

ONDES SOLITAIRES INTERNES CARACTERISEES PAR DES  
OSCILLATIONS A L'INFINI

F. DIAS <sup>1</sup> & A. IL'ICHEV <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institut Non-Linéaire de Nice  
UMR 129 - CNRS & UNSA  
1361 route des Lucioles, 06560 Valbonne, FRANCE

<sup>2</sup> Steklov Mathematical Institute  
Russian Academy of Sciences  
Vavilova 42, 117333, Moscow, RUSSIE

Résumé

Nous considérons ici des ondes solitaires *non-locales* caractérisées par des oscillations à l'infini. De telles ondes peuvent se développer au sein d'un fluide continûment stratifié. Nous considérons ici le cas le plus simple de fluide stratifié, à savoir le cas de deux fluides superposés. Le fluide du bas est délimité par un fond plat tandis que le fluide du haut est délimité par une surface libre. L'origine des ondes solitaires non-locales peut se comprendre facilement d'un point de vue physique. La relation de dispersion pour le système décrit plus haut montre que des ondes courtes peuvent se propager à la même vitesse qu'une onde solitaire. L'interaction entre l'onde solitaire et les ondes courtes produit une onde solitaire non-locale. Deux techniques sont proposées pour étudier de telles ondes: une méthode de perturbation classique et une méthode de réduction à la variété centrale.

Summary

We consider *nonlocal* solitary waves, which are characterized by oscillations at infinity. Such waves can propagate inside a continuously stratified fluid. We consider here the simplest case of a stratified fluid: the case of two superimposed fluids. The bottom fluid is bounded below by a flat bottom while the upper fluid is bounded above by a free surface. The origin of these nonlocal solitary waves can be easily understood from a physical point of view. The dispersion relation for the above system shows that short waves can propagate at the same speed as a solitary wave. The interaction between the solitary wave and the short waves creates a nonlocal solitary wave. Two techniques are presented for the study of such waves: a classical perturbation method and a center manifold reduction method.

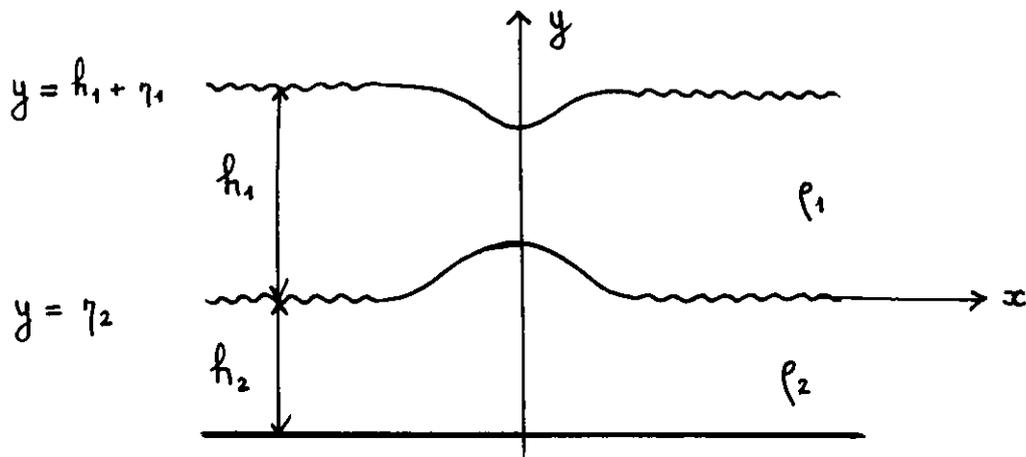


Figure 1: Géométrie du problème

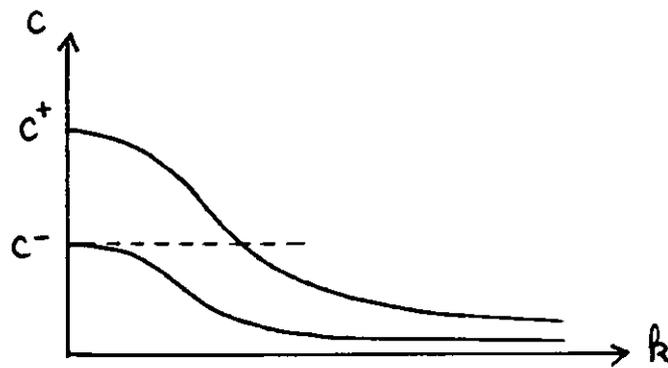


Figure 2: Relation de dispersion.

