

**6e JOURNÉES DE L'HYDRODYNAMIQUE**

**24, 25, 26 février 1997 - Nantes**

**MODELISATION DE LA PROPAGATION DES ONDES  
EN ZONE COTIERE.  
INTERACTION ONDES-COURANT-SEDIMENT**

**Fernando J. Seabra Santos**

IMAR, Département de Génie Civil, Université de Coimbra

3049 Coimbra Codex, tel: 351 - 39 41 06 98; email: fseabra@gemini.ci.uc.pt

**Résumé**

Le transport sédimentaire en zone côtière dépend des caractéristiques de l'écoulement produit par l'interaction entre les ondes et les courants. A son tour, l'écoulement liquide est lui aussi influencé par les processus sédimentaire parce que i) la concentration de sédiments est à l'origine d'une atténuation de l'énergie cinétique turbulente et que ii) les érosions et dépositions des particules produit des variations de la côte du fond, ce qui modifie les conditions de l'écoulement. Nous présentons des développements récents de modèles numériques qui permettent la prise en considération globale des interactions entre les ondes, les courants et les sédiments. Nous montrons quelques exemples d'application de ces développements et des modèles, ceux-ci considérés individuellement ou dans leur ensemble, à des domaines réels.

**Summary**

The sediment transport in coastal zones depends on the characteristics of the flow produced by wave-current interaction. On the other hand, the flow itself is influenced by the sediment processes because i) the sediment concentration dumps the turbulent kinetic energy and ii) the erosions and depositions of sediments changes the bottom topography and therefore influences the flow conditions. We present recent developments of some numerical models which allow the global representation of wave-current-sediment interactions, as well as some examples.

## 1. Introduction

La région voisine de la ligne de côte, dernière étape de propagation de la houle en provenance du large, est le siège d'interactions complexes entre les milieux marin et terrestre. La maîtrise de ces phénomènes s'avère indispensable à la gestion du littoral. Le fonctionnement des ports, la stabilité des plages et des ouvrages côtiers, les mouvements de la ligne de côte, dépendent essentiellement de l'action de la houle et des courants et de la dynamique sédimentaire induite par leur effet. Des phénomènes tels que les modifications soumise par la houle, la réfraction, la diffraction et le déferlement, aussi bien que les influences réciproques avec les courants et les sédiments se trouvent ainsi au centre des préoccupations scientifiques d'un très grand nombre de chercheurs. Aux approches traditionnelles analytiques et expérimentales, l'essor des ordinateurs et le développement des calculs basés sur ordinateur a permis d'ajouter, à partir des années cinquante, une autre vision des problèmes à résoudre. Avec toutes ses faiblesses et ne pouvant pas dispenser les autres contributions, l'approche numérique a pris, néanmoins, le rôle principal dans de nombreuses études. Pour que cela se maintienne il va falloir, cependant, que ses utilisateurs restent conscients de ses limites, capables de critiquer les résultats.

Nous résumerons les hypothèses qu'il faut poser pour arriver aux équations de base des différents modèles. Nous présenterons des développements récents qui permettent, dans leur ensemble, d'aborder quelques problèmes de modélisation des processus hydrosédimentaires en systèmes côtiers. Nous montrerons la complémentarité de ces modèles pour mettre en évidence que même les plus simples, peuvent être très utiles s'ils sont correctement appliqués. Finalement nous donnerons quelques exemples d'application de ces modèles à des problèmes réels.

## 2. Hypothèses et approximations

### 2.1. Jusqu'aux "équations de départ"

Nous traiterons l'écoulement à surface libre, adiabatique et isentropique d'un liquide incompressible par rapport à un repère non-tournant. Le liquide étant supposé newtonien, les hypothèses de Navier seront admises. Sur la verticale, deux régions sont à considérer:

i) loin de la frontière solide, où le rotationnel de l'écoulement moyen peut être considéré nul, les équations du mouvement sont les équations d'Euler qui s'écrivent, compte tenu des approximations décrites,

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{X} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

$$\nabla \wedge \mathbf{V} = 0$$

soit, si l'on utilise la fonction potentielle de vitesse,

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

$$\nabla \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz \right) = 0$$

ii) au voisinage de la frontière solide, où le gradient vertical des composantes horizontales de la vitesses est très important, et donc il existe une forte rotation des particules, les équations de l'écoulement turbulent s'écrivent, compte tenu de la décomposition de Reynolds et de l'hypothèse de la viscosité turbulente  $\nu_T$ ,

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{X} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot [(\nu_M + \nu_T) \nabla \mathbf{V}]$$

Une nouvelle variable apparaît,  $\nu_T$ , ce qui impose que l'on ferme le système. Le modèle de fermeture plus courant, dit à *zero équations d'appoint*, calcule la viscosité turbulente en fonction d'une quantité appelée longueur de mélange (qui varie linéairement en fonction de la distance à la paroi) et des gradients verticaux de la vitesse horizontale. Celui que nous utiliserons, dit à *deux équations d'appoint*, calcule la viscosité turbulente en fonction de l'énergie cinétique turbulente,  $\underline{K}$ , et de l'échelle des grands tourbillons,  $\underline{L}$  (modèle K-L).

## 2.2. Ecoulement extérieur

L'étude des ondes en zone côtière est conditionnée par la possibilité de modéliser leur propagation depuis le large (où les profondeurs sont plus importantes, où leur comportement est plus uniforme et où les appareils de mesure sont normalement installés) jusqu'aux régions très peu profondes, les plages, les rades, les estuaires, les ports. Étant donnée la complexité de résolution des équations complètes, l'approche mathématique classique du problème admet deux ensembles d'hypothèses dites fondamentales, qui restreignent le domaine de validité des modèles correspondants: i) les modèles basés sur la théorie de Stokes qui, compte tenu des dimensions caractéristiques des ondes courantes perd sa validité en eau peu profonde ( $kh < 1/\pi$ ) et ii) les modèles basés sur la théorie de l'eau peu profonde dont les équations de Boussinesq sont parmi les plus efficaces mais qui sont incapables à leur tour, dans leur présentation classique, de représenter l'évolution des ondes en eau profonde ( $kh > \pi$ ).

### Théorie de Stokes

A partir de l'équation de Laplace, si nous supposons une pression constante à la surface, une tension superficielle nulle, l'imperméabilité de la surface et du fond, supposé horizontal, et si nous cherchons des ondes de faible cambrure ( $ka \ll 1$ ), périodiques en espace et en temps, voisines de la solution triviale (le repos), nous pouvons obtenir par la méthode de séparation de

variables, après développement en série de chaque variable en fonction de  $ka$ , parmi bien d'autres solutions,

- à l'ordre 0 en  $ka$ ,

$$\Phi = -a \sqrt{\frac{g}{k}} \frac{\cosh(kz)}{\cosh(kh)} \sin(kx - \omega t)$$

$$\eta = a \cos(kx - \omega t)$$

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k} \tanh(kh)$$

- à l'ordre 1 en  $ka$ ,

$$\Phi = -\frac{3a}{8} \sqrt{\frac{g}{k}} \omega \frac{\cosh(2kz)}{\sinh^4(kh)} \sin[2(kx - \omega t)]$$

$$\eta = \frac{ka^2}{4} \frac{\cosh(kh)}{\sinh^3(kh)} [2 + \cosh(2kh)] \cos[2(kx - \omega t)]$$

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k} \tanh(kh)$$

où la dernière équation, la relation d'Airy, donne le rapport entre la fréquence angulaire et le nombre d'onde. Une mesure de validité de ce développement est de savoir si oui ou non les séries convergent. Pour cela, le rapport  $R_n$  entre les termes d'ordre  $n+1$  et  $n$  doit tendre vers zéro lorsque  $n$  tend vers l'infini. Pour la variable  $\Phi$  et pour les deux premiers termes de la série nous avons,

$$R_1 = \frac{\varepsilon \phi_1}{\phi_0} = \frac{3}{8} \frac{ka \cosh(2kh)}{\cosh(kh) \sinh^3(kh)}$$

En eau profonde ( $kh > \pi$ ), les formes asymptotiques des fonctions hyperboliques permettant d'écrire,

$$R_1 = 3 ka \exp(-2kh)$$

qui est toujours très petit devant l'unité, en particulier lorsque la cambrure est faible. Par contre en eau peu profonde ( $kh < 1/\pi$ ) nous aurons,

$$R_1 = \frac{3}{8} \frac{ka}{(kh)^3} = \frac{3}{8} \left(\frac{a}{h}\right) \left(\frac{1}{kh}\right)^2$$

La valeur maximale de l'amplitude relative ( $a/h$ ) doit ainsi rester très faible devant la profondeur relative ( $kh$ ), qui devient un paramètre important. Pour que le développement soit valable il faut que,

$$\left(\frac{a}{h}\right) \ll \frac{8}{3} (kh)^2$$

Dans la limite du domaine ( $kh=1/\pi$ ), où elle peut atteindre sa valeur maximale, l'amplitude ne doit donc pas dépasser quelques pourcents de la profondeur ce qui correspond à une très grande limitation de la théorie pour des applications à des cas réels en eau peu profonde.

