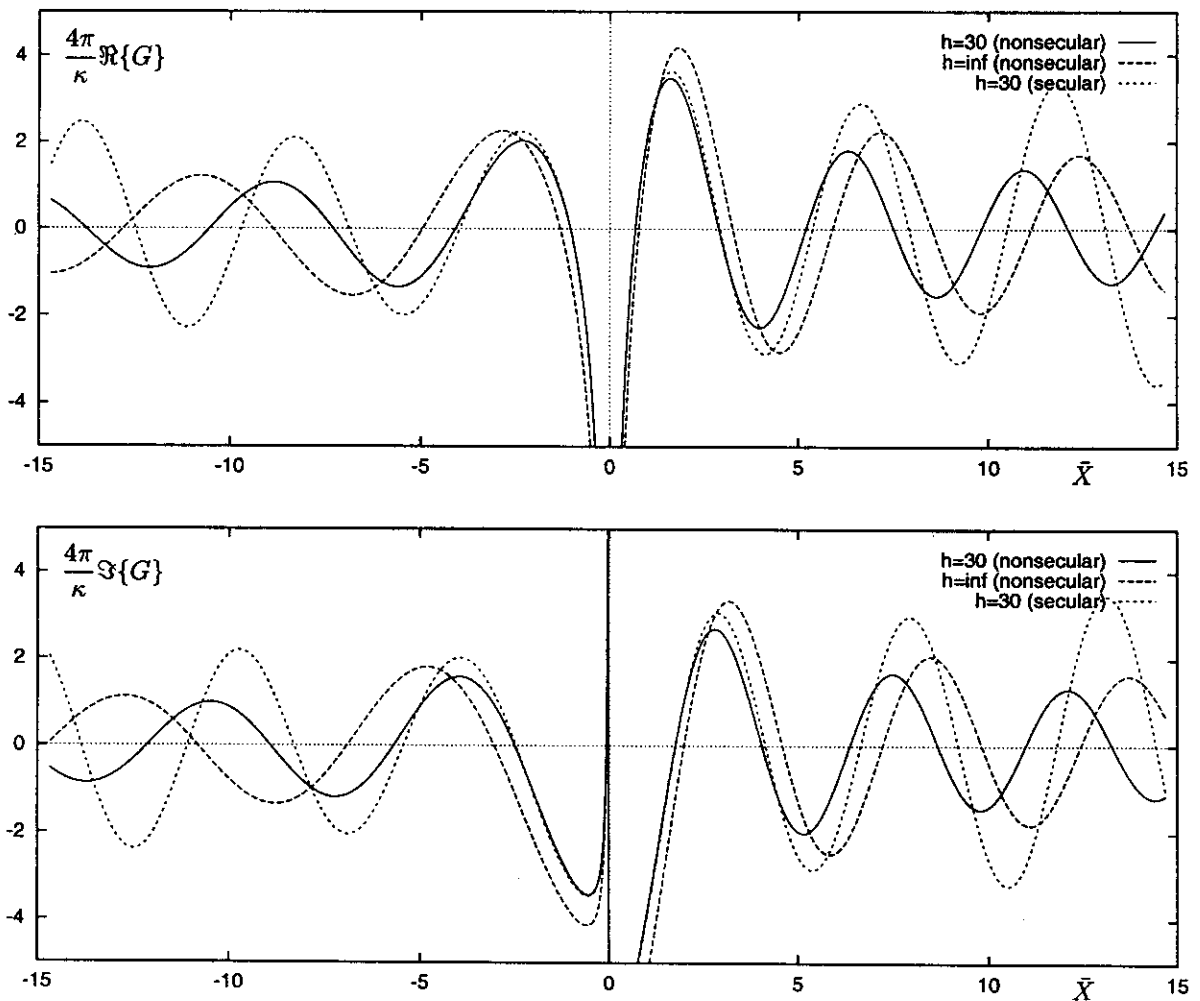


Figure 4: Vérification de la condition sur la surface libre. pour $h = 30.$, $\omega = 0.6$, $z = 0.$, $\zeta = 0.$

\bar{R}	$\Re\{A\}$	$\Re\{B\}$	$\Re\{A+B\}$	$\Im\{A\}$	$\Im\{B\}$	$\Im\{A+B\}$
.25	.57065E-01	-.57067E-01	-.22604E-05	.13860E-02	-.13860E-02	-.43470E-09
.50	.19216E-01	-.19219E-01	-.30938E-05	.26844E-02	-.26844E-02	-.56040E-09
.75	.10933E-01	-.10939E-01	-.69406E-05	.38134E-02	-.38134E-02	-.20869E-09
1.00	.71422E-02	-.71531E-02	-.10911E-04	.47035E-02	-.47035E-02	-.96793E-09
1.25	.46591E-02	-.46591E-02	-.31413E-09	.53018E-02	-.53018E-02	-.48244E-09
1.50	.26474E-02	-.26474E-02	-.14917E-09	.55755E-02	-.55755E-02	-.42775E-09
1.75	.90765E-03	-.90765E-03	-.98128E-09	.55144E-02	-.55144E-02	-.75691E-09
2.00	-.60608E-03	.60608E-03	-.12090E-08	.51315E-02	-.51315E-02	-.77211E-09
2.25	-.18785E-02	.18785E-02	-.12866E-08	.44609E-02	-.44609E-02	-.72887E-09
11.75	.19281E-02	-.19281E-02	-.34601E-09	.76329E-03	-.76329E-03	-.66020E-09
12.00	.16110E-02	-.16110E-02	-.11445E-08	.12708E-02	-.12708E-02	-.58550E-09
12.25	.11666E-02	-.11666E-02	-.21691E-08	.16623E-02	-.16623E-02	-.83676E-09
12.50	.63415E-03	-.63415E-03	-.20526E-08	.19077E-02	-.19077E-02	-.24127E-09
12.75	.59525E-04	-.59528E-04	-.33118E-08	.19895E-02	-.19895E-02	-.23428E-09
13.00	-.50889E-03	.50889E-03	-.17672E-08	.19043E-02	-.19043E-02	.95127E-10
13.25	-.10241E-02	.10241E-02	-.13515E-08	.16622E-02	-.16622E-02	.10213E-08
13.50	-.14445E-02	.14445E-02	-.23099E-08	.12863E-02	-.12863E-02	.44953E-09
13.75	-.17368E-02	.17368E-02	-.16987E-08	.81015E-03	-.81015E-03	-.25683E-09
14.00	-.18792E-02	.18792E-02	-.10779E-08	.27509E-03	-.27509E-03	.50252E-09