## 1 Introduction

Le problème considéré est celui de la propagation d'ondes solitaires à l'interface entre deux fluides de densités différentes en présence d'une surface libre. La géométrie du problème est montrée sur la figure 1.

De telles ondes ont été étudiées par Kakutani & Yamasaki [1978]. Elles constituent une extension naturelle des ondes solitaires de surface ou des ondes solitaires interfaciales en présence d'un toit rigide. Kakutani & Yamasaki considèrent deux types de solutions sous la forme d'ondes solitaires (les modes rapides et les modes lents). Cette distinction se comprend facilement en observant la relation de dispersion pour les ondes infinitésimales correspondant à la géométrie de la figure 1. Cette relation de dispersion est représentée sur la figure 2.

Les ondes solitaires correspondant au mode rapide ont été calculées numériquement par Moni & King [1995]. Moni & King ont essayé de calculer également des ondes solitaires correspondant au mode lent mais n'y sont pas arrivés. En fait il y a une différence essentielle entre l'analyse du mode rapide et l'analyse du mode lent, qui est beaucoup plus délicate. Les ondes solitaires correspondant au mode lent sont en fait des ondes solitaires généralisées, caractérisées par des oscillations de faible amplitude à l'infini en plus de la bosse principale (voir l'étude de Sun & Shen [1993]). La raison en est que lorsque la vitesse est proche de  $c^-$  il y a un mode périodique de nombre d'onde  $k \neq 0$  qui satisfait également la relation de dispersion (en plus du mode long  $k = 0$ ). Un phénomène de résonance apparaît entre ces deux modes. Ce phénomène se produit également pour les ondes de capillarité-gravité lorsque le nombre de Bond est suffisamment petit mais non nul. Il apparaît aussi dans l'étude des ondes au sein d'un fluide continûment stratifié (Akylas

& Grimshaw [1992]). C'est un phénomène délicat à analyser et les articles physiques ou mathématiques traitant de ce problème se sont multipliés dans les cinq dernières années (Vanden-Broeck [1991], Beale [1991], Sun [1991], Lombardi [1992], Iooss & Kirchgässner [1993] pour ne parler que du problème des ondes de surface). Le résultat essentiel est que les ondes solitaires "classiques," comme celles calculées par Kakutani & Yamasaki, ne sont pas solutions du problème.

## 2 Formulation du problème

Nous considérons la propagation d'ondes de gravité à l'interface entre deux couches horizontales de fluides parfaits de densités constantes  $\rho_1$  et  $\rho_2$  et de hauteur moyenne  $h_1$  et  $h_2$ . On suppose que l'écoulement est irrotationnel dans chaque couche. Nous introduisons le potentiel des vitesses  $\varphi_i^*$  dans chacune des couches. On dénote les quantités physiques relatives à la couche inférieure (resp. supérieure) par l'index 2 (resp. 1). Les coordonnées sont  $x^*$  selon l'horizontale et  $y^*$  selon la verticale. La surface libre au repos est décrite par  $y^* = h_1$  tandis que l'interface au repos est décrite par  $y^* = 0$ . L'onde de surface est décrite par  $y^* = h_1 + \eta_1^*(x, t)$  tandis que l'onde interfaciale est décrite par  $y^* = \eta_2^*(x, t)$ . Les composantes du vecteur vitesse sont notées  $u_i^*$  et  $v_i^*$ ,  $i = 1, 2$ .

Les équations du problème sont

$$\begin{aligned}
 0 &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} \right) \varphi_i^*, \quad i = 1, 2, \quad -h_2 < y^* < h_1 + \eta_1^* \\
 0 &= \frac{\partial \eta_1^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \eta_1^*}{\partial x^*} \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial x^*} - \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial y^*}, \quad y^* = h_1 + \eta_1^* \\
 0 &= \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial t^*} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial y^*} \right)^2 \right] + g\eta_1^*, \quad y^* = h_1 + \eta_1^* \\
 0 &= \frac{\partial \eta_2^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \eta_2^*}{\partial x^*} \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial x^*} - \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial y^*}, \quad i = 1, 2, \quad y^* = \eta_2^* \\
 0 &= \rho_1 \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial t^*} - \rho_2 \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial t^*} + \frac{1}{2} \rho_1 \left[ \left( \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial y^*} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \rho_2 \left[ \left( \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial x^*} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial y^*} \right)^2 \right] \\
 &\quad + (\rho_1 - \rho_2)g\eta_2^*, \quad y^* = \eta_2^* \\
 0 &= \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial y^*}, \quad y^* = -h_2.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Les paramètres physiques du problème sont le rapport des densités  $R$ , l'inverse du carré du nombre de Froude  $\lambda$  et le rapport des épaisseurs  $H$  définis par

$$R = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \lambda = \frac{gh_2}{c^2}, \quad H = \frac{h_1}{h_2}. \tag{2.2}$$