### Equation de Berkoff

Le travail de Berkoff (1972) est le point de départ de nouveaux développements qui aboutissent à l'équation des ondes pour des pentes faibles (*mild slope wave equation* - MSWE) permettant de représenter l'ensemble des effets de réfraction et diffraction. Cherchant uniquement à représenter les modes de propagation, il a obtenu à partir de l'équation de Laplace, une nouvelle équation qui s'écrit,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( c c_g \frac{\partial F}{\partial x} \right) + k^2 c c_g F = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( c c_g \frac{\partial F}{\partial y} \right) + k^2 c c_g F = 0$$

où  $c$  et  $c_g$  sont respectivement la célérité et la vitesse de groupe,  $k$  le nombre d'onde.  $F$  est une fonction complexe qui dépend de l'amplitude et de la phase et peut être donnée par,

$$F(x, y) = a(x, y) \exp[iS(x, y)]$$

Des développements plus récents, en particulier l'approximation parabolique de la MSWE (Radder, 1979; Kirby et Dalrymple, 1983; Liu et Tsay, 1984; Dingemans et al, 1984) et l'approximation hyperbolique (Watanabe et Maruyama, 1986; Watanabe et Dibajnia, 1988; Ohnaka et Watanabe, 1990) ont été réalisés, qui permettent de considérer, dans sa version la plus performante, les effets d'interaction onde-courant, aussi bien que la réfraction, la diffraction, la réflexion, la perte d'énergie par frottement de fond et déferlement des ondes évoluant en domaines à faibles pente. Malheureusement, le domaine de validité de cette équation est celui de la théorie de Stokes, ce qui correspond comme nous l'avons vu à une très sévère limitation de précision en eau peu profonde. De même, les modes locaux (pratiquement nuls partout sauf au voisinage des obstacles) étant négligés, cette simplification a des conséquences qui sont souvent oubliées.

### Equations de Boussinesq

La modélisation des ondes en eau peu profonde exige une approche différente. Celle-ci a été trouvée à partir des travaux de Saint-Venant, lorsque l'on admet que la longueur caractéristique ( $\ell$ ) est très grande devant la profondeur ( $h_0$ ). Si nous admettons que cette longueur peut être donnée par,

$$\ell = \frac{a}{\left| \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_{\max} \right|}$$

où le dénominateur représente en valeur absolue la pente maximale de la surface, nous obtenons pour une onde monochromatique, l'expression du petit paramètre (qui peut être maintenant défini comme le rapport entre  $\underline{h}$  et  $\underline{\ell}$ ),

$$\frac{h}{\ell} = kh,$$

où  $k$  est le nombre d'onde ( $= 2\pi/\lambda$ ). En partant des équations d'Euler et si nous supposons, comme auparavant, une pression constante à la surface, une tension superficielle nulle, l'imperméabilité de la surface et du fond, supposé horizontal, nous obtenons après développement en série de chaque variable, en fonction de  $\underline{kh}$ ,

- à l'ordre 0 en  $\underline{kh}$ , les équations de Saint-Venant;
- à l'ordre 1 en  $\underline{kh}$ , les équations de Serre.

Pour plus de détails sur les domaines de validité des différentes approximations en eau peu profonde, voir p.e. Seabra Santos (1988).

Dans ce dernier système, si nous limitons l'amplitude relative des ondes à l'ordre de grandeur du carré de la profondeur relative,

$$\frac{a}{h} = O\left(\frac{h}{\ell}\right)^2$$

ce qui revient à dire que,

$$\left(\frac{a}{h}\right)\left(\frac{\ell}{h}\right)^2 = U = O(1)$$

où  $\underline{U}$ , nombre d'Ursell, représente le rapport entre les effets de dispersion d'amplitude et de phase, nous obtenons les équations de Boussinesq,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(h\bar{v}) &= 0 \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + g\frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{h^2}{3}\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + g\frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{h^2}{3}\frac{\partial^2}{\partial y \partial t}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

dont les modes de propagation ont une célérité donnée, à l'ordre d'approximation des équations, par la relation de dispersion,

$$c^2 = \frac{3gh}{3 + (kh)^2}$$

qui est justement à cet ordre, l'approximation asymptotique de la relation d'Airy en eau peu profonde. Pour plus de détails sur ce développement, ainsi que l'extension aux profondeurs variables, au déferlement et à l'interaction ondes-courant consulter Carmo et al. (1993) et Carmo et Seabra Santos (1996). Tant que cette relation restera une bonne approximation de la relation d'Airy, les équations de Boussinesq sont adaptées à l'étude du problème. Or, pour  $kh=1/\pi$ , nous avons déjà une erreur relative de 5%, qui arrive à 25% pour  $kh=\pi$ . Comme résultat de ces limitations, la méthodologie traditionnelle consiste à diviser le domaine d'étude en deux parties, les ondes étant modélisées d'abord en eau profonde ou intermédiaire par un modèle basé sur la théorie de Stokes (normalement la théorie linéaire appliquée sur un plan de refraction ou une méthode de Berkoff) et après, plus près de la côte, par un modèle issu de la théorie de l'eau peu profonde. Les résultats de la première étape sur la frontière commune des deux sous-domaines donnent les conditions aux limites pour la deuxième étape de propagation. Dans la pratique, cette méthodologie impose la définition d'une frontière artificielle interne entre deux sous-domaines pour faire tourner deux théories différentes, ce qui provoque une perte de précision qui est difficile de caractériser et de quantifier.

### 2.3. Couche limite turbulente

Nous considérons que dans cette région l'écoulement transporte un constituant scalaire dont la concentration est donnée par  $\underline{C}$  et dont l'influence sur la densité du fluide est faible. L'hypothèse de Boussinesq est valable, c'est-à-dire, la pression et la densité varient peu autour de leurs valeurs hydrostatiques. On suppose également que la turbulence est stationnaire et homogène. Toutes les dérivées des quantités turbulentes sont négligeables et on parle d'un équilibre locale de la turbulence, dans lequel la production et la dissipation d'énergie se compensent à chaque point et à chaque instant. Compte tenu de ces hypothèses, le modèle de turbulence que nous utilisons, issu des travaux de Lewellen (1977), Sheng et Villaret (1989), Tran Thu et Temperville (1994), calcule la viscosité turbulente en fonction de l'énergie cinétique turbulente  $K$  et de la macro-échelle de la turbulence  $L$ , et s'écrit en version couplée,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0^*}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu_T \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial K}{\partial t} &= \nu_T \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{\sqrt{2K}}{4L} K + A \frac{\partial}{\partial z} \left( \sqrt{2KL} L \frac{\partial K}{\partial z} \right) + \frac{g}{\rho_0} \gamma_T \frac{\partial \rho}{\partial z} \\ \frac{\partial L}{\partial t} &= -0.35 \frac{\nu_T L}{2K} \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right] + 0.075 \sqrt{2K} + 0.3 \frac{\partial}{\partial z} \left( \sqrt{2KL} L \frac{\partial L}{\partial z} \right) \\ &\quad - \frac{0.375}{\sqrt{2K}} \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\sqrt{2K} L) \right]^2 + 0.8 \frac{L}{2K} \frac{g}{\rho_0} \gamma_T \frac{\partial \rho}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( w_s C + \gamma_T \frac{\partial C}{\partial z} \right)$$

$$v_T = \frac{\sqrt{2K} L}{4} \frac{(1 - 16.444\Omega)}{(1 - 19.778\Omega)(1 - \Omega)}$$

$$\gamma_T = \frac{v_T}{B} \frac{(1 - \Omega)}{(1 - 16.444\Omega)}$$

$$\Omega = \frac{1}{B} \frac{g}{\rho_o} \frac{L^2}{2K} \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

où les équations hydrodynamiques et de la concentration sont liées par la relation,

$$\rho = \rho_o + (\rho_s - \rho_o)C.$$

$\rho_s$ ,  $\rho_o$  et  $\rho$  sont les densités du sédiment, du fluide et du mélange, respectivement. La vitesse de chute des particules,  $w_s$ , est considérée constante (=2.6cm/s). La stratification est représentée par le paramètre  $\Omega$ . Pour les coefficients empiriques  $A$  et  $B$ , Lewellen propose respectivement les valeurs 0.3 et 0.75. Le couplage avec l'écoulement potentiel peut être faite par le gradient horizontal de pression à l'interface. Pour plus de détails et d'exemples d'applications, voir p.e. Tran Thu (1995).

Dans le cadre de projets de recherches récents (MAST2/G8M), plusieurs modèles de couche limite turbulente, dont celui que nous venons de présenter, ont été testés par comparaison avec des résultats expérimentaux concernant le mouvement de sédiments sous l'action d'une houle seule ou de l'interaction houle-courant. De toute évidence, ils présentent des caractéristiques communes et s'il est certain qu'ils représentent une énorme évolution de l'état de l'art par rapport aux modèles simplifiés de couche limite logarithmique, il est prudent de reconnaître qu'ils restent incapables de reproduire un certain nombre d'effets dont nous citerons,

- des différences sensibles au niveau du profil vertical des vitesses horizontales;
- une sous-estimation importante de la concentration de sédiments dans la partie inférieure de la couche limite;
- un déphasage positif (une avance) très sensible de l'onde de concentration numérique par rapport à l'expérience, d'autant plus important que l'on s'éloigne de la paroi.

