

## AEROELASTICITE NON LINEAIRE : PROBLEME PLAN POUR DES OBSTACLES FLEXIBLES.

O. Le Maître<sup>1</sup>, F. Hauville<sup>1</sup>, S. Huberson<sup>1</sup> & J. E. Souza de Cursi<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> : Laboratoire de Mécanique - Université du Havre  
BP 540 - 76 058 LE HAVRE cedex - FRANCE

email : olivier@cher.univ-lehavre.fr

<sup>2</sup> : Institut de Mécanique - INSA de Rouen  
BP 08 - 76 131 MONT SAINT AIGNAN - FRANCE

email : Souza@insa-rouen.fr

### Résumé

On étudie l'interaction d'une structure flexible avec un écoulement instationnaire, avec pour exemple la dynamique d'une voile de bateau. Pour certaines conditions aux limites, de petites perturbations de l'écoulement environnant peuvent provoquer de grands déplacements de la voile sans variation importante du potentiel élastique. Par contre, ces déformations sont à l'origine de fortes perturbations de l'écoulement d'où un couplage fort. On présente un modèle en déplacements finis, qui permet de prendre en compte les non linéarités géométriques. Le problème plan est d'abord considéré dans le cadre des structures minces idéalement flexibles et des écoulements de fluide parfait. Le couplage des problèmes de fluide et structure fournit un modèle de voile travaillant dans des conditions instationnaires. Les résultats numériques mettent en évidence le caractère non linéaire de la réponse. Enfin, l'extension du modèle au problème tridimensionnel est envisagée.

### Abstract

We study the interaction of a very flexible structure with an unsteady flow. A sail is an example of such a structure, for which small perturbations of the surrounding flow field can lead to finite displacements without large variation of the elastic energy. On the contrary, finite deformations of the sail induce large perturbations of the flow and, as a consequence, a strong coupling. We present a geometrically non linear model of the problem. Firstly, the two-dimensional problem is considered for ideally flexible structures and perfect fluids. The resulting model allows the simulation of sails in unsteady flows. Numerical results put in evidence the non linearity of the sail response. Secondly, the generalisation of the model to three dimensional problems is discussed and steady results are presented.

## 1 Introduction :

L'analyse du comportement dynamique d'une structure élastique dans un écoulement présente de nombreuses difficultés quand la structure admet de grands déplacements. Ces difficultés proviennent essentiellement des non linéarités de la dynamique de la structure et du couplage fort entre les phénomènes aérodynamiques et élastiques. Le premier point est relié à l'analyse en grands déplacements de l'équilibre de la structure : les approximations géométriques (hypothèse de petits déplacements depuis une configuration de référence) ne sont plus valides et les équations d'équilibre doivent être résolues sur la configuration solution. Le second point concerne l'aspect fluide : les conditions aux limites du problème fluide associé ne peuvent plus être linéarisées et les frontières réelles du domaine doivent être considérées. Une voile de navire est un bon exemple de structure qui peut réaliser de grands déplacements. En effet, même pour de faibles variations du chargement aérodynamique, la voile peut admettre de grands déplacements en raison d'une grande flexibilité notamment lorsqu'elle admet des zones non contraintes en l'absence d'efforts exercés (pas de pré-tension).

D'autre part, Hauville [1] et Charvet [2] ont étudié l'écoulement autour d'une voile *rigide* animée de mouvements harmoniques pour différentes linéarisations des conditions aux limites et un traitement lagrangien du sillage (méthode particulière). Par comparaison avec les solutions obtenues en travaillant avec les géométries exactes (vraies conditions aux limites), ils montrent les limites du domaine linéaire qui ne couvre que partiellement l'ensemble des conditions réelles de navigation, en particulier pour les grandes amplitudes et les faibles fréquences. (Voir aussi [3] pour le cas de la déformation élastique de la voile en petits déplacements et sillage linéarisé).