La relation de dispersion pour de telles ondes s'écrit

$$(1 + R \operatorname{th} k h_1 \operatorname{th} k h_2) c^4 - \frac{g}{k} (\operatorname{th} k h_1 + \operatorname{th} k h_2) c^2 + \frac{g^2}{k^2} (1 - R) \operatorname{th} k h_1 \operatorname{th} k h_2 = 0.$$

### 3 Méthode de perturbation classique

#### 3.1 Dérivation d'équations modèles du type Korteweg–de Vries

Nous introduisons les variables adimensionnelles suivantes:

$$x = \frac{x^*}{L}, \quad \eta_i = \frac{\eta_i^*}{a}, \quad y = \frac{y^*}{h_2}, \quad t = \frac{\sqrt{gh_2}}{L} t^*, \quad \varphi = \frac{\sqrt{gh_2}}{gaL} \varphi^*, \quad V = \frac{c}{\sqrt{gh_2}},$$

où  $a$  est l'amplitude de l'onde interfaciale et  $L$  une longueur caractéristique. Nous introduisons également les petits paramètres

$$\varepsilon = \frac{a}{h_2}, \quad \mu = \left(\frac{h_2}{L}\right)^2.$$

Les équations écrites en variables adimensionnelles deviennent

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi_i, \quad i = 1, 2, \quad -1 < y < H + \varepsilon \eta_1 \\ 0 &= \frac{\partial \eta_1}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \quad y = H + \varepsilon \eta_1 \\ 0 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 \right] + \eta_1, \quad y = H + \varepsilon \eta_1 \\ 0 &= \frac{\partial \eta_2}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \eta_2}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}, \quad i = 1, 2, \quad y = \varepsilon \eta_2 \\ 0 &= R \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{\varepsilon R}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{\varepsilon}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right)^2 \right] \\ &\quad - (1 - R) \eta_2, \quad y = \varepsilon \eta_2 \\ 0 &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \quad y = -1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Nous faisons l'hypothèse que

$$\varepsilon, \mu \ll 1.$$

La relation de dispersion possède deux branches, qui correspondent aux modes rapide (surface) et lent (interfacial). Les vitesses de phase correspondant au nombre d'onde  $k = 0$  sont données par les racines de l'équation

$$V_{\pm}^4 - (1 + H)V_{\pm}^2 + H(1 - R) = 0. \quad (3.2)$$

Nous remarquons que  $V_+$ , la racine la plus grande de (3.2), satisfait  $V_+ > 1$  et  $V_+^2 > H$  tandis que  $V_-$  satisfait  $V_- < 1$  et  $V_-^2 < H$ . Le mode interfacial (correspondant à la branche  $V_-$ ) entre en résonance avec le mode de surface de nombre d'onde  $k$ . Nous devrions donc nous attendre à des ondes solitaires généralisées avec une queue oscillante comme solution de (3.1). Ce comportement est le même que pour les fluides stratifiés de façon continue avec un toit rigide en haut (interaction entre le premier et le second modes).

Pour obtenir les équations modèles valables pour les ondes longues de faible amplitude, nous développons les potentiels  $\varphi_i$  au voisinage du point  $y = 0$ :

$$\varphi_i = \varphi_i^0 + y \varphi_{i,y}^0 + \frac{1}{2} y^2 \varphi_{i,yy}^0 + \frac{1}{6} y^3 \varphi_{i,yyy}^0 + \frac{1}{24} y^4 \varphi_{i,yyyy}^0 + \frac{1}{120} y^5 \varphi_{i,yyyyy}^0 + \dots \quad (3.3)$$

L'indice  $y$  dénote les dérivées par rapport à  $y$ . A partir des premières équations de (3.1), nous obtenons

$$\varphi_{i,yy}^0 = -\mu\varphi_{i,xx}^0, \quad \varphi_{i,yyy}^0 = -\mu(\varphi_{i,y}^0)_{xx}, \quad \varphi_{i,yyyy}^0 = \mu^2\varphi_{i,xxxx}^0, \quad \varphi_{i,yyyyy}^0 = \mu^2(\varphi_{i,y}^0)_{xxxx}.$$