### 3. Développements récents

#### 3.1. Modèle de Boussinesq

Dans le but de modéliser la propagation des ondes de gravité en provenance du large, de nombreux chercheurs se sont orientés vers l'utilisation de modèles issus de l'approche de Berkoff ou de la théorie de l'eau peu profonde, dans laquelle l'approche de Boussinesq est sans doute la plus utilisée, ce qui a conduit à un perfectionnement très sensible des modèles actuels.

Ceux-ci sont aujourd'hui capables de décrire les effets de réflexion totale ou partielle, de réfraction, de diffraction, d'interaction ondes-courant, de perte d'énergie due au frottement et au déferlement, de propagation sur un fond de profondeur variable, dans un domaine à deux dimensions horizontales et frontières quelconques. Cependant, ces deux familles présentent des limitations qui n'ont pas encore trouvé une solution définitive. Les modèles basés sur l'approche classique de Berkoff ne sont pas capables de décrire les effets de décomposition non-linéaire. En eau peu profonde, ils peuvent donc produire des erreurs grossières sur la forme et l'amplitude des ondes. Puisqu'ils négligent les oscillations locales, le résultat n'est pas fiable près des obstacles. Leur atout principal est celui de décrire les vitesses de phase et de groupe de l'harmonique fondamental tout aussi bien en eau profonde qu'en eau peu profonde. De l'autre côté, les modèles basés sur l'approche classique de Boussinesq représentent assez bien l'évolution de la forme et de l'amplitude des ondes, ainsi que leurs célérité et vitesse de groupe en eau peu profonde. Par contre, lorsque le paramètre  $kh$  augmente (ce qui se produit au large mais aussi près de la côte en conséquence de la décomposition en ondes de longueur de plus en plus faible), des erreurs très importantes sur les vitesses de groupe et de phase interviennent et le résultat est souvent décevant. Madsen et al (1992) ont proposé une modification du coefficient du terme dispersif. Ils ont montré que les erreurs de phase pouvaient être ainsi limitées ( $<5\%$ ), même en profondeur intermédiaire ( $kh < \pi$ ), en dehors du domaine traditionnel d'application de ces équations. Okey Nwogu (1993) a dérivé une nouvelle forme des équations de Boussinesq, où la vitesse horizontale est prise à une distance verticale du niveau de repos définie localement en fonction de la profondeur relative. Ils ont trouvé que dans la gamme  $0 < kh < \pi$ , les caractéristiques dispersives optimales étaient obtenues avec un coefficient du terme dispersif de  $-0.390$  (au lieu de  $-1/3$  pour l'équation de Boussinesq classique), ceci conduisant à des erreurs maximales dans cette gamme de  $2\%$  et  $12\%$ , respectivement pour les vitesses de phase et de groupe. Malheureusement, pour des valeurs supérieures de  $kh$ , p.e.  $kh = 2\pi$ , cette approche conduit à des erreurs de  $25\%$  et de  $47\%$ . Dans la ligne de Madsen, Schroter et al. (1994) ont proposé deux modèles d'eau peu profonde aux caractéristiques dispersives améliorées. Le but du développement présenté par la suite est celui d'encadrer théoriquement ces résultats, en proposant un système d'équations qui se réduit, en eau profonde, à la théorie des ondes de faible amplitude, et en eau peu profonde, aux équations de Boussinesq, de Madsen et al ou de Schroter et al, selon l'ordre d'approximation retenue. Pour alléger le texte, les équations sont écrites en version unidirectionnelle et le gradient horizontal de fond est supposé faible. Cependant, quelques exemples présentés se rapportent à des domaines à deux dimensions horizontales avec des variations sensibles de la profondeur.

En partant des équations de l'écoulement potentiel et des conditions aux limites classiques, nous obtenons une équation de continuité exacte, valable à tout ordre d'approximation, en eau profonde comme en eau peu profonde,

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h\bar{u}) = 0$$

De l'équation de quantité de mouvement nous obtenons en variables adimensionnelles et à l'ordre d'approximation indiquée une équation qui s'écrit (Seabra Santos, 1994),

$$u_t + \varepsilon(u_o u_{ox} + w_o u_{oz}) + \eta_x - \sigma^2 \int_z^1 \int_{\xi} u_{oxxi} dz dz = O(\varepsilon^2, \varepsilon\sigma^2)$$

Si l'on suppose que la variation verticale de la vitesse horizontale est donnée, en première approximation, par l'expression,

$$u_o = kh \frac{\cosh kz}{\sinh kh} \bar{u}_o + O(\varepsilon)$$

nous pouvons intégrer sur la verticale entre le fond et la surface pour éviter la dépendance en  $z$ , et obtenons une équation de Boussinesq modifiée,

$$\bar{u}_t + \varepsilon(\alpha \bar{u}_o^2)_x + \eta_x - \sigma^2 (\beta_1 \bar{u}_o)_{xxt} = O(\varepsilon^2, \varepsilon\sigma^2)$$

où les coefficients  $\alpha$  et  $\beta_1$  ont les représentations suivantes,

$$\alpha = \frac{1}{2} \left[ \frac{kh}{\tanh kh} - 1 + \left( \frac{kh}{\sinh kh} \right)^2 \right] ; \quad \beta_1 = \left[ \left( \frac{1-\xi}{kh} \right)^2 \left( \frac{kh}{\tanh kh} - 1 \right) \right].$$

La relation de dispersion de la version linéarisée de cette équation s'écrit, si l'on suppose la profondeur constante,

$$c^2 = \frac{1}{1 + \beta_1 (kh)^2}$$

qui est, compte tenu la définition de  $\beta_1$ , exactement la relation d'Airy. Sous cette forme, le modèle de Boussinesq peut donc décrire la propagation des ondes en eau profonde et en eau peu profonde, comme nous le voyons sur l'exemple présenté dans la Figure 1.

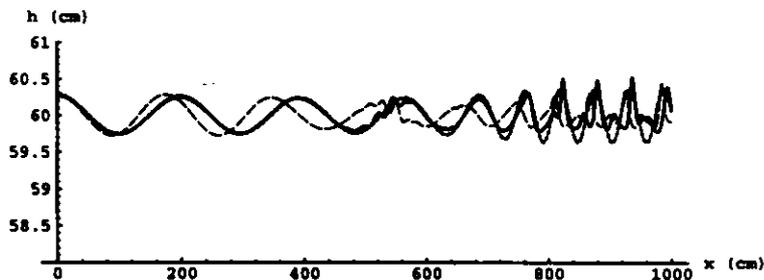


Figure 1 - Propagation d'une onde sinusoidale dans un domaine à profondeur variable. Surface libre à l'instant  $t=11.5$  sec.  $T=1.15$  sec.  $a=0.25$ cm.  $h_0=60$ cm pour  $0m < x < 2m$ ;  $h_0=2.5$ cm pour  $8m < x < 10m$ ; variation sinusoidale de profondeur entre  $x=2m$  et  $x=8m$ . Trait plain: Boussinesq modifié ( $\sigma^4$ ). Pointillé fin: Boussinesq classique. Pointillé épais: linéaire.

Une onde de 1.15 sec de période et 0.25 cm d'amplitude se propage dans un canal de 10 m de longueur dont la profondeur varie entre 60 cm (entre  $x=0\text{m}$  et  $x=2\text{m}$ ) et 2.5 cm (entre  $x=8\text{m}$  et  $x=10\text{m}$ ). Entre les abscisses  $x=2\text{m}$  et  $x=8\text{m}$  la variation de profondeur est sinusoidale. Compte tenu des modifications de longueur d'onde et de profondeur, le paramètre  $kh$  varie entre 1.908 et 0.279. Le profil prévu par le nouveau modèle suit le résultat de la théorie linéaire en eau profonde et le résultat du modèle classique de Boussinesq en eau peu profonde (Figure 2).