En dehors du domaine linéaire, il est nécessaire de résoudre les équations dans chaque domaine délimité par ses frontières exactes. Il faut donc, à chaque instant, déterminer la déformation de l'obstacle qui correspond, au travers des conditions aux limites du problème fluide, aux efforts qui lui donnent naissance. On peut remarquer que ces efforts aérodynamiques dépendent non linéairement de la déformation, elle-même reliée aux efforts par un opérateur non linéaire. Cette observation suggère une résolution du problème d'interaction par une méthode de point fixe sur les efforts et la configuration.

Pour étudier le comportement d'un tel système, on considère le problème plan d'un obstacle mince idéalement flexible placé dans un écoulement uniforme incident à faible angle d'attaque. Le problème peut être approché de la façon suivante :

- **Modèle de structure :** pour des structures minces telles que  $h/C \ll 1$ , ou  $h$  est l'épaisseur et  $C$  la longueur de corde, si les rayons de courbure restent grands, les efforts de flexion peuvent être négligés. Les efforts internes sont alors tangents à la configuration et on peut utiliser un modèle de membrane géométriquement non linéaire. Ce modèle conduit à un problème variationnel qui peut être résolu par une méthode d'éléments finis.
- **Modèle d'écoulement :** pour des écoulements à petits nombres de Mach et grands nombres de Reynolds, le fluide peut être considéré incompressible et non visqueux. La vorticité est alors confinée au voisinage de l'obstacle et dans le sillage. Si l'on suppose de plus que l'écoulement reste attachée le long de l'obstacle et que les effets épaisseur sont négligeables, il est possible de représenter cinématiquement l'écoulement à l'aide d'une méthode intégrale associée à une méthode particulière.

Après avoir présenté ces deux modèles en sections (2) et (3), on introduit les équations de couplage exprimant la compatibilité des solutions dans les deux domaines : fluide et solide. L'algorithme de résolution est ensuite décrit, il repose sur une méthode de point fixe sur la déformation et les efforts. Le modèle fait alors apparaître plusieurs nombres sans dimension caractérisant le système. On présente ensuite quelques résultats obtenus pour des perturbations de l'écoulement incident ou d'un forçage d'une extrémité de la structure.

L'extension du modèle au problème tridimensionnel est abordée dans la section (6). Elle ne pose pas de difficultés théoriques supplémentaires, mais elle est limitée, pour le moment, aux stationnaires en raison des temps de calcul nécessaires.

## 2 Modèle de structure idéalement flexible :

Compte tenu de la dimension du problème et de l'épaisseur des obstacles considérés, le comportement dynamique peut être approché par un modèle de structure unidimensionnelle idéalement flexible. L'aspect unidimensionnel repose sur la connaissance de l'ensemble de la configuration à partir de la géométrie de sa ligne moyenne (à mi-épaisseur). Le caractère idéalement flexible signifie que les efforts internes de flexion et de cisaillement transverse sont négligés devant l'effort tangent à la ligne moyenne. Ce modèle mécanique est équivalent au modèle de fil présenté dans [4] et [5] pour lequel la contrainte d'unilatéralité est abandonnée par l'introduction de la dynamique. La trace dans le plan d'une telle structure est la solution d'un problème (convexe) géométriquement non linéaire, connu sous le nom de problème de membrane en grands déplacements. Le problème est illustré sur la figure 1.

On note  $L$  la longueur naturelle (sans allongement) de la ligne moyenne de la structure dans le plan. On suppose que, du fait de sa faible épaisseur, la configuration de la structure est entièrement déterminée par la connaissance d'une carte notée  $\underline{\mathbf{X}}$  des points de sa ligne moyenne qui associe à une coordonnée lagrangienne  $s \in [0 : L]$  une position au cours du temps :  $(s, t) \in [0 : L] \times [0 : T] \rightarrow \underline{\mathbf{X}}(s, t) \in \mathcal{R}^2$ .