En utilisant la dernière équation de (3.1), nous obtenons l'expression pour  $\varphi_{2,y}^0$ . En utilisant (3.3) et en développant en puissances de  $\mu$  jusqu'à l'ordre 3, nous obtenons l'expression suivante pour  $\varphi_{2,y}^0$ :

$$\varphi_{2,y}^0 = -\mu\varphi_{2,xx}^0 - \frac{1}{3}\mu^2\varphi_{2,xxxx}^0. \quad (3.4)$$

Puis en utilisant (3.3) ainsi que la seconde équation de (3.1), et en appliquant la même procédure, nous obtenons l'expression suivante pour  $\varphi_{1,y}^0$ , valable jusqu'à l'ordre 2 en  $\mu$  et  $\varepsilon$ :

$$\varphi_{1,y}^0 = \mu\eta_{1,t} + H\mu\varphi_{1,xx}^0 + \mu\varepsilon[\eta_1\varphi_{1,x}^0]_x + \frac{1}{2}\mu^2H^2\eta_{1,txx} + \frac{1}{3}\mu^2H^3\varphi_{1,xxxx}^0. \quad (3.5)$$

Puis en substituant les relations (3.4) et (3.5) dans les troisième, quatrième (pour  $i = 1, 2$ ) et cinquième équations de (3.1), et en négligeant les termes d'ordre supérieur, nous obtenons (après suppression de l'indice  $^0$ )

$$\begin{aligned} 0 &= \eta_{2,t} + \varepsilon\eta_{2,x}\varphi_{2,x} + \varepsilon\eta_2\varphi_{2,xx} + \varphi_{2,xx} + \frac{1}{3}\mu\varphi_{2,xxxx} \\ 0 &= R\varphi_{1,t} - \varphi_{2,t} + \frac{1}{2}\varepsilon R(\varphi_{1,x})^2 - \frac{1}{2}\varepsilon(\varphi_{2,x})^2 - (1-R)\eta_2 \\ 0 &= \eta_{1,t} - \eta_{2,t} + \varepsilon[\eta_1\varphi_{1,x}]_x + H\varphi_{1,xx} - \varepsilon[\eta_2\varphi_{1,x}]_x + \frac{1}{2}\mu H^2\eta_{1,txx} + \frac{1}{3}\mu H^3\varphi_{1,xxxx} \\ 0 &= \varphi_{1,t} + \mu H\eta_{1,t} + \frac{1}{2}\mu H^2\varphi_{1,txx} + \frac{1}{2}\varepsilon\varphi_{1,x}^2 + \eta_1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Nous recherchons des solutions de (3.6) de type onde progressive, qui dépendent seulement de  $\xi = x - Vt$ , où  $V$  est la vitesse de phase de l'onde progressive. En effectuant ce changement de variables, puis en intégrant la première et la troisième équations de (3.6) et finalement en éliminant  $\eta_i$ , on obtient jusqu'aux termes d'ordre  $O(\mu, \varepsilon)$

$$\begin{aligned} \mu\ddot{u}_1 &= \frac{1}{\kappa(1-R)} \left\{ [V^2 - (1-R)H]u_1 - V^2u_2 - \frac{3}{2}\varepsilon V u_1^2 + \frac{1}{2}\varepsilon V u_2^2 + \varepsilon V u_1 u_2 \right\} \\ \mu\ddot{u}_2 &= \frac{1}{1-R} \left\{ -3RV^2u_1 + 3[V^2 - (1-R)]u_2 + \frac{3}{2}\varepsilon R V u_1^2 - \frac{9}{2}\varepsilon V u_2^2 + 3R\varepsilon V u_1 u_2 \right\}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

où le point dénote la différentiation par rapport à  $\xi$ ,  $u_i = \dot{\varphi}_i$  les vitesses correspondantes et  $\kappa = H(V^4 - HV^2 + H^2/3)$ . Les profils de la surface libre et de l'interface sont donnés par

$$\begin{aligned} \eta_1 &= V u_1 - \mu V H (V^2 - \frac{1}{2}H) \ddot{u}_1 - \frac{1}{2}\varepsilon u_1^2 \\ \eta_2 &= \frac{1}{1-R} \left( -R V u_1 + V u_2 + \frac{1}{2}\varepsilon R u_1^2 - \frac{1}{2}\varepsilon u_2^2 \right). \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables suivant:

