

**7<sup>e</sup> JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE**

**MARSEILLE - 8, 9, 10 MARS 1999**

**PRECISION DES INTEGRATIONS SURFACIQUES DE LA FONCTION DE GREEN DANS UN CODE DE TENUE A LA MER AVEC VITESSE D'AVANCE**

**BOIN J.-P.\*, BA M\*\* et GUILBAUD M.\***

**Laboratoire d'Etudes Aérodynamiques (UMR CNRS 6609)**

**\*CEAT - Université de Poitiers, \*\*ENSMA**

**43, rue de l'aérodrome - 86036 POITIERS CEDEX**

**Tél : 05 49 53 70 00 - Fax : 05 49 53 70 01**

**mail : ba@lea.ensma.fr ou michel.guilbaud@ceat.univ-poitiers.fr**

**Résumé**

On présente une analyse de la précision et des temps de calcul pour les intégrales de surface intervenant dans les méthodes de singularités traitant des problèmes de tenue à la mer des navires et utilisant la fonction de Green de diffraction-radiation avec vitesse d'avance dans le domaine fréquentiel. On a comparé ainsi l'intégration analytique de cette fonction et de ses dérivées premières et secondes avec des intégrations numériques basées sur la méthode de Gauss avec une optimisation du nombre de points suivant les positions des points source et champ. Les résultats sont comparés, pour une facette isolée et un point champ se déplaçant sur les trois axes. On en déduit un découpage de l'espace en différentes zones où les techniques d'intégration choisies seront différentes. Celles-ci sont introduites dans une méthode de calcul de tenue à la mer pour étudier l'influence de l'optimisation des intégrations sur les efforts, la déformée de surface libre et la répartition de pression. Les résultats sont aussi comparés aux résultats disponibles pour un caisson DNV ou une plaque plane.

**Abstract**

We present here an analysis of accuracy and computational time for the boundary integral computations occurring in boundary element methods for seakeeping problems using the diffraction-radiation Green's function with forward speed in the frequency domain. The results of an analytical integration of the function and of its first and second derivatives have been compared, with a numerical procedure based on a Gauss method and further refinements function of the relative location of the source and field points. The results are compared for a single panel and a field point moving along the 3 axis. The space is divided in various zones where different techniques of integration are used. They are introduced in a panel method for seakeeping computations and the results obtained using this improved method of boundary integration (forces and moments but also free surface elevation and pressure distribution) have been compared with the results from a simple one point Gauss method. Results are also compared with those available in the open literature concerning the DNV barge and a flat plate.

## 1. Introduction

L'étude de la tenue à la mer d'un navire est un problème difficile à résoudre et dont aucune solution n'est aujourd'hui complètement satisfaisante. La plupart des études se situent dans l'approximation de fluides parfaits. En effet si les méthodes résolvant les équations de Reynolds commencent à apparaître, elles restent encore du domaine de la recherche à cause de temps de calcul trop élevés et les méthodes de fluide parfait donnent des résultats acceptables pour des temps de calcul beaucoup plus faibles car les phénomènes d'ondes prédominants sont liés à la gravité et ne font pas intervenir, du moins à l'ordre prépondérant, la viscosité. De même, les études dans le domaine fréquentiel, considérant des houles régulières permettent également d'obtenir des temps de calcul plus faibles. On a alors à résoudre une équation de Laplace dans un milieu d'étendue infinie ce qui conduit naturellement à utiliser des méthodes de singularités, appelées encore d'éléments de frontière. La solution élémentaire qui intervient alors par application de la troisième formule de Green peut être celle d'un milieu infini, dite singularité de Rankine ou encore des fonctions de Green satisfaisant une condition linéarisée de surface libre de diffraction-radiation avec vitesse d'avance pour laquelle on aura en outre découplé les problèmes stationnaire et instationnaire, appelées encore singularités de Kelvin. Pour ces dernières, le maillage se limite alors à la partie immergée du navire, conduisant à des systèmes linéaires à résoudre plus petits qu'avec les singularités de Rankine. L'absence de facettes sur la surface libre évite aussi un effet de filtrage des ondes de plus petites longueurs d'onde et tient compte en particulier des très petites longueurs d'onde. Par contre, le prix à payer correspond aux difficultés numériques pour calculer cette fonction de Green, particulièrement quand les points champ et source sont très voisins de la surface libre.

Toutefois les récents progrès des méthodes de calcul de la fonction de Green de diffraction-radiation avec vitesse d'avance (Ba and Guilbaud [1], Brument et Delhommeau [2]) permettent d'envisager le développement d'une méthode de calcul à l'aide des singularités de Kelvin. Il est alors nécessaire de chercher à améliorer la précision des intégrales surfaciques, qui pour une méthode cherchant à tenir compte des effets portants ou de dérapage, devra intégrer soit la fonction de Green et son gradient si on se place dans une formulation potentielle, soit le gradient et la dérivée seconde pour une formulation vitesse. On a vu apparaître il y a quelques années des formulations simplifiées de type "vortex-lattice method" (Wu [3], Nontakaew et al. [4]) et plus récemment la formulation exacte de cette fonction de Green a été utilisée dans le code AQUAPLUS de l'Ecole Centrale de Nantes (Guilbaud et al.[5], Brument et al.[6]) à la place de la formulation simplifiée de diffraction-radiation sans vitesse d'avance utilisant la fréquence de rencontre, montrant que si cette dernière permet de calculer les efforts, elle est incapable de décrire avec précision le champ de vagues si  $\tau > 1/4$ . Toutefois, ce code utilise une simple méthode de Gauss à un point pour les intégrations surfaciques. La dernière version présentée [6] prend en outre en compte l'intégrale de ligne. D'autres travaux sont encore en développement (Chen et Noblesse[7]) utilisant les notions de "superfonctions" de Green et la théorie de Fourier-Kochin. Il est également possible d'intégrer analytiquement sur une facette polygonale plane la fonction de Green ou ses dérivées premières et secondes (Bougis [8]).

On présente ici les premiers travaux concernant le développement d'une méthode de calcul de tenue à la mer prenant en compte les effets portants. L'étude est orientée principalement vers les intégrations surfaciques, en travaillant sur une facette isolée, et doit être considérée comme le premier pas d'un travail en cours de développement. On a comparé les résultats obtenus à l'aide d'une méthode de points de Gauss en optimisant les paramètres des intégrations surfaciques (nombre de points de Gauss) en fonction des positions relatives de la facette et du point de contrôle ainsi que leur distance par rapport à la surface libre, avec les résultats obtenus par une intégration analytique. On peut alors contrôler la précision et le temps de cal-

cul. Pour le calcul complet, il faudra en outre tenir compte des intégrations sur les bandes semi-infinies du sillage et prendre en compte l'intégrale sur la ligne de flottaison afin d'obtenir une méthode de calcul à la fois fiable et précise, tout en gardant un temps de calcul acceptable. Toutefois, les méthodes d'intégration surfacique ainsi définies sont introduites dans un code de calcul de tenue à la mer ne tenant pas compte des effets portants et pour laquelle, dans un premier temps, l'intégrale de ligne est négligée. En effet, les travaux de [6] ont montré que l'influence de celle-ci restait limitée pour des corps pas trop épais, tels les navires classiques.

Le problème à résoudre est présenté dans la seconde partie et les différentes techniques d'intégration numériques et analytiques de la fonction de Green et de ses dérivées premières et secondes sur une facette élémentaire le sont dans la troisième partie. La quatrième partie est consacrée à l'optimisation des méthodes, pour des facettes parallèles à la vitesse d'avance pour diverses valeurs de l'immersion en faisant varier la position du point champ selon les trois axes, afin de diminuer les temps de calcul sans sacrifier la précision. On définira un découpage de l'espace en différentes zones où les techniques d'intégration différentes seront adoptées. On comparera également les possibilités offertes par les deux différentes formulations, potentielle et vitesse, sur les deux points de vue de la précision et du temps de calcul. Ces méthodes sont ensuite introduites dans un code de calcul de tenue à la mer. Les premiers résultats obtenus pour un caisson DNV et pour une plaque plane sont présentés. On donnera des résultats globaux (forces, moments ou masses ajoutées et amortissements) soient plus locaux (pressions, élévations de surface libre) qui sont plus à même de qualifier la précision d'une méthode de calcul que les résultats globaux. Les résultats seront comparés à ceux obtenus par d'autres méthodes de calcul disponibles. L'influence de l'amélioration de la précision des intégrations surfaciques sur les différents résultats, globaux ou locaux, sera analysée.