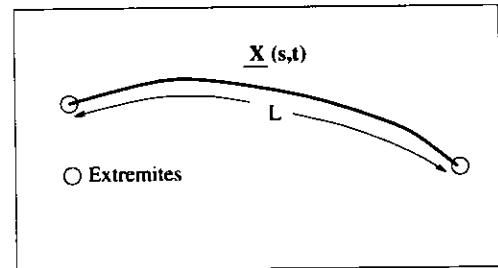


Figure 1 : Carte  $\underline{\mathbf{X}}(s)$  de la structure.

### 2.1 Allongement - tensions :

Comparé à la faible épaisseur du milieu, le rayon de courbure caractéristique de la configuration est grand, de telle sorte que les efforts de flexion peuvent être négligés en première approximation. La tension  $\underline{\mathbf{T}}(s)$  dans la structure est alors tangente à la ligne moyenne et ne dépend que de l'allongement local  $\epsilon(s)$ . A partir de la configuration  $\underline{\mathbf{X}}$ , ces grandeurs ont pour expressions :

$$\epsilon(s) = |\partial_s \underline{\mathbf{X}}| - 1 \quad (1)$$

$$\underline{\mathbf{T}}(s) = K(s)\epsilon(s)\partial_s \underline{\mathbf{X}}/|\partial_s \underline{\mathbf{X}}| \quad (2)$$

$\partial_s$  est la dérivée par rapport à  $s$  et  $K > 0$  le module de Young du matériau. La relation linéaire entre le module de la tension (contrainte interne) et l'allongement est une linéarisation de la loi de comportement du matériau pour de petits allongements. En effets, même si la structure n'admet pas de grands allongements, de grands déplacements peuvent apparaître pour certaines conditions aux limites. En particulier quand  $L$  est supérieure à la distance séparant les deux extrémités, de grands déplacements sont possibles sans variations importantes du potentiel élastique.

### 2.2 Equations de la dynamique :

La structure est soumise à des efforts aérodynamiques notés  $\underline{\mathbf{F}}(s, t)$ . On suppose ici que les efforts sont connus bien qu'ils dépendent éventuellement de la configuration (la solution

du problème fluide est non linéaire par rapport aux frontières). On note respectivement la masse surfacique de la membrane  $S_v$ , son épaisseur  $h$  et  $\ddot{\mathbf{X}}$  l'accélération locale. L'équation du mouvement de la ligne moyenne est alors :

$$h\partial_s\mathbf{T} + \mathbf{F} - S_v\ddot{\mathbf{X}} = 0 \quad (3)$$

et les conditions aux limites sont données par :

$$\mathbf{X}(0, t) = \mathbf{X}_0(t) \quad , \quad \mathbf{X}(L, t) = \mathbf{X}_L(t) \quad . \quad (4)$$

Des conditions initiales définies pour  $s \in [0 : L]$  sont aussi nécessaires, elles portent sur la carte initiale et sa dérivée par rapport au temps  $\dot{\mathbf{X}}(s, t = 0)$ .

$$\mathbf{X}(s, t = 0) = \mathbf{X}^0(s) \quad , \quad \dot{\mathbf{X}}(s, t = 0) = \dot{\mathbf{X}}^0(s) \quad . \quad (5)$$

### 2.3 Formulation variationnelle :

On introduit d'une part  $S$  l'ensemble des configurations admissibles :  $S = \{ \mathbf{X} : [0 : L] \times [0 : T] \rightarrow R^2 \mid (5), (4) \}$  ; et d'autre part,  $\eta$  l'ensemble des vitesses virtuelles :  $\eta = \{ \mathbf{V} : [0 : L] \rightarrow R^2 \mid \mathbf{V}(0) = \mathbf{V}(L) = \mathbf{0} \}$ . En multipliant Eq. (3) par  $\mathbf{V}$  et en intégrant sur la ligne moyenne, on obtient une équation variationnelle qui peut s'écrire :  $\mathbf{X} \in S$  et

$$\int_0^L [h\mathbf{T}\partial_s\mathbf{V} - \mathbf{F}\mathbf{V} + S_v\ddot{\mathbf{X}}\mathbf{V}] ds, \forall \mathbf{V} \mid \mathbf{V} \in \eta \quad (6)$$

Dans cette équation, on reconnaît respectivement, la puissance virtuelle des efforts internes, des efforts extérieurs et d'inertie pour le champ de vitesses virtuelles  $\mathbf{V}$ . Elle signifie que  $\mathbf{X}$  est une carte solution si elle satisfait le principe de minimum d'énergie interne (point stationnaire).