$$\xi \rightarrow \sqrt{(1-R)\mu}\xi, \quad u_i \rightarrow \varepsilon u_i, \quad i = 1, 2,$$

nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 &= \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 - \frac{3}{2\kappa} V u_1^2 + \frac{V}{2\kappa} u_2^2 + \frac{V}{\kappa} u_1 u_2 \\ \ddot{u}_2 &= \alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2 + \frac{3}{2} V R u_1^2 - \frac{9}{2} V u_2^2 + 3R V u_1 u_2, \end{aligned} \quad (3.8)$$

où

$$\alpha_1 = -3RV^2, \quad \alpha_2 = -3[V^2 - (1-R)], \quad \gamma_1 = \frac{V^2 - H(1-R)}{\kappa}, \quad \gamma_2 = -\frac{V^2}{\kappa}.$$

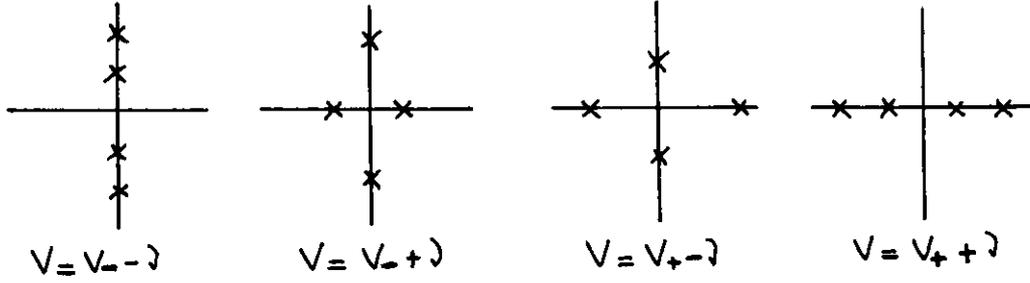


Figure 3: Comportement des valeurs propres du système (3.8)

### 3.2 Analyse du système (3.8)

Nous considérons les solutions du système (3.8) dans le cas particulier où  $V = V_- + \nu$ , avec  $\nu$  petit et positif. Dans le cas particulier où  $V = V_+ + \nu$ , de "vraies" ondes solitaires existent. On peut réécrire le système d'équations (3.8) sous la forme d'un système dynamique

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathcal{A}\mathbf{w} + F(\nu, \mathbf{w}), \quad (3.9)$$

où  $\mathbf{w} = \{u_1, u_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2\}^t$  et  $F(0, 0) = 0$ ,  $\partial_{\mathbf{w}}F(0, 0) = 0$ . La matrice  $\mathcal{A}$  est donnée par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres  $\sigma$  de  $\mathcal{A}$  satisfont

$$\sigma^4 + (\alpha_2 - \gamma_1)\sigma^2 - \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1 = 0. \quad (3.10)$$

L'égalité  $\gamma_1\alpha_2 + \gamma_2\alpha_1 = 0$  redonne l'équation (3.2) pour  $V_{\pm}$ . Etudions maintenant le coefficient de  $\sigma^2$ . Il est facile de montrer que le coefficient de  $\sigma^2$  est positif quand  $V = V_-$  et négatif quand  $V = V_+$ . Par conséquent, au voisinage de  $V = V_+$  il y a de "vraies" ondes solitaires tandis qu'au voisinage de  $V_-$  (c'est-à-dire le cas que nous considérons) il y a des ondes solitaires généralisées. Les ondes solitaires ainsi que les ondes solitaires généralisées existent pour  $\nu > 0$ . Le comportement des valeurs propres au voisinage de  $V_{\pm}$  est résumé dans la figure 3.

Dorénavant  $V = V_- + \nu$ . Introduisons l'ansatz

$$\mathbf{w} = a_0\phi_0 + a_1\phi_1 + a_+\phi_+ + a_-\phi_-, \quad a_+ = \bar{a}_-, \quad \phi_+ = \bar{\phi}_-$$

où  $\mathcal{A}\phi_0 = 0$ ,  $\mathcal{A}\phi_1 = \phi_0$ ,  $\mathcal{A}\phi_{\pm} = ik\phi_{\pm}$ , avec