## 2. Formulation du problème

Cette étude concerne l'écoulement instationnaire (harmonique) et irrotationnel d'un fluide parfait incompressible autour d'un corps portant, perçant la surface libre, en profondeur infinie. Le corps avance en eau calme avec une vitesse moyenne  $\bar{U}_\infty$  parallèle à l'axe  $O\bar{x}$ . L'axe  $O\bar{z}$  est vertical ascendant et l'axe  $O\bar{y}$  complète le trièdre dont l'origine est liée au navire. Le plan  $z=0$  correspond à la surface libre non perturbée. Le nombre de Froude est défini par rapport à la longueur de référence  $L$  et la vitesse  $U_\infty$  par :  $F = U_\infty / \sqrt{gL}$ .

Avec les hypothèses précédentes et en considérant que les vitesses de perturbation ainsi que les amplitudes des vagues et leurs courbures sont modérées, on peut séparer les problèmes stationnaires et instationnaires. On ne traitera que le second, le premier étant supposé résolu. Si on se place dans le domaine fréquentiel, le potentiel des vitesses de perturbation instationnaire est noté  $\varphi = \tilde{\varphi} \exp(i\omega t)$ ,  $\omega$  étant la pulsation. Le potentiel  $\tilde{\varphi}$  satisfait l'équation de Laplace dans le domaine fluide, la condition linéarisée de Kelvin sur la surface libre, une condition de radiation à l'infini amont et la condition de glissement sur la frontière  $S_B$  du corps appliquée sur sa position moyenne:

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n_M}(\mathbf{M}) = (\bar{\mathbf{V}} + \bar{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{OM}) \cdot \bar{\mathbf{n}}_M \quad \text{sur } S_B,$$

avec  $\bar{\mathbf{V}}$  vitesse de translation et  $\bar{\boldsymbol{\Omega}}$  vitesse de rotation représentant les mouvements de la carène autour de sa position moyenne. A l'aide de la troisième formule de Green, appliqué à un domaine fluide de frontière  $S$  limité par la frontière de la carène  $S_c$ , la surface libre  $S_L$ , le sillage  $\Sigma_c$  s'étendant du bord de fuite de la carène à l'infini aval avec une épaisseur nulle et une

surface à l'infini  $S_\infty$  dont la contribution est nulle à cause du comportement de la fonction de Green et du potentiel à l'infini, permet d'obtenir le potentiel  $\tilde{\varphi}$  au point influencé  $M(x,y,z)$  en fonction du potentiel au point source  $M'(x',y',z')$  par :

$$\tilde{\varphi}(M) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left( \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n_{M'}}(M') \tilde{G}(M, M') - \tilde{\varphi}(M') \frac{\partial \tilde{G}(M, M')}{\partial n_M} \right) dS_{M'}$$

où  $S = S_L + S_C + S_C + S_\infty$ ,  $\bar{n} = (n_x, n_y, n_z)$  est la normale extérieure à  $S$ ;  $G$  est la fonction de Green instationnaire, [1], définie par:

$$G(M, M', t) = \Re \{ [G_0(M, M') + G_1(M, M') + \text{Conjg}(G_2(M, M'))] e^{i\omega t} \}$$

avec  $\Re$  pour la partie réelle  $\Im$  pour la partie imaginaire et:

$$G_0(M, M') = \frac{1}{Lo} \left[ \frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right] \text{ où } \left\{ \frac{R^2}{R'^2} \right\} = (X - X')^2 + (Y - Y')^2 + \left\{ \begin{array}{l} (Z - Z')^2 \\ (Z + Z')^2 \end{array} \right\}$$

$$\text{et } X = \frac{x}{Lo}; Y = \frac{y}{Lo}; Z = \frac{z}{Lo}; X' = \frac{x'}{Lo}; Y' = \frac{y'}{Lo}; Z' = \frac{z'}{Lo}.$$

En posant:

$$\xi = Z + Z' + i[(X - X') \cos \theta + (Y - Y') \sin \theta]; \quad \xi' = Z + Z' + i[(X - X') \cos \theta - (Y - Y') \sin \theta]$$

$$\xi_c = \xi(\theta = \theta_c); \quad \xi'_c = \xi'(\theta = \theta_c),$$

$$G_1(M, M') = \frac{1}{\pi Lo} \left\{ \int_0^{\pi/2} \frac{K_1 [g_1(K_1 \xi) + g_1(K_1 \xi')] - K_2 [g_1(K_2 \xi) + g_1(K_2 \xi')]}{\sqrt{1 + 4r \cos \theta}} d\theta \right\}$$

$$G_2(M, M') = \frac{1}{\pi Lo} \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\theta_c} -i \frac{Z_3 [g_2(Z_3 \xi) + g_2(Z_3 \xi')] - Z_4 [g_2(Z_4 \xi) + g_2(Z_4 \xi')]}{\sqrt{4r \cos \theta - 1}} d\theta \\ + \int_{\theta_c}^{\theta_c - \alpha_c} -i \frac{Z_3 [g_1(Z_3 \xi) + g_1(Z_3 \xi')] - Z_4 [g_3(Z_4 \xi) + g_3(Z_4 \xi')]}{\sqrt{4r \cos \theta - 1}} d\theta \\ - \frac{2\pi K_c (1 - i) (e^{K_c \xi_c} + e^{K_c \xi'_c})}{\sqrt{r \sin \theta_c}} \sqrt{\alpha_c} \\ + \int_{\theta_c + \alpha_c}^{\pi/2} \frac{K_3 [g_3(K_3 \xi) + g_3(K_3 \xi')] - K_4 [g_1(K_4 \xi) + g_1(K_4 \xi')]}{\sqrt{1 - 4r \cos \theta}} d\theta \end{array} \right\}$$

Les limites d'intégration pour  $G_2$  sont pour  $\tau < 0,25$ ,  $\theta_c = \theta'_c = \alpha_c = 0$ , pour  $0,25 < \tau < 0,5$ ,  $\theta_c = \cos^{-1}\left(\frac{1}{4\tau}\right)$ ,  $\theta'_c = 0$ ,  $\alpha_c = \varepsilon$  et pour  $0,5 < \tau$ ,  $\theta_c = \cos^{-1}\left(\frac{1}{4\tau}\right)$ ,  $\theta'_c = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2\tau}\right)$ ,  $\alpha_c = \varepsilon$ .

Les fonctions intégrales complexes modifiées  $g_1$ ,  $g_2$  et  $g_3$  sont données par:

$$g_1(\xi) = e^\xi \varepsilon_1(\xi) \text{ si } 0 < \arg(\xi) < 2\pi; \quad g_2(\xi) = e^\xi E_1(\xi) \text{ si } -\pi < \arg(\xi) < \pi;$$

$$g_3(\xi) = e^\xi [\varepsilon_1(\xi) + 2i\pi] \text{ si } \pi < \arg(\xi) < 2\pi, \text{ avec:}$$

$$\varepsilon_1(\xi) = E_1(\xi) \text{ si } \Im(\xi) \geq 0, \quad \varepsilon_1(\xi) = E_1(\xi) - 2i\pi \text{ si } \Im(\xi) < 0.$$

La fonction intégrale complexe  $E_1$  est définie :

$$E_1(\xi) = \int_\xi^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \text{ si } -\pi < \arg(\xi) < \pi \text{ et } E_1(\xi) = \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \text{ si } \Re(\xi) > 0.$$

Les expressions pour les dérivées premières et secondes peuvent être trouvées dans [1].