### 2.4 Discrétisation en temps :

Les termes d'accélération sont discrétisés par un schéma de Newmark en introduisant un intervalle  $\Delta t$  entre deux temps discrets :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{t+\Delta t} &= \mathbf{X}^t + \dot{\mathbf{X}}^t \Delta t + \beta \ddot{\mathbf{X}}^t \Delta t^2 + (0.5 - \beta) \ddot{\mathbf{X}}^{t+\Delta t} \Delta t^2 \quad ; \\ \dot{\mathbf{X}}^{t+\Delta t} &= \dot{\mathbf{X}}^t + \gamma \ddot{\mathbf{X}}^t \Delta t + (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{X}}^{t+\Delta t} \Delta t \quad ; \end{aligned}$$

Les indices supérieurs se réfèrent au temps et  $\beta \in [0 : 0.5]$  et  $\gamma \in [0 : 1]$  définissent le caractère implicite du schéma. Depuis ce schéma, il est possible d'écrire accélération au temps courant comme une fonction linéaire de  $\mathbf{X}^{t+\Delta t}$ ,  $\mathbf{X}^t$ ,  $\dot{\mathbf{X}}^t$ ,  $\ddot{\mathbf{X}}^t$  :

$$\ddot{\mathbf{X}}^{t+\Delta t} = \alpha \mathbf{X}^{t+\Delta t} + \mathcal{L}(\mathbf{X}^t, \dot{\mathbf{X}}^t, \ddot{\mathbf{X}}^t) \quad (7)$$

où  $\alpha$  est un coefficient fonction de  $\Delta t$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  et  $\mathcal{L}$  un opérateur linéaire dépendant des mêmes variables. En introduisant Eq.(7) dans Eq.(6) on obtient l'équation variationnelle suivante : Trouver  $\mathbf{X}^{t+\Delta t} \in S$  tel que

$$\int_0^L [h\mathbf{T}^{t+\Delta t} \partial_s \mathbf{V} - \mathbf{G}\mathbf{V} + S_v \alpha \mathbf{X}^{t+\Delta t} \mathbf{V}] ds, \forall \mathbf{V} \mid \mathbf{V} \in \eta \quad (8)$$

Avec  $\mathbf{G} = \mathbf{F}^{t+\Delta t} - S_v \mathcal{L}(\mathbf{X}^t, \dot{\mathbf{X}}^t, \ddot{\mathbf{X}}^t)$ . Dans la suite, la détermination de  $\mathbf{X}^{t+\Delta t} \in S$  solution de Eq.(8) est appelée problème de membrane.

## 2.5 Résolution du problème de membrane :

Le problème de membrane est non linéaire du fait de la relation non linéaire entre tension et configuration. Il peut cependant être résolu par une méthode d'éléments finis. La trace de la voile est discrétisée en un nombre fini de segments. Sur chaque élément d'extrémités  $\underline{\mathbf{X}}_i$  et  $\underline{\mathbf{X}}_{i+1}$  allongement et tension sont considérés constants. La discrétisation de Eq.(8) permet de construire un système non linéaire pour les inconnues  $\underline{\mathbf{X}}_j$  (la position des noeuds qui ne sont pas une des extrémités) :

$$\mathcal{O}(\underline{\mathbf{X}}_j^{t+\Delta t}) = 0 \quad .$$

Ce système est résolu par une méthode itérative à partir d'une solution estimée (la solution au temps  $t$  par exemple) en construisant la suite  $\underline{\mathbf{X}}_k$ , où les indices de discrétisation et de temps ont été oubliés ( $\underline{\mathbf{X}}_k = \underline{\mathbf{X}}_{j,k}^{t+\Delta t}$ ), telle que :

$$\underline{\mathbf{X}}_{k+1} = \underline{\mathbf{X}}_k + \nu \mathcal{O}(\underline{\mathbf{X}}_k) \quad . \quad (9)$$

$\nu$  étant un coefficient de relaxation.