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\gamma_1/\gamma_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\gamma_1/\gamma_2 \end{pmatrix}, \quad \phi_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha_2/\gamma_2 \\ ik \\ -ik\alpha_2/\gamma_2 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres généralisés de l'adjoint  $\mathcal{A}^*$  sont

$$\psi_1 = \frac{\alpha_2}{k^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\gamma_1/\alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \psi_0 = \frac{\alpha_2}{k^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\gamma_1/\alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{\pm} = -\frac{\gamma_1}{2k^3} \begin{pmatrix} k \\ -k\alpha_2/\alpha_1 \\ i \\ -i\alpha_2/\alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Les vitesses sont données par les expressions

$$u_1 = a_0 + a_+ + a_-, \quad u_2 = -\frac{\gamma_1}{\gamma_2}a_0 - \frac{\alpha_2}{\gamma_2}(a_+ + a_-).$$

Les amplitudes satisfont le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \dot{a}_0 &= a_1, \\ \dot{a}_1 &= c_0\nu a_0 - c_1 a_0^2 + \dots, \\ \dot{a}_+ &= ika_+ + F(a_0, a_+, a_-), \end{cases} \quad (3.11)$$

où les coefficients positifs  $c_0$  et  $c_1$  s'expriment en fonction des paramètres physiques du problème. Pour une valeur de  $\nu$  fixée (c'est-à-dire pour une vitesse  $V$  donnée légèrement plus grande que  $V_-$ ) le système (3.11) admet une famille à un paramètre d'ondes solitaires généralisées, le paramètre étant par exemple l'amplitude des oscillations dans la queue. La question est de savoir quelles sont les valeurs permises pour l'amplitude des oscillations. L'amplitude peut augmenter jusqu'à ce que l'onde solitaire devienne une onde périodique. De l'autre côté, l'amplitude des oscillations peut-elle s'annuler? La réponse est non. Les étapes principales de la démonstration suivent.

On peut décomposer la nonlinéarité  $F$  comme suit:

$$F = F_s(a_0) + F_z(a_0, a_+, a_-),$$

où

$$F_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ [\gamma_1(\nu) - \gamma_1\gamma_2(\nu)/\gamma_2]a_0 + V_-/\kappa(\nu)[-3/2 - \gamma_1/\gamma_2 + 1/2\gamma_1^2/\gamma_2^2]a_0^2 \\ [\alpha_1(\nu) + \gamma_1/\gamma_2\alpha_2(\nu)]a_0 + V_-[3/2R - 1/2k\gamma_1^2/\gamma_2^2 - 3R\gamma_1/\gamma_2]a_0^2 \end{pmatrix}$$

et  $F_z(a_0, 0, 0) = 0$ . A l'ordre dominant, on trouve que

$$a_0 = \frac{3c_0}{2c_1} \nu \cosh^{-2}(\sqrt{c_0\nu\xi}).$$

Le fait que  $a_+$  ne soit pas nul et qu'il y ait donc des oscillations à l'infini vient de la présence de la composante  $F_s$  dans la nonlinéarité. On peut trouver l'amplitude des oscillations à l'infini de la façon suivante. Prenons la transformée de Fourier de la dernière équation de (3.11) et calculons-la de façon asymptotique par la théorie des résidus. Prenons ensuite la transformée de Fourier inverse. Après quelques calculs, nous trouvons que

$$a_+ = C \exp\left(\frac{-\pi k}{2\sqrt{c_0\nu}}\right) \exp(ik\xi). \quad (3.12)$$

L'amplitude des plus petites oscillations est donc exponentiellement petite. Cependant, l'amplitude de ces plus petites oscillations augmente avec la vitesse des ondes solitaires. Pour des vitesses plus élevées, nos équations modèles ne sont plus valables et il faut recourir à une intégration numérique des équations d'Euler. Nous ne l'avons pas encore fait.

Si la constante  $C$  est nulle, il se peut que les oscillations disparaissent. Pour cela regardons la partie source de la nonlinéarité  $F_s$ . Les oscillations disparaissent lorsque  $\langle F_s, \psi_+ \rangle = 0$ , où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dénote le produit scalaire dans  $\mathbf{C}^4$ . Ce produit scalaire donne

$$\langle F_s, \psi_+ \rangle = -\frac{i\gamma_1}{2k^3} \left\{ \left[ -r_1(\nu) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}r_2(\nu) \right] a_0 + \left[ -s_1(\nu) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}s_2(\nu) \right] a_0^2 \right\}, \quad (3.13)$$

où

$$r_1(\nu) = \left( \gamma_1(\nu) - \frac{\gamma_1 \gamma_2(\nu)}{\gamma_2} \right), \quad s_1(\nu) = \frac{V_-}{\kappa(\nu)} \left( -\frac{3}{2} + \frac{\gamma_1^2}{2\gamma_2^2} - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right),$$

$$r_2(\nu) = \alpha_1(\nu) + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \alpha_2(\nu), \quad s_2(\nu) = V_- \left( \frac{3}{2} R - \frac{9}{2} \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} - 3R \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \right).$$