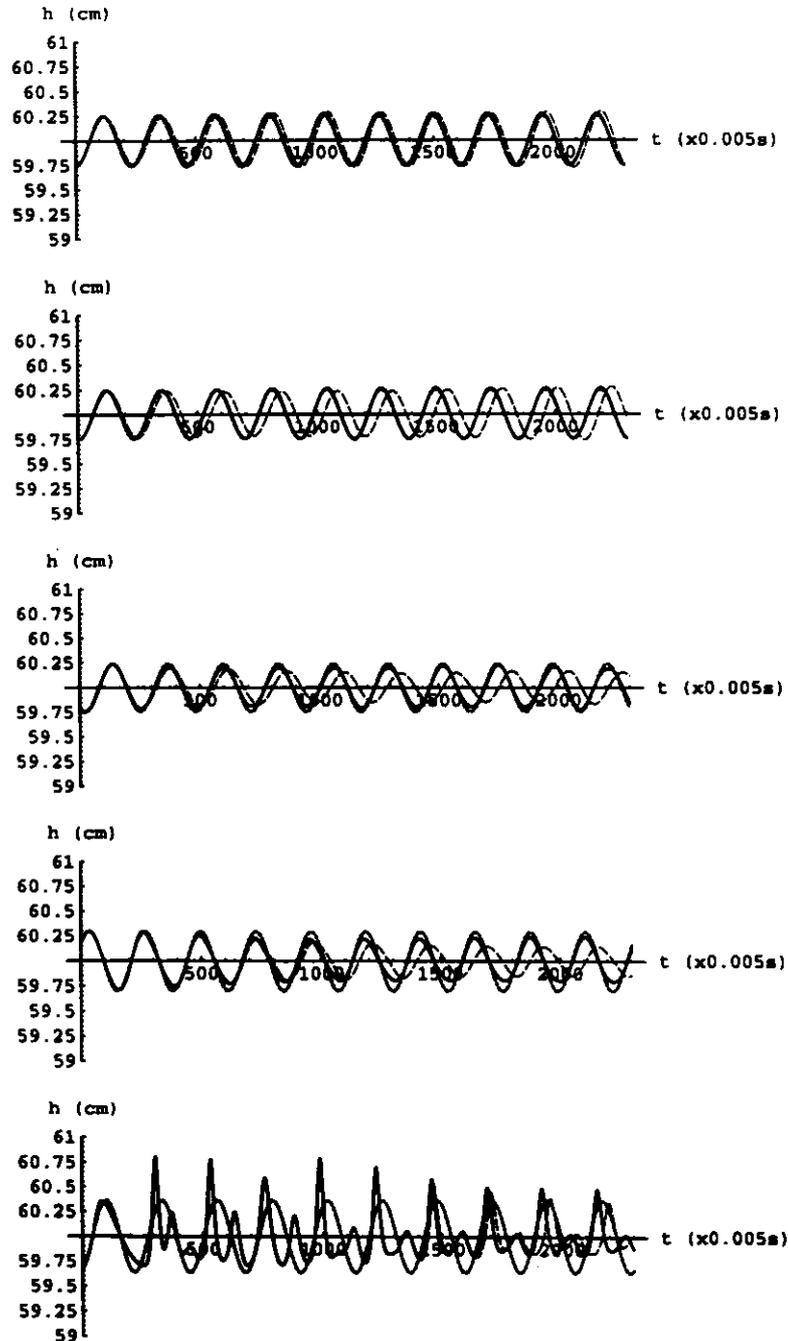


Figure 2 - Propagation d'une onde sinusoidale dans un domaine à profondeur variable. Surface libre aux abscisses  $x=1\text{m}$ ;  $x=3\text{m}$ ;  $x=5\text{m}$ ;  $x=7\text{m}$ ;  $x=9\text{m}$ .  $T=1.15\text{ sec}$ .  $a=0.25\text{cm}$ . Trait plein: Boussinesq modifié ( $\sigma^4$ ). Pointillé fin: Boussinesq classique. Pointillé épais: linéaire.

Il subsiste un problème important, celui de la forte dépendance du coefficient  $\beta_1$  par rapport à  $kh$  (voir Figure 3).

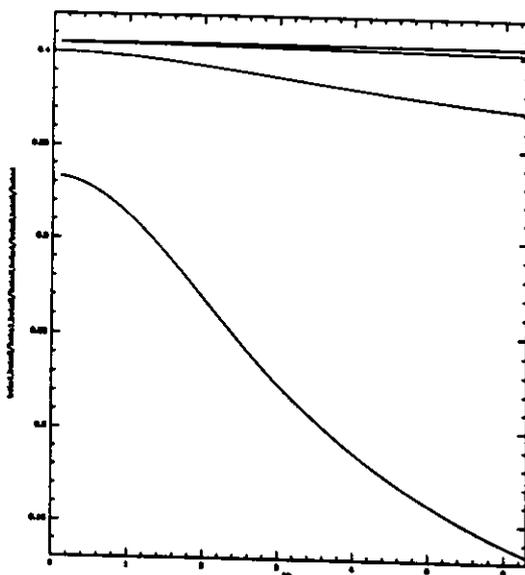


Figure 3 - Variation des coefficients  $\beta_1$ ,  $\beta_2/\beta_1$ ,  $\beta_3/\beta_2$ ,  $\beta_4/\beta_3$ ,  $\beta_5/\beta_4$  avec  $kh$ .

A chaque point du domaine, ce coefficient ne peut avoir qu'une seule valeur et il découle donc que seules les ondes monochromatiques peuvent être représentées. Pour éviter cette limitation nous poursuivons le développement aux ordres supérieures en  $\sigma^2$ . À l'aide des équations précédentes nous écrivons,

- à l'ordre  $\sigma^6$ .

$$u_t + \varepsilon(u_o u_{ox} + w_o u_{oz}) + \eta_x - \sigma^2 \int_z^1 \int_{\xi}^z \left( -\eta_x + \sigma^2 \int_z^1 \int_{\xi}^z u_{o_{xxt}} dz dz \right)_{xx} dz dz = O(\varepsilon^2, \varepsilon\sigma^4, \sigma^6)$$

$$\bar{u}_t + \varepsilon(\alpha \bar{u}_o^{-2})_x + \eta_x + \sigma^2 \left( \frac{1}{3} \right) \eta_{xxx} - \sigma^4 (\beta_2) \bar{u}_{o_{xxxxt}} = O(\varepsilon^2, \varepsilon\sigma^4, \sigma^6)$$

$$\bar{u}_t + \varepsilon(\alpha \bar{u}_o^{-2})_x + \eta_x + \sigma^2 (\gamma_{6.1}) \eta_{xxx} - \sigma^2 (\gamma_{6.2}) \bar{u}_{o_{xxt}} = O(\varepsilon^2, \varepsilon\sigma^4, \sigma^6)$$

- à l'ordre  $\sigma^8$ .

$$\bar{u}_t + \varepsilon(\alpha \bar{u}_o^{-2})_x + \eta_x + \sigma^2 (\gamma_{8.1}) \eta_{xxx} - \sigma^2 (\gamma_{8.2}) \bar{u}_{o_{xxt}} + \sigma^4 (\gamma_{8.3}) \bar{u}_{o_{xxxxt}} = O(\varepsilon^2, \varepsilon\sigma^6, \sigma^8)$$

- à l'ordre  $\sigma^{10}$ .

$$\bar{u}_t + \varepsilon(\alpha \bar{u}_o^{-2})_x + \eta_x + \sigma^2 (\gamma_{10.1}) \eta_{xxx} - \sigma^2 (\gamma_{10.2}) \bar{u}_{o_{xxt}} + \sigma^4 (\gamma_{10.3}) \eta_{xxxxx} + \sigma^4 (\gamma_{10.4}) \bar{u}_{o_{xxxxt}} = O(\varepsilon^2, \varepsilon\sigma^8, \sigma^{10})$$

où les coefficients  $\gamma$  et  $\beta_i$  ont les définitions suivantes,

$$\gamma_{6.1} = \frac{1}{3} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \quad ; \quad \gamma_{6.2} = \frac{\beta_2}{\beta_1}$$

$$\gamma_{8.1} = \frac{1}{3} - \frac{\beta_3}{\beta_2} - \frac{\left(\frac{2}{15} - \frac{\beta_3}{3\beta_2}\right)}{\left(\frac{1}{3} - \frac{\beta_2}{\beta_1}\right)} \quad ; \quad \gamma_{8.2} = \frac{\beta_3}{\beta_2} + \frac{\left(\frac{2}{15} - \frac{\beta_3}{3\beta_2}\right)}{\left(\frac{1}{3} - \frac{\beta_2}{\beta_1}\right)} \quad ; \quad \gamma_{8.3} = \frac{\left(\frac{2}{15} - \frac{\beta_3}{3\beta_2}\right)\beta_2}{\left(\frac{1}{3} - \frac{\beta_2}{\beta_1}\right)\beta_1}$$

$$\gamma_{10.1} = \frac{1}{3} - \frac{\beta_4}{\beta_3} - \frac{\left(\frac{17}{315} - \frac{2\beta_4}{15\beta_3}\right)}{\left(\frac{2}{15} - \frac{\beta_3}{3\beta_2}\right)} \quad ; \quad \gamma_{10.2} = \frac{\beta_4}{\beta_3} + \frac{\left(\frac{17}{315} - \frac{2\beta_4}{15\beta_3}\right)}{\left(\frac{2}{15} - \frac{\beta_3}{3\beta_2}\right)}$$

$$\gamma_{10.3} = \frac{2}{15} - \frac{\beta_4}{3\beta_3} - \frac{\left(\frac{17}{315} - \frac{2\beta_4}{15\beta_3}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{\beta_3}{\beta_2}\right)}{\left(\frac{2}{15} - \frac{\beta_3}{3\beta_2}\right)} \quad ; \quad \gamma_{10.4} = \frac{\left(\frac{17}{315} - \frac{2\beta_4}{15\beta_3}\right)\beta_3}{\left(\frac{2}{15} - \frac{\beta_3}{3\beta_2}\right)\beta_2}$$

$$\beta_2 = \left[ \left( \frac{1-\xi}{kh} \right)^2 \left( \frac{kh}{3 \tanh kh} - \beta_1 \right) \right]$$

$$\beta_3 = \left[ \left( \frac{1-\xi}{kh} \right)^2 \left( \frac{2 kh}{15 \tanh kh} - \beta_2 \right) \right]$$

$$\beta_4 = \left[ \left( \frac{1-\xi}{kh} \right)^2 \left( \frac{17 kh}{315 \tanh kh} - \beta_3 \right) \right]$$

et les relations de dispersion des équations linéarisées en fond horizontal s'écrivent respectivement,

$$c^2 = \frac{1 - \gamma_{6.1}(kh)^2}{1 + \gamma_{6.2}(kh)^2} + O(\varepsilon^2, \varepsilon\sigma^4, \sigma^6)$$

$$c^2 = \frac{1 - \gamma_{8.1}(kh)^2}{1 + \gamma_{8.2}(kh)^2 + \gamma_{8.3}(kh)^4} + O(\varepsilon^2, \varepsilon\sigma^6, \sigma^8)$$

$$c^2 = \frac{1 - \gamma_{10.1}(kh)^2 + \gamma_{10.3}(kh)^4}{1 + \gamma_{10.2}(kh)^2 + \gamma_{10.4}(kh)^4} + O(\varepsilon^2, \varepsilon\sigma^8, \sigma^{10})$$