On a obtenu ainsi la formulation dite potentielle. En appliquant l'opérateur  $\overrightarrow{\text{grad}}_M$  à l'équation précédente on obtient la formulation vitesse qui fait apparaître les dérivées premières et secondes de la fonction de Green:

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}(M)}{\partial n_M} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left( \frac{\partial \tilde{\varphi}(M')}{\partial n_{M'}} \frac{\partial \tilde{G}(M, M')}{\partial n_M} - \tilde{\varphi}(M') \frac{\partial^2 \tilde{G}(M, M')}{\partial n_{M'} \partial n_M} \right) dS_{M'}$$

L'intégrale sur la surface libre peut se ramener à une intégrale sur les contours  $C+C_\infty$  (C et  $C_\infty$  étant les intersections du corps et de la surface à l'infini avec la surface libre) par application du théorème de Stokes. L'intégrale sur  $S_\infty$  est nulle compte tenu du comportement à l'infini du potentiel de perturbation et de la fonction de Green. En introduisant une distribution de potentiels élémentaires de simple couche d'intensité  $\sigma$  (sources) et de double couche d'intensité  $\mu$  (doublets), le potentiel de perturbation instationnaire est décrit par une équation intégrale sur  $S_C, C$  et  $\Sigma_C$ . Le sillage  $\Sigma_C$  est une surface de discontinuité de la vitesse tangentielle, la dérivée normale du potentiel y est nulle. Dans la formulation potentiel, la distribution de sources est donnée par la condition de glissement et on obtient une équation intégrale de seconde espèce sur la distribution inconnue de doublets. Dans la formulation vitesse, la condition de glissement donnera le second membre d'une équation intégrale de Fredholm de première espèce dont les inconnues seront les distributions de sources et de doublets. Enfin pour les corps portants, le système devra être complété par des conditions de Kutta-Joukowski pour fermer le système.

Pour la résolution numérique, le corps est divisé en facettes de surface  $S_j$ . Les deux formulations précédentes conduisent à des équations discrétisées où l'on a négligé les intégrales de ligne en première approximation, et dans lesquelles, on aura à calculer à chaque fois, deux intégrales sur les 3 présentées ici:

$$J_1 = \iint_{S_j} G_{ij} ds; \quad J_2 = \iint_{S_j} \frac{\partial G_{ij}}{\partial n_{M'}} ds; \quad J_3 = \iint_{S_j} \frac{\partial^2 G_{ij}}{\partial n_{M'} \partial n_M} ds$$

### 3. Méthodes d'intégration de la fonction de Green

#### 3.1 Intégration numérique

La méthode générale utilisée est l'intégration quadratique de Gauss. En s'inspirant de la procédure utilisée dans Ponizy et al.[9] pour la fonction de Green de résistance de vagues, une méthode adaptative a pu être élaborée. Le nombre de points de Gauss nécessaire à l'intégration est défini en fonction de l'éloignement entre le point influencé  $M_i$  et la facette où sont uniformément réparties les singularités. Le rapport de la distance entre le point influencé  $M_i$  et le centre de la facette  $M_j$  sur la plus grande diagonale de la facette détermine l'éloignement :  $\rho_{ij} = |M_i M_j| / \max(\text{dia}_1, \text{dia}_2)$ .

- Pour  $\rho_{ij} > 10$ , un seul point de Gauss est utilisé;
- Pour  $5 < \rho_{ij} < 10$ , quatre points de Gauss;
- Pour  $1 < \rho_{ij} < 5$ , la facette est divisée en un certain nombre de triangles selon la position du point influencé, l'intégration est faite sur chaque triangle avec sept points de Gauss, le nombre de points de Gauss sur la facette varie alors de 14 à 224.

### 3.2 Intégration analytique

On peut montrer, [8], que pour une facette polygonale plane à  $m$  sommets (où le sommet  $j=m+1$  est identique au sommet  $j=1$ ), on peut transformer l'intégrale de surface en intégrale sur son contour à l'aide du théorème de Stokes:

$$I = \iint_S \frac{d^2}{d\zeta^2} f ds = \sum_{k=1}^m C_k \frac{f(\zeta_{k+1}) - f(\zeta_k)}{\zeta_{k+1} - \zeta_k}.$$

où les coefficients  $C_k$  seront définis plus loin. Pour cela, on utilisera les caractéristiques des fonctions exponentielles intégrales complexes modifiées, en notant  $(\cdot)$  et  $(\cdot)_2$  les dérivées premières et secondes:

$$\dot{g}_j(\zeta) = \frac{d}{d\zeta} g_j(\zeta) = g_j(\zeta) - \frac{1}{\zeta}; \quad \ddot{g}_j(\zeta) = \frac{d^2}{d\zeta^2} g_j(\zeta) = g_j(\zeta) - \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2} \quad \text{et pour les intégrations:}$$

$$\int g_1(\zeta) d\zeta = g_1(\zeta) + \ln \zeta \quad \text{avec } 0 < \arg(\zeta) < 2\pi, \quad \int g_2(\zeta) d\zeta = g_2(\zeta) + \ln_2 \zeta \quad \text{avec } -\pi < \arg(\zeta) < \pi,$$

$$\int g_3(\zeta) d\zeta = g_3(\zeta) + \ln \zeta \quad \text{avec } 0 < \arg(\zeta) < 2\pi;$$

$$\int d\zeta \int g_1(\zeta) d\zeta = g_1(\zeta) + (\zeta+1) \ln \zeta - \zeta \quad \text{avec } 0 < \arg(\zeta) < 2\pi,$$

$$\int d\zeta \int g_2(\zeta) d\zeta = g_2(\zeta) + (\zeta+1) \ln_2 \zeta - \zeta \quad \text{avec } -\pi < \arg(\zeta) < \pi,$$

$$\int d\zeta \int g_3(\zeta) d\zeta = g_3(\zeta) + (\zeta+1) \ln \zeta - \zeta \quad \text{avec } 0 < \arg(\zeta) < 2\pi \text{ et:}$$

$$\ln \zeta = \ln|\zeta| + i \arg(\zeta) \quad \text{avec } 0 < \arg(\zeta) < 2\pi, \quad \ln_2 \zeta = \ln|\zeta| + i \arg(\zeta) \quad \text{avec } -\pi < \arg(\zeta) < \pi.$$

On ne traitera pas ici le terme  $G_0$ , qui a été étudié de manière étendue, en particulier pour les méthodes de Rankine. En ce qui concerne  $G_1$  et  $G_2$ , on obtient:

$$\iint_S \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \partial / \partial x_i \\ \partial^2 / \partial x_i^2 \end{array} \right\} G_1 ds = \frac{1}{\pi} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ B / L_0 \\ B^2 / L_0^2 \end{array} \right\} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1+4r \cos \theta}} \left\{ \sum_{k=1}^m C_k \left[ \begin{array}{l} D_{1k} - D_{2k} \\ K_1 \dot{D}_{1k} - K_2 \dot{D}_{2k} \\ K_1^2 \ddot{D}_{1k} - K_2^2 \ddot{D}_{2k} \end{array} \right] + C_k \left[ \begin{array}{l} D'_{1k} - D'_{2k} \\ (-1)^{i+1} (K_1 \dot{D}'_{1k} - K_2 \dot{D}'_{2k}) \\ K_1^2 \ddot{D}'_{1k} - K_2^2 \ddot{D}'_{2k} \end{array} \right] \right\}$$

$$\iint_S \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \partial / \partial x_i \\ \partial^2 / \partial x_i^2 \end{array} \right\} G_2 ds = \frac{1}{\pi} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1 / L_0 \\ 1 / L_0^2 \end{array} \right\} [I_1 + I_2 + I_3 + I_4]$$

$$I_1 = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ B \\ B^2 \end{array} \right\} \int_0^{\theta_c} \frac{-i}{\sqrt{4r \cos \theta - 1}} \left\{ \sum_{k=1}^m C_k \left[ \begin{array}{l} E_{3k} - E_{4k} \\ Z_3 \dot{E}_{3k} - Z_4 \dot{E}_{4k} \\ Z_3^2 \ddot{E}_{3k} - Z_4^2 \ddot{E}_{4k} \end{array} \right] + C_k \left[ \begin{array}{l} E'_{3k} - E'_{4k} \\ (-1)^{i+1} (Z_3 \dot{E}'_{3k} - Z_4 \dot{E}'_{4k}) \\ Z_3^2 \ddot{E}'_{3k} - Z_4^2 \ddot{E}'_{4k} \end{array} \right] \right\} d\theta$$