## 3 Modèle d'écoulement :

On présente un modèle pour l'écoulement plan autour d'un obstacle de faible épaisseur et à faible incidence. Dans l'approximation d'un fluide incompressible non visqueux, si le champ incident est irrotationnel, la vorticité est nulle, partout dans le domaine fluide, sauf au voisinage de l'obstacle et dans le sillage. L'application de la décomposition de Helmholtz au champ de vitesse permet de distinguer une contribution potentielle d'une contribution rotationnelle. Ce problème a été intensivement étudié et sa résolution associe classiquement une méthode de surface portante et un traitement lagrangien du sillage (méthode particulaire) ([6], et Rehbach [7] pour le cas 3D). L'intérêt pratique de ces méthodes est ici de formuler le problème sur les frontières de l'écoulement et donc de ne pas avoir à discrétiser le domaine fluide entier.

### 3.1 Ecoulement potentiel :

La décomposition de Helmholtz conduit à écrire le champ de vitesse sous la forme :

$$\underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{U}}_\infty + \nabla \Phi + \nabla \wedge \underline{\Psi}$$

avec  $\underline{\mathbf{U}}_\infty$  le champ incident,  $\Phi$  le potentiel et  $\underline{\Psi}$  le potentiel vecteur qui dans le cas plan se réduit à sa composante normale au plan :  $\underline{\Psi} = \Psi \underline{\mathbf{z}}$ . On montre que, dans la limite d'une épaisseur nulle, la voile est une surface présentant une discontinuité de potentiel  $[\Phi] = \mu(s)$ . Les conditions aux limites cinématiques pour un fluide parfait sont des conditions de glissement :

$$\underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{X}}(s, t)) \cdot \underline{\mathbf{n}}(s, t) = (\dot{\underline{\mathbf{X}}}(s, t)) \cdot \underline{\mathbf{n}}(s, t) \quad . \quad (10)$$

Le champ de vitesse induit par une distribution de saut de potentiel sur la voile  $\underline{\mathbf{X}}(s, t)$  est donné par la relation intégrale suivante voir [8]) :

$$\underline{\mathbf{U}}_\mu(\underline{\mathbf{x}}) = \nabla \Phi = \frac{1}{4\pi} \int_0^L \mu(\underline{\mathbf{X}}) \nabla \left( \frac{(\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}) \cdot \underline{\mathbf{n}}(\underline{\mathbf{X}})}{\|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}\|^3} \right) ds \quad (11)$$

La condition de glissement (10) permet d'établir une équation intégrale de Fredholm pour  $\mu$  :

$$\int_0^L \mu(\underline{\mathbf{X}}(s)) \underline{\mathbf{n}}(l) \nabla \left( \frac{(\underline{\mathbf{X}}(l) - \underline{\mathbf{X}}(s)) \cdot \underline{\mathbf{n}}(\underline{\mathbf{X}}(s))}{\|\underline{\mathbf{X}}(l) - \underline{\mathbf{X}}(s)\|^3} \right) ds = 4\pi \left( -U_\infty - \nabla \wedge \underline{\Psi} + \dot{\underline{\mathbf{X}}}(l) \right) \cdot \underline{\mathbf{n}}(l) \quad (12)$$

La solution  $\mu(s)$  de ce problème est linéaire en  $\dot{\underline{\mathbf{X}}}$  et non linéaire en  $\underline{\mathbf{X}}$ . Elle est classiquement calculée en discrétisant l'obstacle en  $N$  segments (correspondants dans la pratique aux éléments finis de membrane) supports d'un saut de potentiel constant ([6]). L'écriture de Eq. (12) sur les  $N$  centres géométriques des segments permet de construire un système linéaire pour les  $\mu_{i=1,N}$ .