Table 3: Vérification de la condition sur la surface libre. Voir figure 4.

Figure 5: Partie réelle et imaginaire de la fonction de Green pour $\omega = 0.6$, $z = 0.$, $\zeta = 0.$.

6 Conclusions

On a présenté ici une nouvelle méthode d'évaluation de la fonction de Green du problème de diffraction-radiation avec petite vitesse d'avance pour la profondeur finie ou infinie. Tous les aspects critiques de l'évaluation des différentes composantes ont été discutés et l'efficacité de la méthode a été démontrée. La solution proposée est relativement facile à implémenter numériquement à partir des algorithmes existants pour le cas sans vitesse d'avance. En effet, la fonction de Green sans vitesse d'avance a été approximée par des polynômes et toutes les dérivées nécessaires ont pu être évaluées directement, avec une perte de précision négligeable. Ceci est un point clé de la méthode car, par exemple, une méthode d'approximation basée sur la tabulation de la fonction de Green sans vitesse d'avance, ne serait pas adaptée. Un des résultats les plus importants du présent travail est le fait que la solution possède un comportement uniforme (non-séculaire) et peut être utilisée avec sécurité dans tous les cas. Rappelons que ce n'était pas le cas pour la seule solution utilisée aujourd'hui dans un code pratique [5], qui possède un comportement séculaire. On doit cependant noter que, comme il a été montré dans [7], la solution des équations intégrales pour le potentiel sur le corps doit rester la même pour les deux cas c.à.d. le cas séculaire et non-séculaire, la différence étant de l'ordre $O(\tau^2)$. On pense donc que même la solution séculaire peut être utilisée pour le calcul des efforts par intégration directe de la pression sur le corps mais certainement pas pour le calcul des surélévations de la surface libre au voisinage du corps.

Remerciements

Les auteurs remercient Prof. J.Grue de l'Université d'Oslo pour les discussions utiles.

References

- [1] BRATLAND A.K., O.M.FALTINSEN & R.ZHAO, 1996. : "Three-dimensional harmonically oscillating Green function with small forward speed in finite water depth.", 11th Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Hamburg, 1996.
- [2] CHEN X.B., 1993. : "Evaluation de la fonction de Green du probleme de diffraction/radiation en profondeur d'eau finie", Proc. 4eme Journées de l'hydrodynamique, Nantes.
- [3] CHEN X.B. & MALENICA Š., 1998. : "Interaction effects of local steady flow on wave diffraction-radiation at low forward speed.", Int. Journal of Offshore and Polar Engg., Vol. 8/2, pp. 102-109.
- [4] GREKAS A., 1981. : "Contribution à l'étude théorique et expérimentale des efforts du second ordre et du comportement dynamique d'une structure marine sollicitée par une houle régulière et un courant.", PhD. Dissertation, ENSM Nantes, France.
- [5] GRUE J. & BIBERG D., 1993. : "Wave forces on marine structures with small speed in water of restricted depth.", Applied Ocean Res., Vol. 15, pp. 121-135.
- [6] HUIJSMANS R.H.M. & HERMANS A.J., 1989. : "The effect of the steady perturbation potential on the motions of a ship sailing in random seas.", 5th Int. Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics, Hiroshima.
- [7] MALENICA Š., 1997. : "Some aspects of water wave diffraction-radiation at small forward speed.", Brodogradnja, Vol. 45, pp.35-43.
- [8] NEWMAN J.N., 1991. : "The approximation of free surface Green functions", *Wave asymptotics*, Proc. of the F.Ursell retirement meeting, Cambridge University Press.
- [9] NOBLESSE F. & CHEN X.B., 1995. : "Decomposition of free surface effects into wave and near-field components", Ship Technology Res., Vol. 42/4.
- [10] NOSSEN J., J.GRUE & E.PALM, 1991. : "Wave forces on three-dimensional floating bodies with small forward speed", J. Fluid Mech., Vol.227, pp. 135-160.
- [11] ZHAO R. & O.M.FALTINSEN, 1989. : "Interaction between current, waves and marine structures.", 5th Int. Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics, Hiroshima.