$$I_2 = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ B \\ B^2 \end{array} \right\} \int_{\theta_c}^{\theta_c - \alpha_c} \frac{-i}{\sqrt{4r \cos \theta - 1}} \left\{ \sum_{k=1}^m C_k \left[ \begin{array}{l} F_{1k} - F_{2k} \\ Z_3 \dot{F}_{1k} - Z_4 \dot{F}_{2k} \\ Z_3^2 \ddot{F}_{1k} - Z_4^2 \ddot{F}_{2k} \end{array} \right] + C_k \left[ \begin{array}{l} F'_{1k} - F'_{2k} \\ (-1)^{i+1} (Z_3 \dot{F}'_{1k} - Z_4 \dot{F}'_{2k}) \\ Z_3^2 \ddot{F}'_{1k} - Z_4^2 \ddot{F}'_{2k} \end{array} \right] \right\} d\theta$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ B_c K_c \\ B_c^2 K_c^2 \end{bmatrix} \frac{-2\pi(1-i)\sqrt{\alpha_c}}{\sqrt{r \sin \theta_c}} \sum_{k=1}^m \left( C_k \frac{e^{\chi_c^{k+1}} - e^{\chi_c^k}}{\chi_c^{k+1} - \chi_c^k} + \begin{bmatrix} 1 \\ (-1)^{i+1} \\ 1 \end{bmatrix} C'_k \frac{e^{\chi_c^{k+1}} - e^{\chi_c^k}}{\chi_c^{k+1} - \chi_c^k} \right)$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ B \\ B^2 \end{bmatrix} \int_{\theta_c + \alpha_c}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-4r \cos \theta}} \left\{ \sum_{k=1}^m C_k \begin{bmatrix} H_{1k} - H_{2k} \\ K_3 \dot{H}_{1k} - K_4 \dot{H}_{2k} \\ K_3^2 \ddot{H}_{1k} - K_4^2 \ddot{H}_{2k} \end{bmatrix} + C'_k \begin{bmatrix} H'_{1k} - H'_{2k} \\ (-1)^{i+1} (K_3 \dot{H}'_{1k} - K_4 \dot{H}'_{2k}) \\ K_3^2 \ddot{H}'_{1k} - K_4^2 \ddot{H}'_{2k} \end{bmatrix} \right\} d\theta,$$

avec:

$\begin{Bmatrix} C_k \\ C'_k \end{Bmatrix} = (q \mp ir \sin \theta) \cdot (x^{k+1} - x^k) - (p - ir \cos \theta) \cdot (y^{k+1} - y^k)$ .  $M^k(x^k, y^k, z^k)$  est le nœud  $k$  de la facette avec  $M^{m+1} = M^1$  où  $m$  est le nombre de nœuds de la facette de normale extérieure  $\bar{n}_{\text{ext}} = (p, q, r)$ . On a posé:

$$D_{jk} = \frac{\left[ \int \int g_1(\xi) d\xi \right]_{\chi_j^k}^{\chi_j^{k+1}}}{\chi_j^{k+1} - \chi_j^k} \quad j=1,2; \quad E_{jk} = \frac{\left[ \int \int g_2(\xi) d\xi \right]_{\chi_j^k}^{\chi_j^{k+1}}}{\chi_j^{k+1} - \chi_j^k} \quad j=3,4, \quad F_{1k} = \frac{\left[ \int \int g_1(\xi) d\xi \right]_{\chi_3^k}^{\chi_3^{k+1}}}{\chi_3^{k+1} - \chi_3^k},$$

$$F_{2k} = \frac{\left[ \int \int g_3(\xi) d\xi \right]_{\chi_4^k}^{\chi_4^{k+1}}}{\chi_4^{k+1} - \chi_4^k}; \quad H_{1k} = \frac{\left[ \int \int g_3(\xi) d\xi \right]_{\chi_5^k}^{\chi_5^{k+1}}}{\chi_5^{k+1} - \chi_5^k}, \quad H_{2k} = \frac{\left[ \int \int g_1(\xi) d\xi \right]_{\chi_6^k}^{\chi_6^{k+1}}}{\chi_6^{k+1} - \chi_6^k}.$$

Les quantités (') se déduisent des quantités ( ) en remplaçant  $\chi$  par  $\chi'$ .

$$\begin{Bmatrix} \chi_j^k \\ \chi_j^k \end{Bmatrix} = \frac{T_j}{L_0} \left[ z + z^k + i \left[ (x - x^k) \cos \theta \pm (y - y^k) \sin \theta \right] \right], \quad j=1 \text{ à } 6; \quad T_j = K_j \text{ si } j=1,2 \quad T_j = Z_j \text{ si } j=3,4 \text{ et}$$

$$T_j = K_{j-2} \text{ si } j=5,6; \quad \begin{Bmatrix} \chi_c^k \\ \chi_c^k \end{Bmatrix} = \frac{K_c}{L_0} \left[ z + z^k + i \left[ (x - x^k) \cos \theta_c \pm (y - y^k) \sin \theta_c \right] \right].$$

En ce qui concerne les dérivées premières, les coefficients qui apparaissent, notés (..) se déduisent des précédents en remplaçant les deux intégrations par une seule. Pour les dérivées secondes, les coefficients (..) font apparaître seulement les fonctions  $g_j$ . On a en outre  $x_1 = x, B = i \cos \theta, B_c = i \cos \theta_c$  si  $i=1; x_2 = y, B = i \sin \theta, B_c = i \sin \theta_c$  si  $i=2$  et  $x_3 = z, B = B_c = 1$  si  $i=3$ .

#### 4. Résultats des intégrations numériques

Les figures 1.a à 1.c présentent les résultats de l'intégration analytique de  $G_1, \partial G_1 / \partial x, \partial^2 G_1 / \partial x^2$ , ainsi que la différence avec l'intégration numérique, sur une facette unitaire normale à l'axe  $O\bar{y}$  immergée de 0,01, avec un nombre de Froude  $F=0,2$ , une pulsation adimensionnée  $\omega = \omega \sqrt{L/g} = 1.4$  et une longueur de référence  $L_0 = 1$ . Les autres dérivées donnent le même type de résultats et conduisent aux mêmes conclusions. Le point influencé  $M$  parcourt un axe parallèle à  $O\bar{x}$  passant par le centre de la facette, figures 1.a, un axe parallèle à  $O\bar{y}$  passant par le centre de la facette, figures 1.b et le demi-axe  $O\bar{z}$  négatif, figures 1.c. Chaque

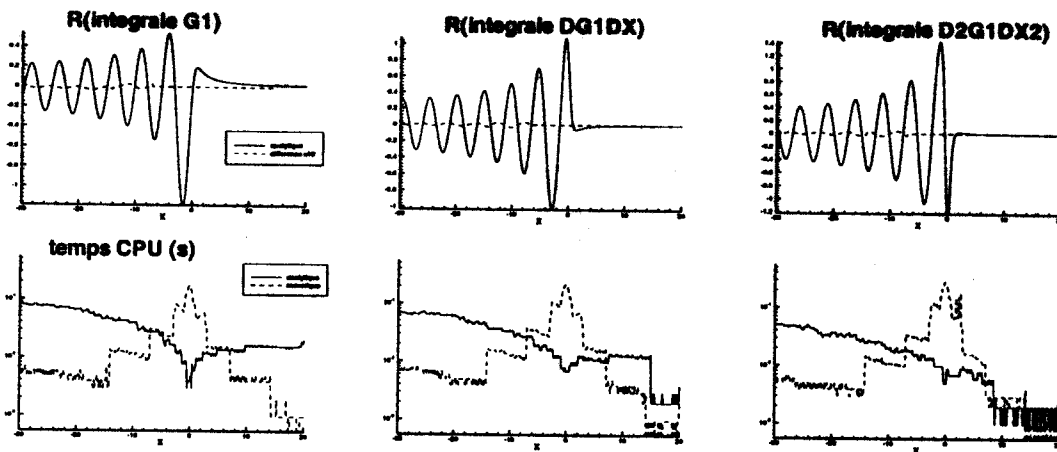


Figure 1.a, integration analytique de  $G1$  et de ses derivees sur l'axe longitudinal.