Les “vraies” ondes solitaires existeront (c’est-à-dire  $a_+ = 0$  sera solution du problème) lorsque les coefficients de  $a_0$  et  $a_0^2$  dans (3.13) seront égaux à zéro. Plus précisément, si pour  $\nu$  suffisamment petit, il y a des valeurs des paramètres  $R$  et  $H$  qui annulent les coefficients de  $a_0$  et  $a_0^2$ , alors la queue oscillante disparaît et on obtient une “vraie” onde solitaire. Des calculs préliminaires semblent indiquer que ce n’est jamais le cas.

## 4 Méthode de réduction à la variété centrale

On peut également utiliser le théorème de réduction à la variété centrale pour obtenir les ondes solitaires généralisées. Cette méthode est plus rigoureuse que la précédente mais elle est plus lourde. Par ailleurs, on ne peut la justifier à présent que pour l’étude d’ondes stationnaires dans un référentiel en mouvement avec l’onde.

Revenons donc aux équations complètes du début. On effectue l’analyse dans un référentiel se déplaçant à la vitesse  $c$  de l’onde et on ne s’intéresse qu’aux solutions stationnaires. On donne au problème une formulation de type système dynamique, la variable d’évolution n’étant pas le temps mais la coordonnée horizontale  $x$ . L’autre variable indépendante est la fonction de courant  $\psi$ . Ce n’est pas obligatoire de travailler avec la fonction de courant mais les calculs sont légèrement plus simples. Le système s’écrit

$$\begin{aligned} U_{1x} &= v_1 U_{1\psi} - u_1^3 V_{1\psi}, \\ V_{1x} &= U_{1\psi}/u_1 + v_1 V_{1\psi}, \\ U_{2x} &= v_2 U_{2\psi} - u_2^3 V_{2\psi}, \\ V_{2x} &= U_{2\psi}/u_2 + v_2 V_{2\psi}, \\ e_{1x} &= -\lambda V_1(\cdot, H), \\ e_{2x} &= -\lambda(1 - R)V_2(\cdot, 0), \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites

$$V_1(\cdot, 0) = V_2(\cdot, 0).$$

Les quatre premières équations représentent la conservation de la masse et la condition d’irrotationnalité, tandis que les deux dernières représentent les conditions dynamiques sur la surface libre et sur l’interface. Les quantités  $U_1(x, \psi)$ ,  $U_2(x, \psi)$ ,  $V_1(x, \psi)$ ,  $V_2(x, \psi)$ ,  $e_1(x)$ ,  $e_2(x)$  sont définies par:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2}(u_1^2 + v_1^2 - 1), & V_1 &= v_1/u_1, \\ U_2 &= \frac{1}{2}(u_2^2 + v_2^2 - 1), & V_2 &= v_2/u_2, \\ e_2 &= U_2(\cdot, 0) - RU_1(\cdot, 0), & e_1 &= U_1(\cdot, H). \end{aligned}$$

Dorénavant nous utilisons la notation

$$\mathbf{w} = [U_1, V_1, U_2, V_2, e_1, e_2]. \quad (4.1)$$

## 4.1 Réduction à la variété centrale

On peut réécrire le système à résoudre sous la forme

$$\partial_x \mathbf{w} = L\mathbf{w} + N(\mathbf{w}), \quad (4.2)$$

où  $L$  est la linéarisation autour de  $\mathbf{w} = 0$  et  $N$  représente les termes nonlinéaires. L'opérateur linéaire  $L$  dépend des nombres sans dimension  $R$ ,  $H$  et  $\lambda$ .

Soit  $\sigma$  une valeur propre de l'opérateur  $L$ . On peut montrer que  $\sigma$  satisfait la relation

$$\sigma^2[\cot(\sigma H) \cot(\sigma) - R] - \sigma\lambda[\cot(\sigma H) + \cot(\sigma)] + \lambda^2(1 - R) = 0.$$

Si on remplace  $\sigma$  par  $ik$  dans l'équation ci-dessus, on retrouve la relation de dispersion. La condition pour que  $\sigma = 0$  soit une valeur propre double est

$$(1 - R)H\lambda^2 - (1 + H)\lambda + 1 = 0. \quad (4.3)$$

On retrouve bien sûr (3.2).