Tandis que  $\beta_1$  présente une forte variation en fonction de  $kh$ , les coefficients correspondants aux ordres supérieurs varient de moins en moins (Figure 3). Si nous prenons pour ces coefficients des valeurs fixes, les écarts des vitesses de phase et de groupe par rapport aux valeurs de référence (Airy) deviendront, par conséquent, beaucoup moins importants. En particulier, si l'on prend les valeurs correspondantes aux conditions d'eau peu profonde ( $kh \rightarrow 0$ ) nous retrouvons les approximations de Madsen et al. (1991) (ordre  $\sigma^6$ ) et de Shroter et al. (1994) (ordre  $\sigma^8$  et  $\sigma^{10}$ ), dont les erreurs relatives des vitesses de phase et de groupe sont représentés dans la Figure 4, où l'on compare les résultats analytiques et numériques.

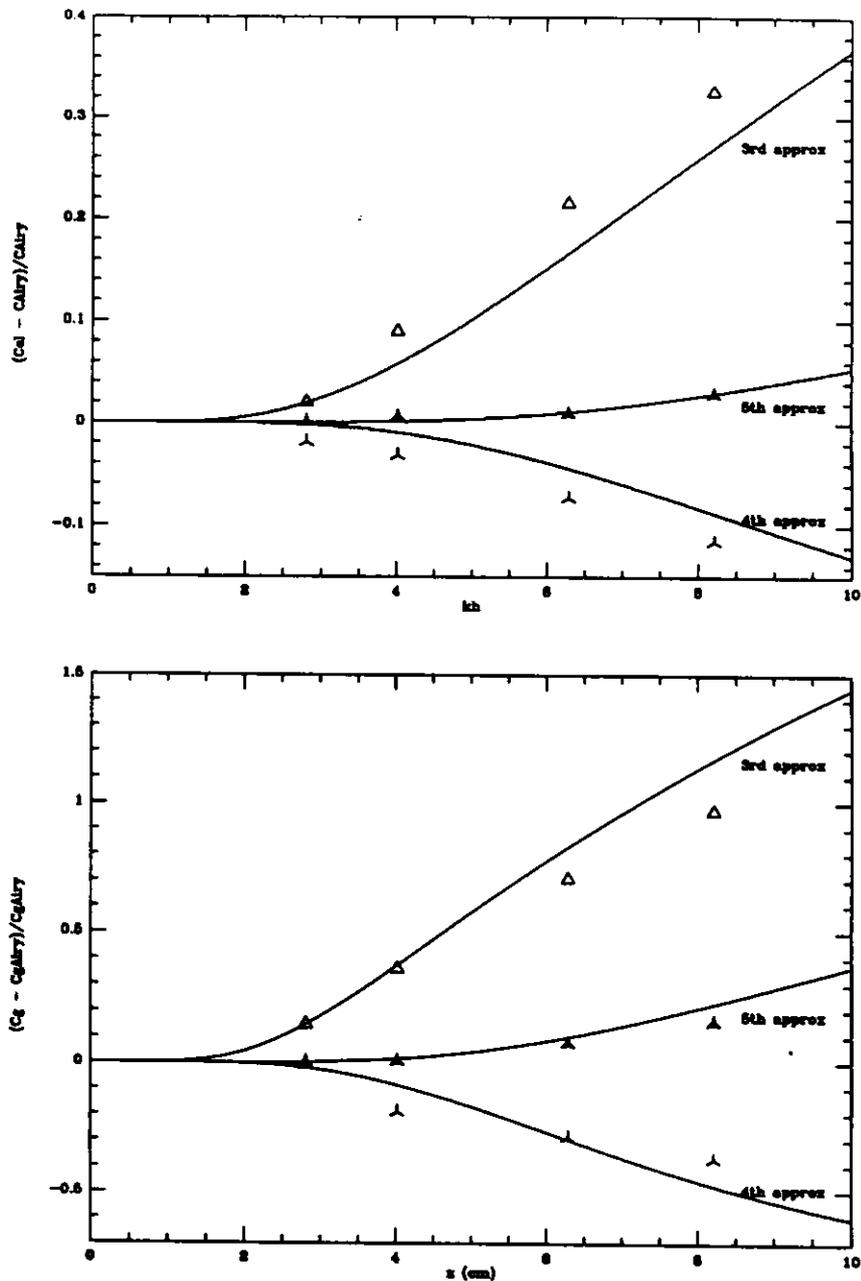


Figure 4 - Erreurs relatives des vitesses de phase (en haut) et de groupe (en bas) par rapport aux relations d'Airy. Comparaison avec des résultats numériques aux différents ordres d'approximation.

Le choix de l'approximation la plus adéquate à un exemple donnée dépend de l'équilibre entre la précision désirée et l'augmentation des difficultés numériques et du temps de calcul qui sont associées à la résolution des ordres plus élevées. Nous présentons des exemples d'utilisation de plusieurs de ces approximations. La Figure 5 représente une application de l'approximation en ( $\sigma^{10}$ ) à l'étude de l'interaction faible entre une onde solitaire de 5 cm d'amplitude et une onde sinusoidale de 1 cm d'amplitude et 0.6 sec de période, dans un canal de 25 cm de profondeur. La Figure 6 représente une application de l'approximation en ( $\sigma^6$ ) à l'étude de l'interaction forte d'une onde solitaire de 8 cm d'amplitude et une onde sinusoidale de 1 cm d'amplitude et 0.6 sec de période, dans un canal de 25 cm de profondeur. Les Figures 7 et 8 représentent une application de l'approximation en ( $\sigma^6$ ) au cas-test C proposés par Dingemans et al (1984). Autres exemples seront également présentés.

### 3.2. Complémentarité des différents modèles

Le fait d'avoir à notre disposition des modèles plus performants ne doit pas faire oublier que les modèles plus simples peuvent être, dans certaines conditions, d'une grande utilité, i) pour mieux limiter le domaine ou, ii) pour fournir des conditions initiales et aux limites.

Quelques exemples de complémentarité des différents modèles, des plus simples aux plus sophistiqués seront présentés. Dans la Figure 9 nous comparons les résultats obtenus par l'approximation à l'ordre  $\sigma^6$  pour le cas-test A de Dingemans, avec deux conditions initiales différentes: le repos et la solution de la théorie linéaire.

### 3.3. Modèle K-L

Pour mieux cerner les insuffisances constatées du modèle K-L, nous avons choisi un des cas les plus simples d'application de ce modèle. L'expérience  $E_1$ , effectuée au Delft Hydraulics par Katopodi et al. (1994) dans un tunnel de section transversale rectangulaire (80 cm de hauteur et 30 cm de largeur) à colonne d'eau oscillante (oscillation en masse) présente un écoulement potentiel dont le champ de vitesse peut être donné par,

$$\underline{u} = \underline{u}_c + \underline{u}_w \sin(\omega t).$$

où  $\underline{u}_c$  et  $\underline{u}_w$  représentent respectivement la vitesse du courant et la vitesse orbitale de la houle. La vitesse horizontale  $\underline{u}$  a été mesurée à différents niveaux jusqu'à  $z=20.2$  cm. Plusieurs auteurs ont pris la moyenne temporelle à ce niveau ( $\langle \underline{u}_c \rangle = 21.4$  cm/s) comme valeur de référence du courant pour modéliser les vitesses moyennes aux différents niveaux de la couche limite de fond. Pourtant, vu la largeur du tunnel, ce point est plus influencé par la paroi latérale que par le fond et donc la vitesse expérimentale en question est limitée par une couche limite latérale que le modèle numérique ne prend pas en compte. Si nous considérons l'effet de ce confinement latéral, en prenant comme référence une mesure effectuée à une hauteur inférieure (ou, ce qui revient au même, une vitesse moyenne plus élevée à la hauteur  $z=20.2$  cm),