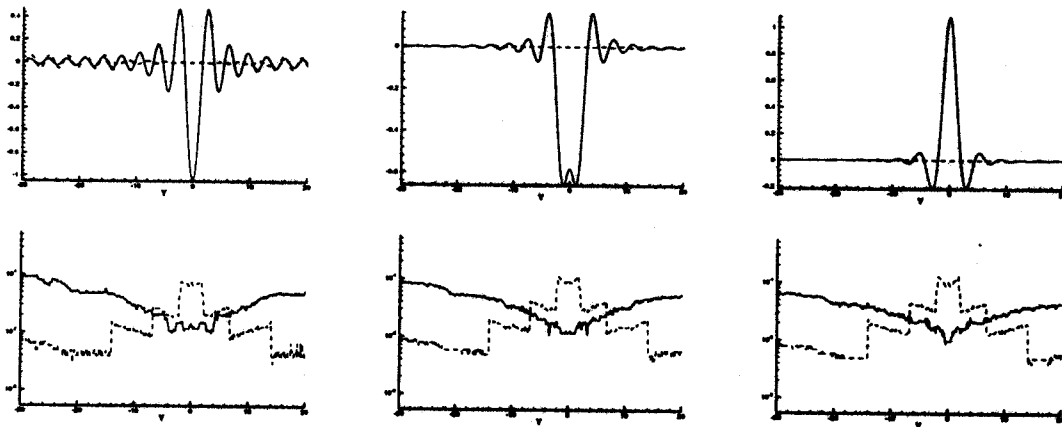


Figure 1.b, integration sur l'axe transversal.

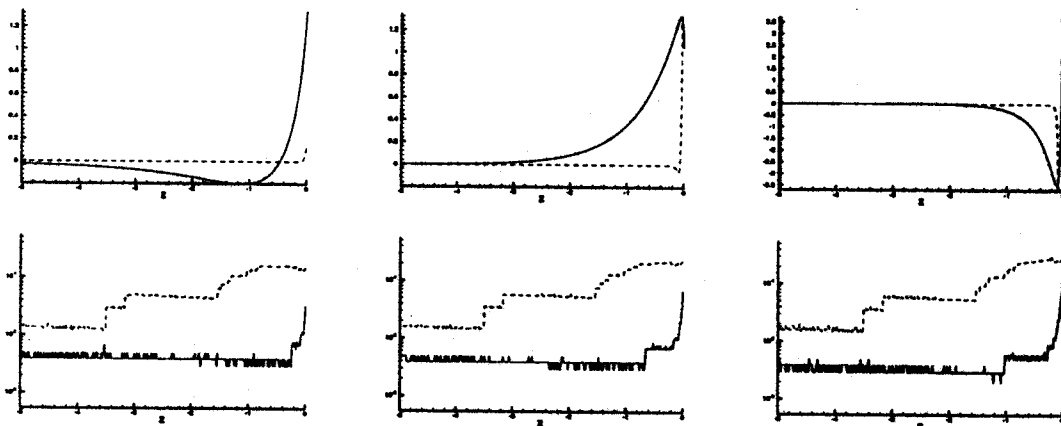


Figure 1.c, integration sur l'axe vertical  
Facette unitaire normale a l'axe  $Oy$ , immergee de 0.01,  $F=0.2$ ,  $\varpi = 1.4$ ,  $Lo=1$ .



L'intégrale de la fonction  $G_1$  est calculée numériquement avec précision sur un axe parallèle à  $O\bar{x}$ , figure 1.a; le temps de calcul moyen de l'intégration analytique correspond au calcul numérique de 4 points de Gauss. Dans la zone proche de la facette, le nombre de points de Gauss peut atteindre 224, le calcul analytique est plus avantageux ( $4 \cdot 10^{-3}$  secondes contre 0,16s sur la facette). En s'éloignant, le calcul avec 1 point de Gauss est environ 10 fois plus rapide avec une erreur relative maximale de 0,2%. Sur un axe parallèle à  $O\bar{y}$ , figure 1.b, la précision diminue quand on s'éloigne de l'origine (0,5% d'erreur. L'intégration par un seul point de Gauss entraîne une perte d'information sur l'orientation de la facette; dans le cas de  $G_1$  et de ses dérivées, cette approximation reste néanmoins exploitable. Concernant le temps de calcul, les mêmes conclusions peuvent être tirées et s'étendent à l'ensemble de l'étude. Le calcul sur la verticale ne pose pas de problème sauf au contact de la surface libre. Pour les dérivées de  $G_1$ , des problèmes d'intégration interviennent dans la formulation analytique quand  $z$  et  $z^k$  sont proches de 0. L'intégration numérique est alors plus avantageuse. On retrouve l'ensemble de ces caractéristiques sur les figures 2, où le point influencé parcourt des surfaces horizontales à profondeur fixe, qui présentent les isovaleurs des intégrations de  $\partial G_1 / \partial x$  pour  $\tau=0,28$  et 0,6 pour 3 valeurs de l'immersion du point de contrôle  $z=-0,25; -0,5$  et  $-1$ . On notera la bonne précision des résultats numériques, surtout dans l'axe de l'écoulement (la facette est sur le même axe, l'approximation par un point source est correcte), et la faible influence de la profondeur, dès lors qu'on n'atteint pas la surface libre. Hormis la zone proche de la facette, il est plus intéressant d'utiliser une intégration numérique pour  $G_1$  et ses dérivées, pour un point champ éloigné, les dimensions relatives de la facette tendent vers 0, ce qui met en défaut l'expression analytique, [8], qui en propose alors une autre.

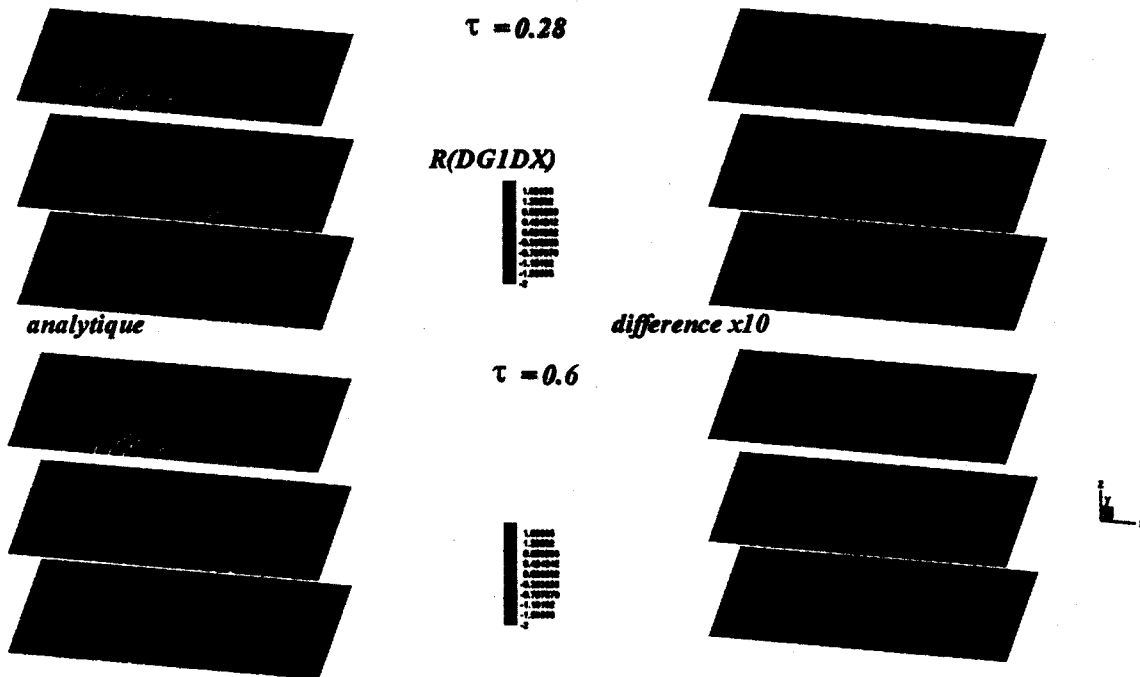


Figure 2, Isovaleurs de  $\iint \partial G_1 / \partial x ds$  ( $z=-0,25; -0,5; -1; \tau=0,28-0,6$ )

Les figures 3.a à 3.c donnent des résultats correspondants pour  $G_2$ . Cette fonction pose plus de problème pour l'évaluation numérique: sur  $O\bar{x}$ , elle se comporte de la même manière que  $G_1$ , figure 3a. Par contre sur  $O\bar{y}$ , figure 3.b, l'intégration numérique est mise en défaut avec par endroit des discontinuités; l'erreur peut alors atteindre 10 % pour  $G_2$  et jusqu'à 150% pour la dérivée seconde. Ici seule une intégration numérique avec au moins 14 points est acceptable, mais plus longue. Sur les figures 4, qui présente des résultats similaires à ceux de