Soient  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  le vecteur propre et le vecteur propre généralisé correspondant à la valeur propre  $\sigma = 0$ , et  $\varphi_k$  le vecteur propre correspondant à  $\sigma = ik$  (son complexe conjugué correspond à  $\sigma = -ik$ ). La solution peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{w}(x, \psi) = a_0(x)\varphi_0(\psi) + a_1(x)\varphi_1(\psi) + a_+(x)\varphi_k(\psi) + a_-(x)\overline{\varphi_k}(\psi) + \dots \quad (4.4)$$

## 4.2 Mise sous forme normale

Maintenant que le système de départ a été réduit à la variété centrale, l'étape suivante consiste à écrire le système sous forme normale:

$$\begin{cases} \dot{a}_0 &= a_1, \\ \dot{a}_1 &= c_0\nu a_0 - c_1 a_0^2 + \dots, \\ \dot{a}_+ &= ika_+ + F(a_0, a_+, a_-), \end{cases} \quad (4.5)$$

Bien sûr, on retombe sur un système similaire au système (3.11). A tout ordre, cette forme normale est intégrable et admet comme solutions des ondes solitaires non-locales. Cependant, sur la forme normale, il y a parmi ces ondes solitaires de "vraies" ondes solitaires, ce qui ne veut pas dire que le système de départ admette également de "vraies" ondes solitaires! En fait, une analyse asymptotique au-delà de tout ordre montre que l'amplitude des oscillations à l'infini n'est jamais zéro.

## 5 Conclusion

Nous avons considéré la propagation d'ondes solitaires dans une géométrie bi-couche, où la couche supérieure est en contact avec l'air. Cette situation se rencontre dans les océans et dans d'autres contextes. Il y a deux types d'ondes solitaires qui peuvent se propager, les rapides et les lentes. Les rapides sont de vraies ondes solitaires, au sens où elles tendent vers une amplitude nulle à l'infini. En revanche, les lentes sont des ondes solitaires non-locales, au sens où elles oscillent à l'infini. Nous n'avons considéré que des solutions symétriques, admettant une queue oscillante aussi bien à  $+\infty$  qu'à  $-\infty$ . D'un point de vue énergétique, ceci n'est pas possible. En fait, si de telles ondes existent, on s'attend à n'avoir des oscillations que d'un seul côté. De quel côté dépendra de la valeur relative de la vitesse de groupe des vaguelettes par rapport à la vitesse de l'onde solitaire. Il serait intéressant d'étudier la stabilité de telles ondes.

## REFERENCES

- Akylas, T. R. & Grimshaw, R. H. J. 1992 Solitary internal waves with oscillatory tails. *J. Fluid Mech.* **242**, 279–298.
- Beale, J. T. 1991 Exact solitary water waves with capillary ripples at infinity. *Comm. Pure and Appl. Math.* **44**, 211–257.
- Iooss, G. & Kirchgässner, K. 1992 Water waves for small surface tension: an approach via normal form. *Proc. Royal Soc. Edinburgh A* **122A**, 267–299.
- Kakutani, T. & Yamasaki, N. 1978 Solitary waves on a two-layer fluid. *J. Phys. Soc. Japan* **45**, 674–679.
- Lombardi, E. 1992 Bifurcation d'ondes solitaires à oscillations de faible amplitude à l'infini, pour un nombre de Froude proche de 1. *C. R. Acad. Sci. Paris* **314 I**, 493–496.
- Mielke, A. 1995 Homoclinic and heteroclinic solutions in two-phase flow. *Adv. Ser. Nonlinear Dyn.* **7**, 353–362.
- Moni, J. N. & King, A. 1995 Interfacial solitary waves. *Q. J. Mech. Appl. Math.* **48**, 21–38.
- Sun, S. M. 1991 Existence of a generalized solitary wave solution for water with positive Bond number less than  $1/3$ . *J. Math. Anal. Appl.* **156**, 471–504.
- Sun, S. M. & Shen, M. C. 1993 Exact theory of generalized solitary waves in a two-layer liquid in the absence of surface tension. *J. Math. Anal. Appl.* **180**, 245–274.
- Vanden-Broeck, J.-M. 1991 Elevation solitary waves with surface tension. *Phys. Fluids A* **3**, 2659–2663.