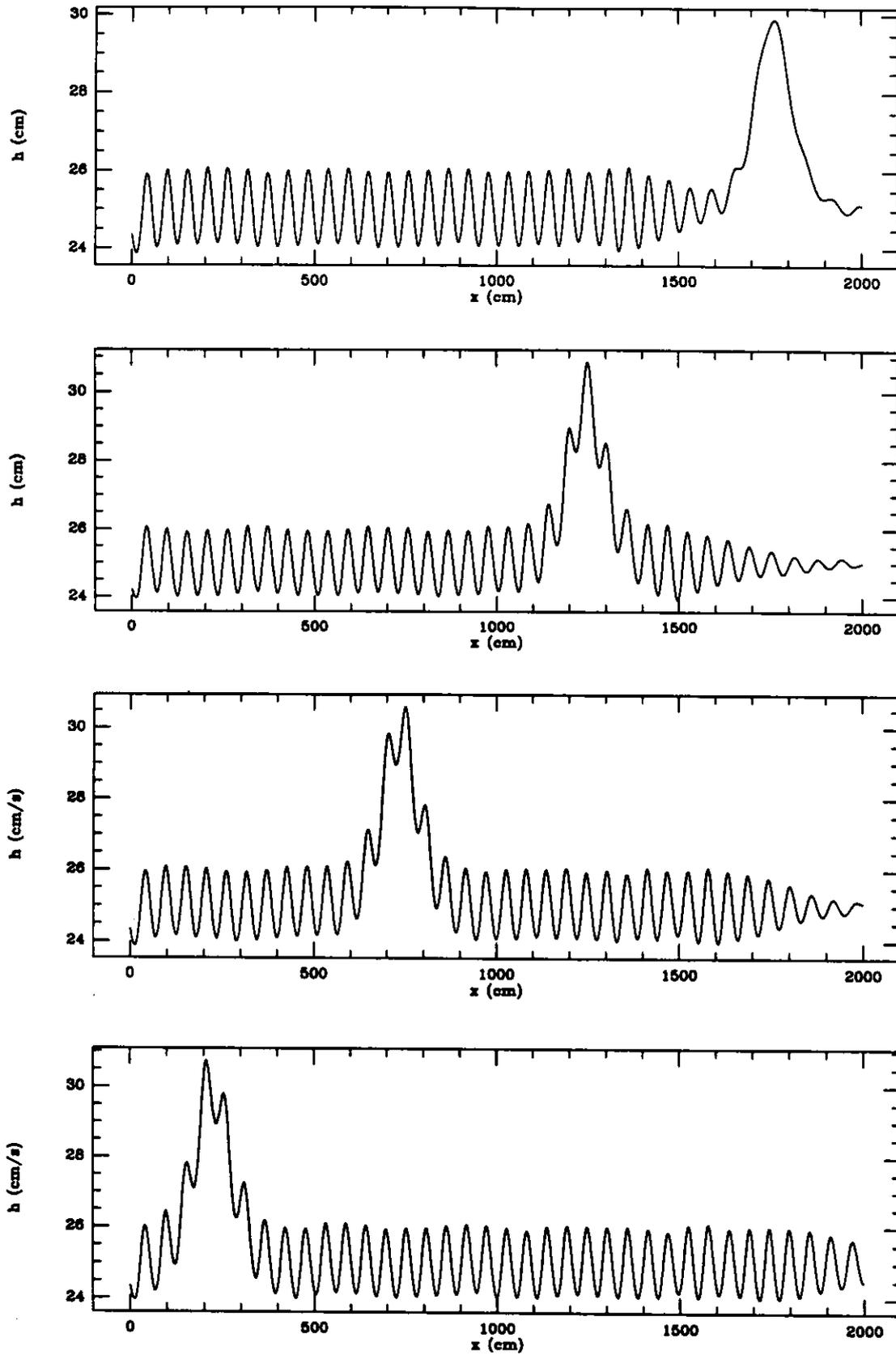


Figure 5 - Interaction faible entre une onde solitaire de 5 cm d'amplitude et une onde sinusoïdale de 1 cm d'amplitude et 0.6 sec de période, dans un canal de 20 m de longueur et 25 cm de profondeur. Approximation à l'ordre  $\sigma^{10}$ .

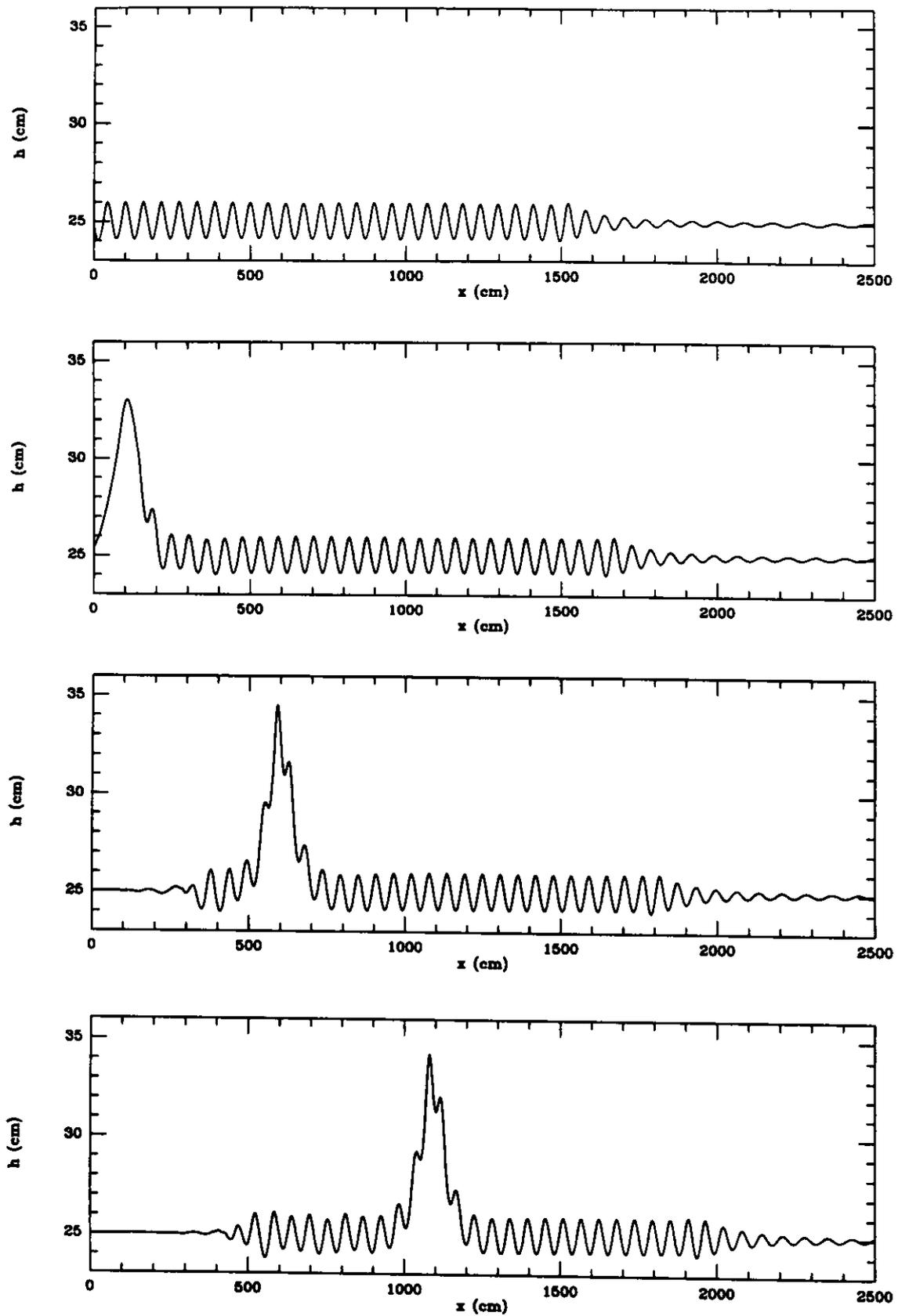


Figure 6 - Interaction forte entre une onde solitaire de 8 cm d'amplitude et une onde sinusoïdale de 1 cm d'amplitude et 0.6 sec de période, dans un canal de 25 m de longueur et 25 cm de profondeur. Approximation à l'ordre  $\sigma^6$ .