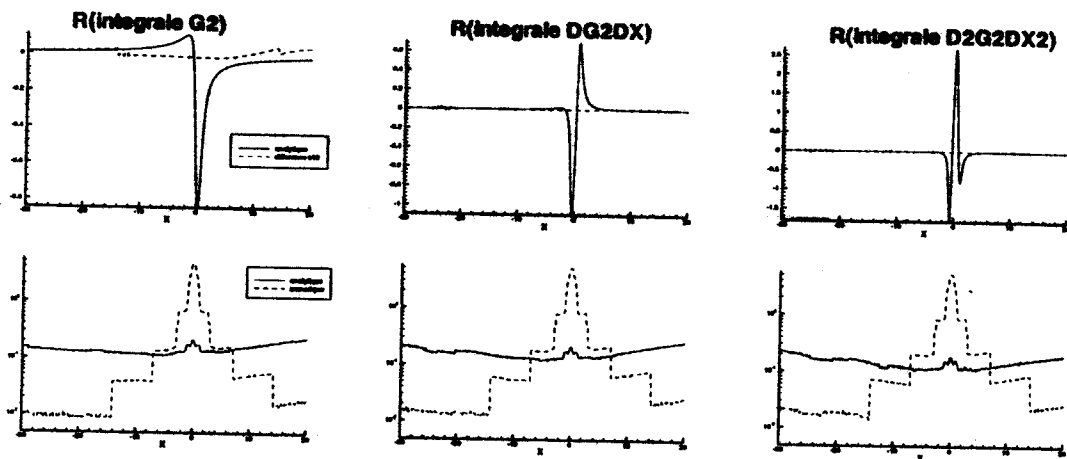


Figure 3.a, integration analytique de  $G_2$  et ses derivees sur l'axe longitudinal.

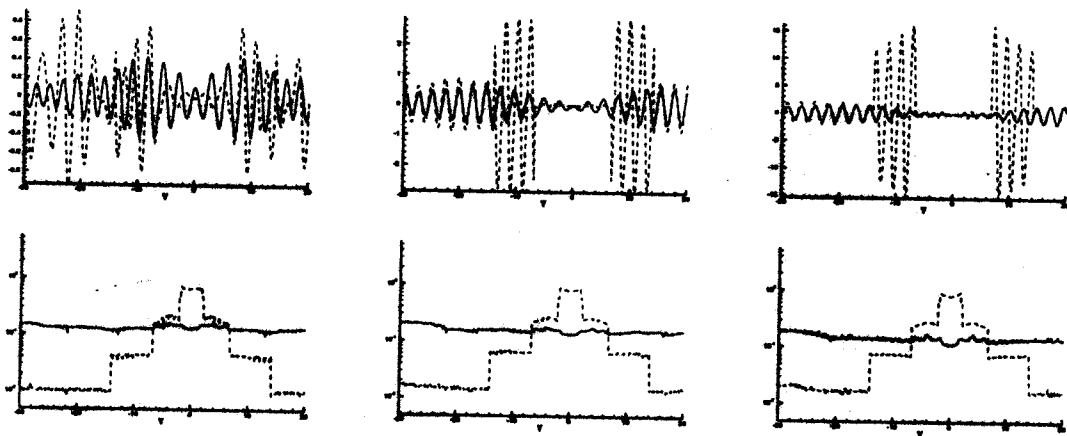


Figure 3.b, integration sur l'axe transversal.

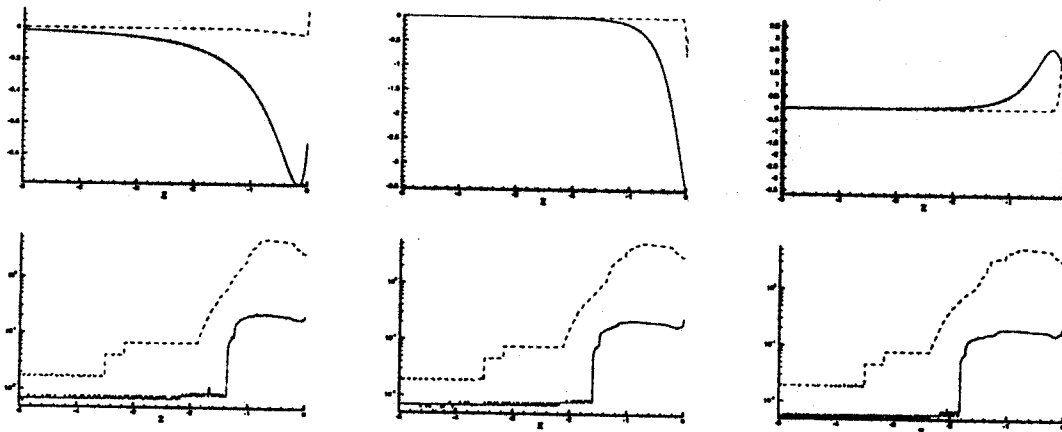


Figure 3.c, integration sur l'axe vertical.  
 Facette unitaire normale a l'axe  $Oy$ , immergee de 0.01,  $F=0.2$ ,  $\omega = 1.4$ ,  $Lo=1$ .

la figure 2 mais avec  $G_2$  à la place de  $G_1$ , on retrouve des erreurs numériques importantes dans un dièdre, dont les angles caractéristiques varient en fonction du paramètre  $\tau$ , fig. 5 et 6. L'intégration numérique n'est pas capable de calculer avec précision les diverses intégrales surfaciques dans le dièdre compris entre  $\alpha_{\min}$  et  $\alpha_{\max}$ , sauf quand l'immersion augmente. Ceci est en accord avec les erreurs importantes observées sur la figure 3b. Dans cette zone, il est nécessaire d'effectuer une intégration analytique (exception sur la surface libre). De même que pour  $G_1$ , l'influence de la profondeur d'immersion sur la précision ou le temps de calcul n'est pas significative. On remarquera que le temps nécessaires aux intégrations est plus faible pour  $G_2$  que pour les intégrations correspondantes sur  $G_1$ , que l'on considère les intégrations numériques ou analytiques.

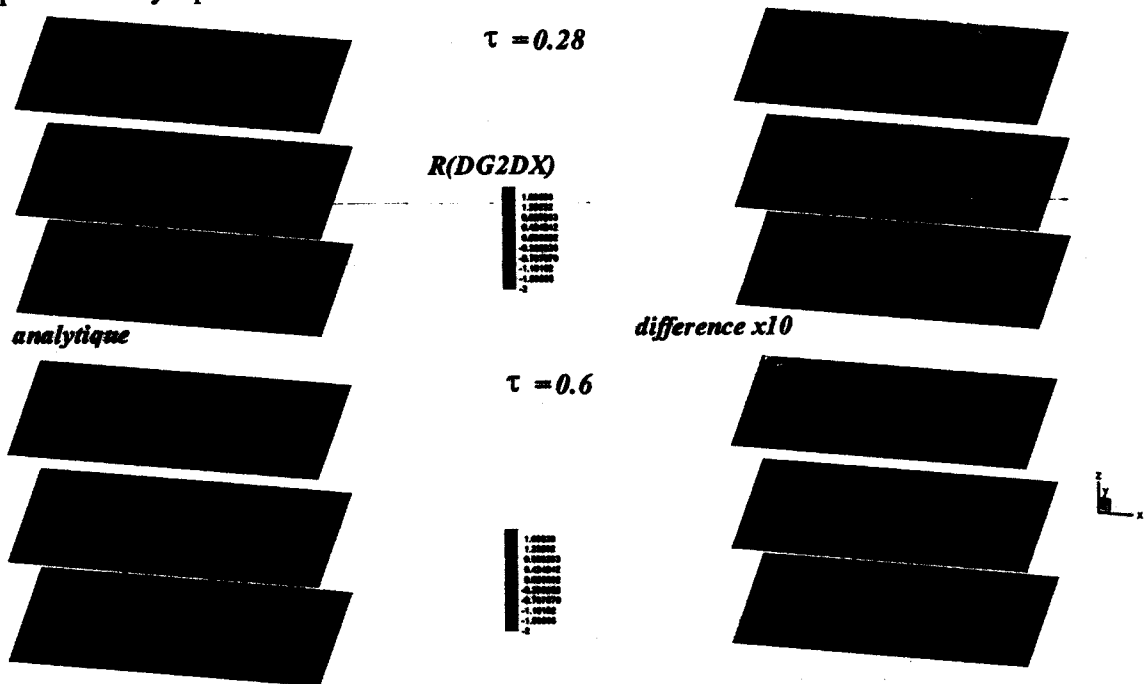


Figure 4, Isovaleurs de  $\iint \partial G_2 / \partial x ds$  ( $z = -0,25; -0,5; -1; \tau = 0,28-0,6$ )