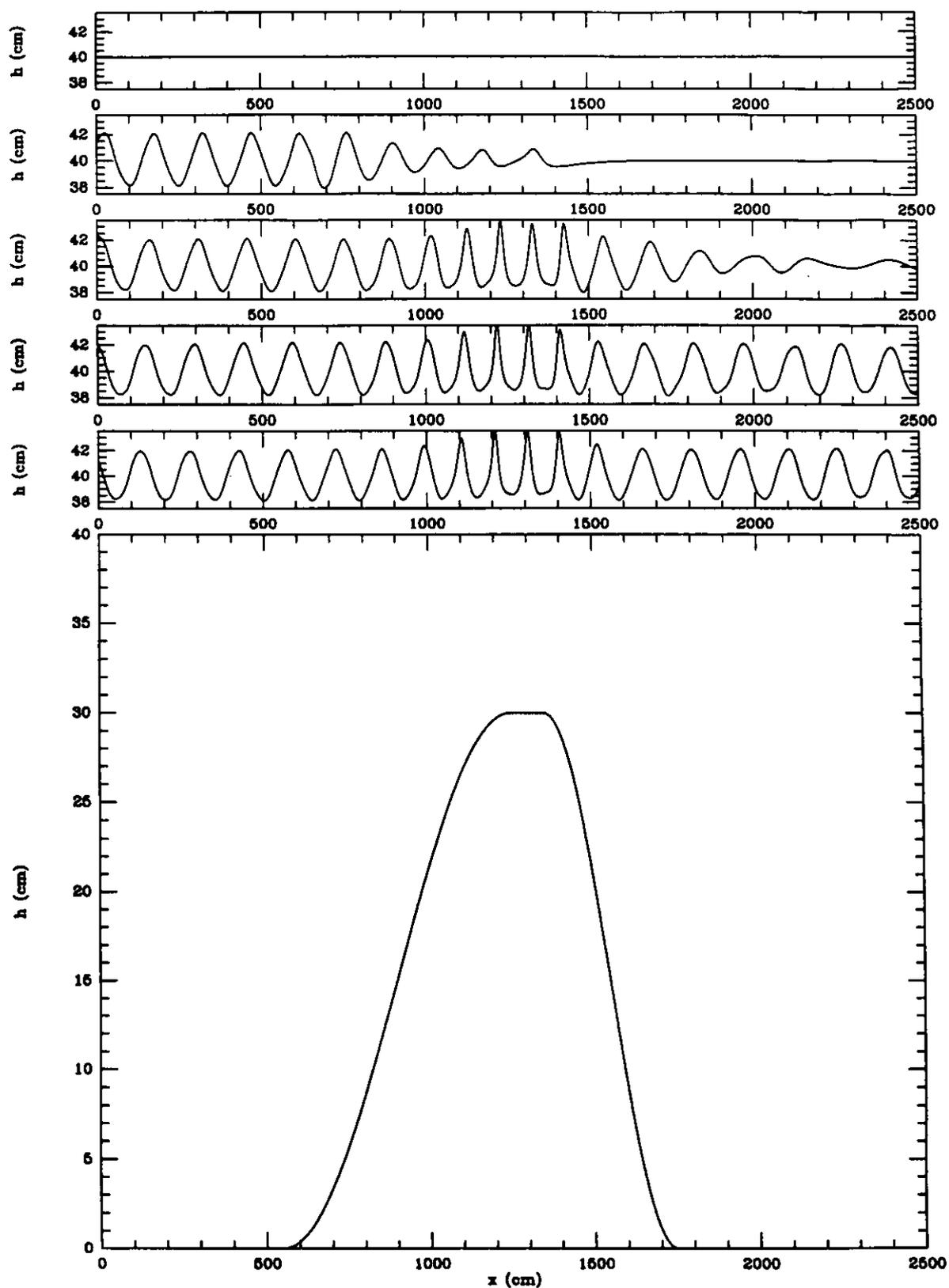


Figure 7 - Propagation d'une onde sinusoidale dans un domaine à profondeur variable.  
 Exemple C proposé par Dingemans. Surface libre aux instants  $t=0$  sec;  $t=10$  sec;  $t=20$  sec;  $t=30$  sec;  $t=40$  sec.  $T=1.01$  sec.  $a=2.05$  cm.  $h_0=40$ cm. Approximation à l'ordre  $\sigma^6$ .

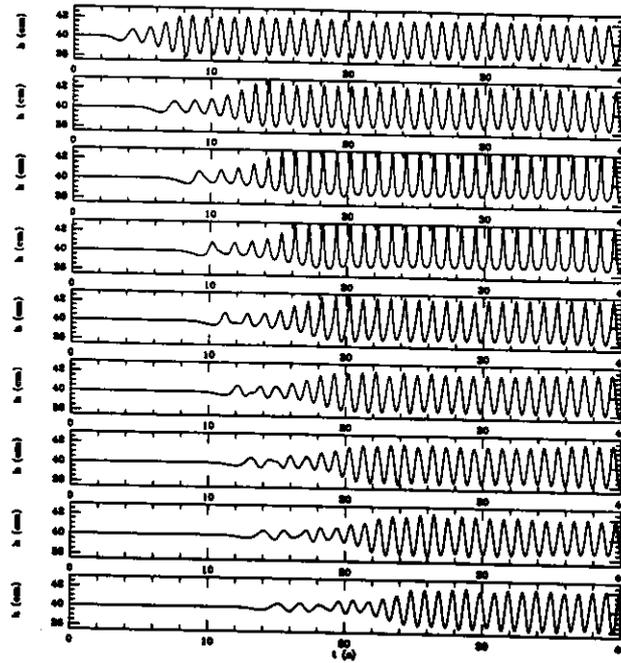


Figure 8 - Propagation d'une onde sinusoidale dans un domaine à profondeur variable. Exemple C proposé par Dingemans. Surface libre aux abscisses  $x=5.70$  m;  $x=10.50$  m;  $x=12.50$  m;  $x=13.50$  m;  $x=14.50$  m;  $x=15.70$  m;  $x=17.30$  m;  $x=19.00$  m;  $x=21.00$  m.  $T=1.01$  sec.  $a=2.05$  cm.  $h_0=40$ cm. Approximation à l'ordre  $\sigma^6$ .

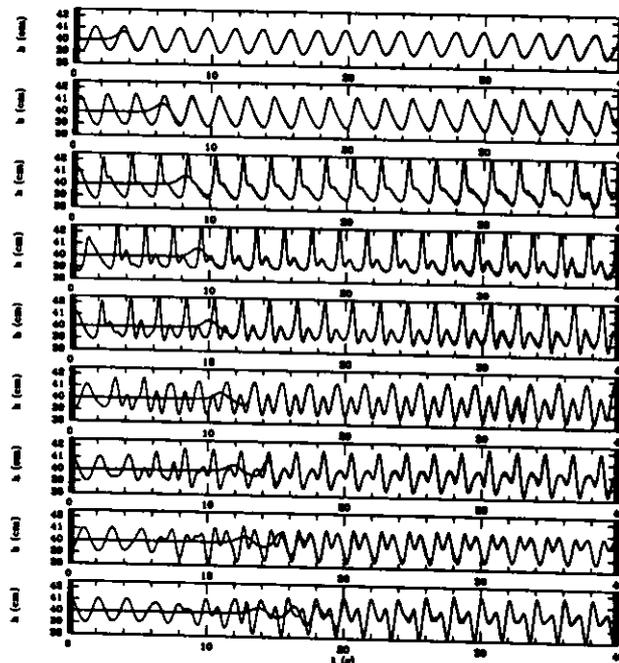


Figure 9 - Propagation d'une onde sinusoidale dans un domaine à profondeur variable. Exemple A proposé par Dingemans.  $x=5.70$  m;  $x=10.50$  m;  $x=12.50$  m;  $x=13.50$  m;  $x=14.50$  m;  $x=15.70$  m;  $x=17.30$  m;  $x=19.00$  m;  $x=21.00$  m.  $T=1.01$  sec.  $a=2.05$  cm.  $h_0=40$ cm. Approximation à l'ordre  $\sigma^6$ . Comparaison des résultats obtenus en considérant deux conditions initiales différentes: le repos et la solution de la théorie linéaire.

l'accord entre les profils numérique et expérimental devient remarquable, comme nous pouvons constater sur la Figure 10.

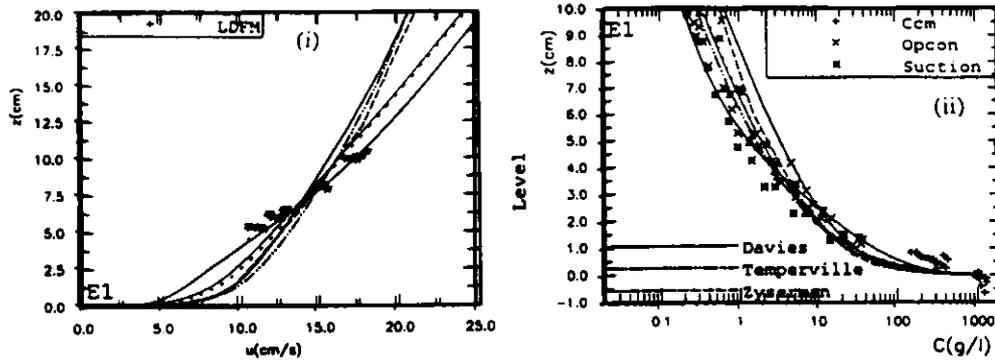


Figure 10 - Profils verticaux des moyennes sur une période de la vitesse horizontale et de la concentration. Exemple  $E_1$  de Katopodi et al. Comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs numériques obtenus par le modèle initial et modifié.

Les profils verticaux de la moyenne temporelle de concentration montrent nettement l'existence de deux régions à caractéristiques différentes du point de vue du transport sédimentaire. Loin de la frontière solide, où les valeurs de la concentration ne dépassent pas un certain seuil, défini par Koelewijn et Ribberink (1996) de l'ordre de 25 g/l, le transport est fait en suspension et le modèle suit les profils expérimentaux. Au voisinage de la paroi, la concentration augmente brusquement et peut atteindre des valeurs de plusieurs centaines de grammes par litre. Le transport est dit en régime de "sheet flow". Il n'est pas étonnant que des différences d'un ordre de grandeur existent par rapport aux valeurs mesurées, puisque le modèle ne rend que les effets de transport en suspension. Cependant, la prise en compte d'une vitesse de chute variable en fonction de la concentration locale, donnée par l'expression,

$$w_s = w_0(1 - C)^\alpha$$

permet d'approcher les valeurs expérimentales. Bien que la moyenne temporelle de la courbe de concentration au faibles hauteurs ne soit pas bien représentée (et donc non plus la composante du transport en suspension due au mouvement moyen,  $\langle u \rangle \langle C \rangle$ , comme on le constate sur les Figures 10 et 11), les valeurs maximum de l'onde de concentration sont correctes (Figure 11). Nous utilisons ici  $w_0=2.6\text{cm/s}$  et  $\alpha=3.8$ . Étant donné que près du fond la phase des pics de concentration et des vitesses absolues est pratiquement la même, la composante du transport en suspension due au mouvement oscillatoire,  $\langle u_w C_w \rangle$ , peut être donc convenablement représenté, même si la courbe numérique est par ailleurs moins bonne. Nous constatons également dans cet exemple, que l'addition des valeurs calculées de transport en suspension (donnée par le modèle)

et de transport en charriage (donnée par l'expression de Meyer-Peter et Muller) est remarquablement proche de la valeur globale mesurée.