On a cherché à déterminer les angles limites pour lesquelles l'intégration numérique présente des imprécisions, pour  $0,27 \leq \tau \leq 1,5$ . On a pu ainsi déterminer la dépendance des angles caractéristiques avec le paramètre  $\tau$ , figure 5. On présente ici les angles  $\alpha_{\min}$  et  $\alpha_{\max}$ , que l'on appellera respectivement angles d'attaque et de queue du dièdre. A partir des calculs, une loi a été déduite par régression linéaire pour  $\alpha_{\min}$ ; par contre il est difficile de caractériser  $\alpha_{\max}$  car il dépend aussi du nombre de Froude. En effet, à  $\tau$  constant, le dièdre s'ouvre quand la vitesse augmente,  $\alpha_{\max}$  reste cependant toujours inférieur à  $160^\circ$ . Pour un  $\tau < 0,27$ , l'espace entier est pris en compte, ce qui correspond à  $\alpha_{\min} = 0^\circ$ ,  $\alpha_{\max} = 180^\circ$ .

Le but de cette étude est de connaître la précision de l'intégration numérique de la fonction de Green sur une facette. Il n'est pas utile d'avoir une précision meilleure que celle avec laquelle est calculée cette fonction ( $10^{-3}$ ). On met ainsi en évidence des zones où il est préférable de faire une intégration analytique, soit pour gagner du temps, soit pour être plus précis. La figure 6 représente ces différentes zones en fonction de  $R_0$  (8 diagonales de la facette source) et des angles caractéristiques  $\alpha_{\min}$  et  $\alpha_{\max}$  représentés par les valeurs suivantes:

si  $\tau < 0,27$ ,  $\alpha_{\min} = 0^\circ$ ,  $\alpha_{\max} = 180^\circ$ , si  $\tau > 0,27$ ,  $\alpha_{\min} = 160 - 72 \cdot e^{\frac{(\sqrt{\tau}-0,52)}{0,2}}$ ,  $\alpha_{\max} = 160^\circ$ .

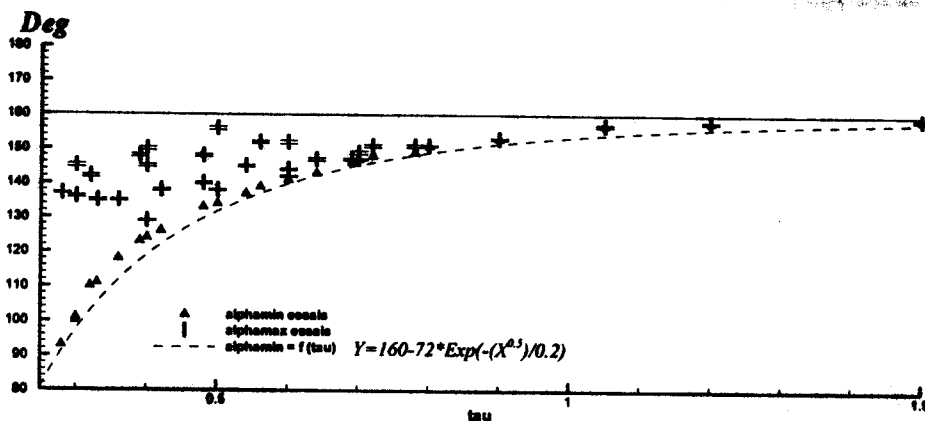


Figure 5, Angles caractéristiques  $\alpha_{\min}$  et  $\alpha_{\max}$  en fonction de  $\tau$ .

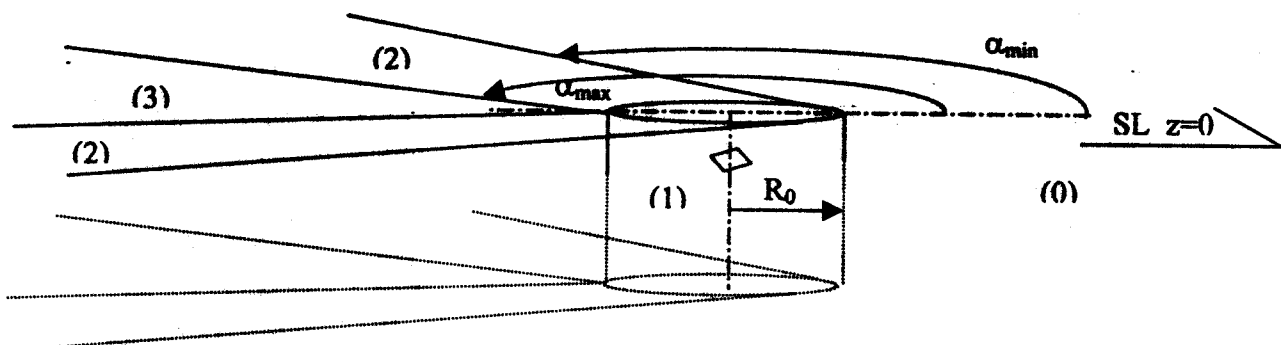


Figure 6, Zones caractéristiques.

Les techniques d'intégration choisies pour les termes  $G_1$  et  $G_2$ , ou de leurs dérivées sur la facette source sont résumées dans le tableau 1:

Zone	$G_1$ et dérivées	$G_2$ et dérivées
0	Gauss 1 point	Gauss 1 point
1	Z=0 numérique Z<0 analytique	Z=0 numérique Z<0 analytique
2	numérique	Z=0 numérique Z<0 analytique
3	numérique	numérique

Tableau 1, Techniques d'intégrations suivant les zones d'écoulement

## 5. Résultats du code de calcul de tenue à la mer

Les méthodes d'intégration définies par le tableau 1 ont été utilisées dans un code de tenue à la mer utilisant une répartition surfacique de sources, sans intégrale de ligne en formulation vitesse. Les premiers résultats concernent l'étude du caisson DNV; la figure 7 présente les coefficients de masses d'eau ajoutées,  $CM_{11}$ ,  $CM_{33}$ , et d'amortissement,  $CA_{11}$  et  $CA_{33}$ , avec vitesse d'avance. Ils sont comparés avec les résultats du code de calcul l'Ecole Centrale de Nantes, AQUA+ [2] sans intégrale de ligne mais avec la fonction de Green exacte (celle développée dans [1] ou celle obtenue par une méthode de steepest descent, [2]). L'accord est tout à fait satisfaisant. On a tracé les résultats obtenus avec une méthode d'intégration Gauss 1 point et la méthode développée ici. Les variations sont faibles et n'apparaissent que pour des valeurs moyennes des périodes étudiées (entre 14 et 20s).