Aux niveaux supérieurs de la couche limite, un déphasage subsiste entre les valeurs numériques et expérimentales des courbes d'évolution temporelle de la concentration. Ceci semble être dû à une sur-estimation numérique de la diffusion des sédiments vers le haut. Après plusieurs tests, nous sommes persuadés que la correction doit être considérée au niveau du coefficient empirique  $\underline{A}$  des termes de diffusion de l'équations de  $\underline{K}$ . En effet, la calibration empirique de ce coefficient effectuée par Lewellen a été basée sur des exemples d'écoulements permanents. Une autre valeur, plus faible, pourrait être justifiée dans le cas d'écoulements oscillatoires. Ceci entraîne, cependant, une diminution des valeurs de la concentration surtout aux niveaux les plus élevés, ce qui semble être lié à une diminution exagérée de la diffusivité turbulente à ces niveaux, et pourrait être compensée par une modification du coefficient empirique  $\underline{B}$  des équations de  $\underline{\gamma}$  et de  $\underline{\Omega}$ . En tout état de cause, et quoiqu'une justification plus consistante soit nécessaire, nous avons effectué ici cette correction en modifiant la vitesse de chute, qui reste donnée par la même expression ou  $\underline{w}_0$  et  $\underline{\alpha}$  prennent maintenant respectivement les valeurs 0.9cm/s et -1. Nous obtenons un accord de phase et d'amplitude remarquable avec les points expérimentaux, à tous les niveaux de la couche limite (Figure 11).

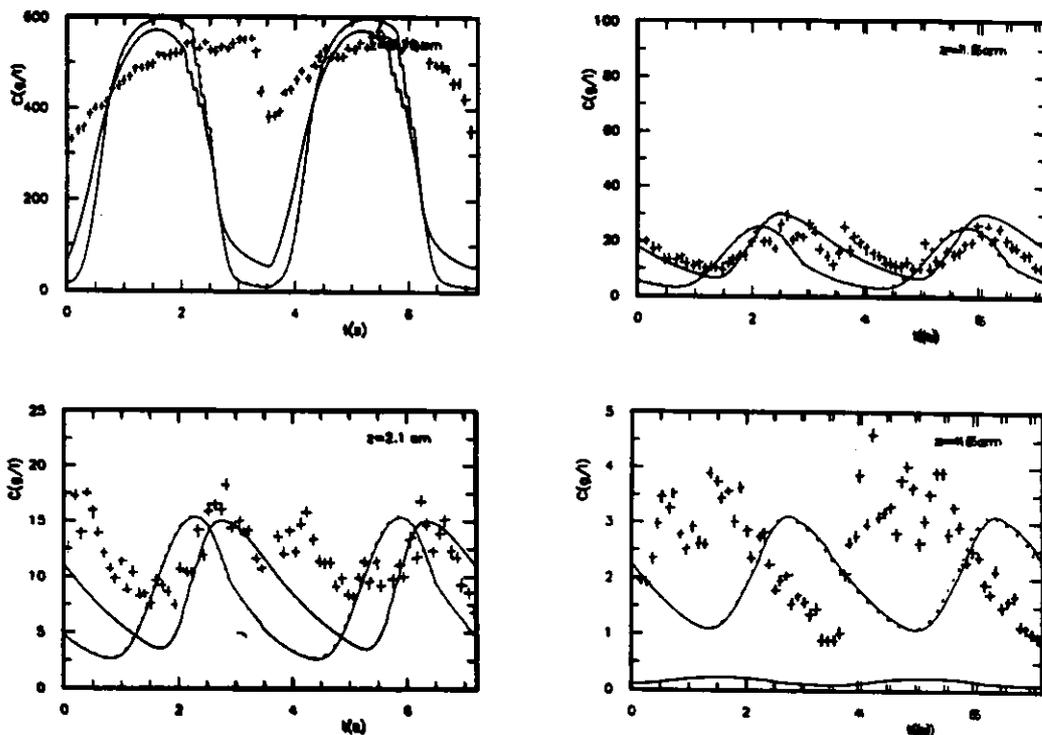


Figure 11 - Variation temporelle de la concentration à quatre niveaux différents à l'intérieur de la couche limite. Exemple  $C_{10}$  de Katopodi et al. Comparaison entre les valeurs expérimentales et les valeurs numériques obtenus par le modèle initial et modifié.

#### 4. Exemples

L'ensemble des modèles présentés constitue un outil qui peut être utilisé dans son ensemble pour l'étude de cas réels dont nous présenterons quelques exemples.

#### 5. Bibliographie

Berkhoff, J.C.W., 1972. Computation of combined refraction-diffraction. Proc. Int. Coastal Eng. Conf., Vancouver, 471-490.

Carmo, J. A., F. Seabra-Santos et E. Barthélemy, 1993 - Surface waves propagation in shallow water: a finite element model. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 16, 447-459.

Antunes do Carmo, J.S., et Seabra-Santos, F.J. 1996 - On breaking waves and wave-current interaction in shallow water: a 2DH finite element model. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 22: 429-444.

Dingemans M.W., Stive M.J.F., Kuik A.J., Radder A.C. et Booij N., 1984 - Field and laboratory verification of the wave propagation model CREDIZ. Proc. Int. Coastal Eng. Conf., Houston, 1178 - 1191.

Katopodi, I., Ribberink, J.S., Roul, P., Koelewijn, C., Lodahl, C., Longo, S., Crossato, A. Wallace, H., 1994 - Intra-wave sediment transport in an oscillatory flow superimposed on a mean current. Report H1684, Part III, Data Report. Delft Hydraulics.

Koelewijn, C. et Ribberink, J.S., 1996 - Data Report. Delft Hydraulics.

Kirby J.T. et Dalrymple R.A., 1983 - A parabolic equation for the combined refraction-diffraction of Stokes by mildly varying topography. J. Fluid Mec., Vol.136,453- 466

Lewellen, W.S., 1977 - Use of invariant modeling. In FROST W. (Ed.). Handbook of Turbulence, Vol. 1. Plenum Publishing Corp., pp 237-280.

Liu P., F. et Tsay T., K., 1984 - Refraction-diffraction model for weakly nonlinear water waves. J. Fluid Mech., Vol. 141, 265-274.

Madsen A., Sorensen O.L. et Schaffer, H.A., 1992 - Nonlinear transformation of irregular waves in shallow water. Proc. 23rd Int. Coastal Eng. Conf., Venice, 460 - 473.

Ohnaka, S. et Watanabe, A., 1990 - Modeling of wave-current interaction and beach change. Proc. 22nd Int. Coastal Eng. Conf., Delft, 2443 - 2456.

Okey Nwogu (1993) - Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation. J. waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., 119, No 6. 618 - 638.

Radder, A.C., 1979 - On the parabolic equation method for water-wave propagation. J. Fluid Mech., Vol. 95,1,159-176.

Schroter, A., Mayerle, R. et Zielke, W., 1994 - Optimized dispersion characteristics of the Boussinesq wave equation. International Symposium: Waves - Physical and Numerical Modelling. Vancouver. 416-425.

Seabra-Santos, F.J., 1994 - Modified Boussinesq equations for deep and shallow water monochromatic waves. Modelling of Coastal and Estuarine Processes. Proceedings of the Sémin. de Modélisation en Hydraulique Maritime, Coimbra, 11-13 July. ISSN 0870-5011. 163-172.

Seabra Santos, F. J., Renouard, D.P. et Temperville A., 1988 - Etude théorique et expérimentale des domaines de validité des théories d'évolution des ondes en eau peu profonde. Ann. Geophysicae, 6, (6), 671 - 680.

Sheng, P. et Villaret, C., 1989 - Modeling the effect of suspended sediment stratification on bottom exchange processes. J. Geoph. Res. 94 (C10), 14.429-14.444.

Tran Thu, T., 1995 - Modélisation numérique de l'interaction houle-courant-sédiment. Thèse. Université Joseph Fourier, Grenoble, France.

Tran Thu, T. et Temperville, A., 1994 - Numerical model of sediment transport in the wave-current interaction. Modelling of Coastal and Estuarine Processes. Proc. of the Sémin. de Modélisation en Hydraulique Maritime, Coimbra, 11-13 July. ISSN 0870-5011. 271-282.

Watanabe, A. et Maruyama, K., 1986 - Numerical modeling of nearshore wave field under combined refraction, diffraction and breaking. Coastal Eng. in Japan, Vol. 29, 19 - 39.

Watanabe, A., et Dibajnia, M., 1988 - A numerical model of wave deformation in surf zone. Proc. 21st Int. Coastal Eng. Conf., Malaga, 578 - 587.