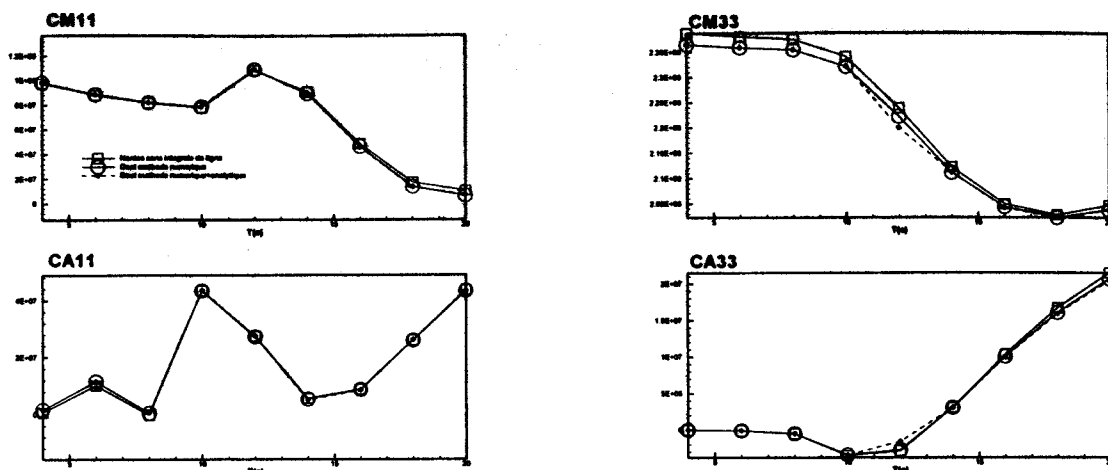


Figure 7, Coefficients de masse ajoutée et amortissement pour le caisson DNV

La figure 8 présente les amplitudes champs de vagues instationnaires autour d'une plaque plane d'allongement 0,5 à un nombre de Froude  $F=0,32$  et une pulsation  $\omega=2$  en mouvement d'embarquée, avec 128 facettes. La partie supérieure correspond au champ de vague calculé par intégrations numériques dans tout le domaine alors que la partie inférieure correspond au processus d'intégration défini dans le tableau 1. Les résultats montrent des différences principalement au voisinage de la plaque mais l'accord entre les deux types de calcul est bon. On notera ici que la surface libre ainsi que la répartition de pression sont plus sensibles à la précision des intégrations. La figure 9 qui présente les différences relatives des hauteurs d'eau (fig.9.a) et des amplitudes de pression (fig.9.b) sur la plaque; de notables écarts apparaissent dans le champ proche et les erreurs sur le champ de pression sont localisées près de la surface libre, vers l'arrière de la plaque. Outre un gain de temps, de 7h environ, (pour 1500 points sur la surface libre, le temps est passé de 14,9h à 7,7h sur une station de travail DEC Alpha255-233), la nouvelle méthode a permis de mettre en évidence la réelle influence des techniques d'intégrations sur les résultats locaux.

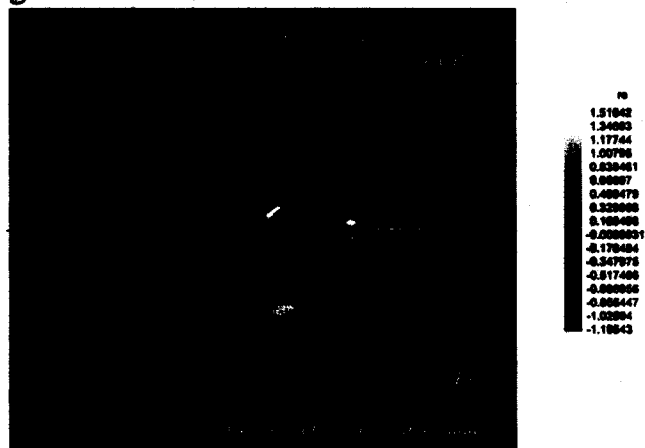
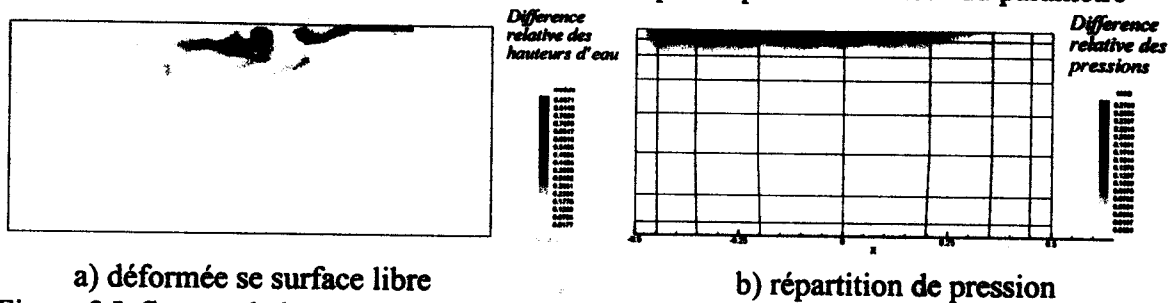


Figure 8, Amplitudes du champ de vagues autour d'une plaque plane en mouvement d'embarquée ( $F=0,32$ ;  $\omega=2$ )

## 6. Conclusion et perspectives

On a présenté ici une étude des intégrations surfaciques de la fonction de Green et de ses dérivées, premières ou secondes qui interviennent dans les méthodes de calcul de tenue à la mer par une méthode de singularité. Ce travail est un premier pas dans le développement d'un code de calcul de tenue à la mer pour obtenir des résultats où la précision est contrôlée. On a défini une procédure pour ces intégrations numériques associant intégrations analytiques

et intégrations numériques, dans des zones définies quelle que soit la valeur du paramètre



a) déformée de surface libre  
b) répartition de pression  
Figure 9 Influence de la méthode d'intégration surfacique sur les amplitudes des ondes de la surface libre et de la pression (même conditions que dans la figure 8)

adimensionnel  $\tau$ . Ces résultats obtenus ici seront introduits dans un nouveau code, tenant compte des effets portants, en formulation potentiel qui permet d'avoir une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce au lieu de première espèce pour la formulation vitesse. Le calcul de l'intégrale de ligne sera également introduit et on devra étudier soigneusement la précision des intégrations linéiques sur les segments de la ligne de flottaison. Par ailleurs, un effort devra être conduit pour diminuer les temps de calcul, en particulier ceux de l'exponentielle intégrale complexe qui est au cœur des calculs numériques de la fonction de Green. Enfin, les résultats obtenus devront être validés à partir d'expériences, non seulement sur des résultats globaux (forces et moments) mais aussi sur des grandeurs locales comme des répartitions de pression ou des mesures de l'élévation instationnaire de la surface libre comme celle obtenue sur des modèles de navire série 60 en mouvements forcés [10].

### Références

- [1] Ba M. and Guilbaud M., *A fast method of evaluation for the translating and pulsating Green's function*, Ship Technology Research, Vol. 42, pp. 68-80, 1995.
- [2] Brument A., Delhommeau G., *Evaluation numérique de la fonction de Green de la tenue à la mer avec vitesse d'avance*, 6<sup>èmes</sup> Jour. de l'Hydrodyn., pp. 147-160, Nantes (France), 1997.
- [3] Wu G.X., *Wave radiation by an oscillating surface-piercing plate at forward speed*, Int. Ship. Progress, 41, n°426, pp.179-90, 1994.
- [4] Nontakaew U., Ba M. and Guilbaud M., *Solving a radiation problem with forward speed using a lifting surface method with a Green's function*, Aerospace Science and Technology, n°8, pp533-43, 1997.
- [5] Guilbaud M., Guyot F., Ba M. et Delhommeau G., *Etude de l'écoulement hydrodynamique instationnaire autour d'un navire série 60*, 5<sup>èmes</sup> Jour. de l'Hydrodyn., Val de Reuil (France), pp. 333-46, 1995.
- [6] Guilbaud M., Nontakaew U., Boin J.P. and Ba M., *Investigation of harmonic flows around lifting surface-piercing bodies*, Euromech 374, pp. 259-266, Poitiers (France), 1998.
- [7] Chen X.B. et Noblesse F., *Super Green functions*, 22<sup>nd</sup> Symposium on Naval Hydrodynamics, Thursday/Friday session, pp.139-53, Washington, USA, 1998.
- [8] Bougis J., *Etude de la diffraction-radiation dans le cas d'un flotteur indéformable animé d'une vitesse moyenne constante et sollicité par une houle sinusoïdale de faible amplitude*, Thèse de doctorat, Université de Nantes, 1980.
- [9] Ponizy B., Guilbaud M. and Ba M., *Numerical computations and integrations of the wave resistance Green's function*, Theoretical and Computational Fluid Dynamics, Vol.12, n°3, pp. 179-194, 1998.
- [10] Brument A., Delhommeau G., Gaillard and Guilbaud M., *Comparison between numerical computations and experiments for seakeeping on ship's models*, Euromech374, pp.241-248, Poitiers (France), 1998