### 3.2 Sillage :

Le théorème de Kelvin indique que la circulation totale dans le fluide est conservée. Aussi, toute variation de la circulation autour de la voile est nécessairement compensée par l'émission de vorticité dans le sillage. Si on suppose de plus, que l'écoulement reste attaché tout le long de l'obstacle pour s'en détacher au bord de fuite, ce qui exclut les situations de décrochage (statiques pour les grandes incidences et / ou dynamiques du fait de fortes accélérations de l'obstacle), la variation de la circulation  $\Gamma$  autour de l'obstacle est donnée par :

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d\mu(\underline{\mathbf{X}}(s=L))}{dt} \quad (13)$$

#### 3.2.1 Emission :

L'émission de la vorticité dans le sillage a lieu au bord de fuite et la circulation totale  $\Omega_e$   mise dans l'intervalle de temps  $[t; t + \Delta t]$  est donc :

$$\Omega_e(t + \Delta t) = - \int_t^{t+\Delta t} \frac{d\Gamma}{dt} = \mu^t(\underline{\mathbf{X}}(L)) - \mu^{t+\Delta t}(\underline{\mathbf{X}}(L)) \quad (14)$$

Le support de cette circulation est la portion de ligne d'émission issue du bord de fuite entre  $t$  et  $t + \Delta t$ . Cette représentation permet de satisfaire d'une part le théorème de Kelvin et d'autre part la condition de Kutta-Joukowski. La méthode particulaire consiste en une représentation du sillage par des particules discrètes supportant une circulation. Cette méthode est bien adaptée pour traiter le cas de sillages enroulés. La circulation est introduite dans le fluide par une procédure au cours de laquelle une particule supportant la circulation  $\Omega_w(n\Delta t) = \Omega_e$  est placée dans le fluide au point  $\underline{\mathbf{X}}_e(n\Delta t)$  au temps  $n\Delta t$  :

$$\underline{\mathbf{X}}_e = \underline{\mathbf{X}}^{n\Delta t}(L) + \underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{X}}^{n\Delta t}(L)) \frac{\Delta t}{2} \quad (15)$$

#### 3.2.2 Evolution du sillage :

En écrivant les équations d'Euler en formulation vitesse-tourbillon, on montre que l'évolution du champ tourbillonnaire conduit à résoudre le système d'équations suivant pour l'ensemble des particules :

$$\frac{d\Omega_w}{dt} = 0 \quad , \quad \frac{d\underline{\mathbf{X}}_w}{dt} = \underline{\mathbf{U}}(\underline{\mathbf{X}}_w) \quad (16)$$

Les conditions initiales sont données par :

$$\Omega_w(n\Delta t, t = n\Delta t) = \Omega_e(n\Delta t) \quad , \quad \underline{\mathbf{X}}_w(n\Delta t, t = n\Delta t) = \underline{\mathbf{X}}_e(n\Delta t) \quad (17)$$

La vitesse induite au temps  $m\Delta t$  par l'ensemble des particules du sillage est obtenue au moyen de la loi de Biot et Savart :

$$\underline{\mathbf{U}}_w(\underline{\mathbf{x}}) = \nabla \wedge \underline{\Psi} = \sum_{n=1}^m \Omega_w(n\Delta t) \wedge \nabla \left( \frac{1}{\|\underline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{X}}_w(n\Delta t)\|} \right) \quad (18)$$

### 3.3 Résolution du problème fluide :

Le problème fluide est non linéaire puisque la circulation autour de l'obstacle et la position d'émission ne sont pas reliées par une relation linéaire. Un processus itératif est mis en oeuvre : à partir du sillage et de la configuration de l'obstacle connus à  $t + \Delta t$ , l'équation intégrale (12) est résolue fournissant la circulation et la position d'une nouvelle particule selon les Eq.(14) (15). En considérant cette nouvelle particule dans le sillage, on résout de nouveau (12) calculant ainsi une autre estimation pour  $\underline{X}_e$  et  $\Omega_e$ . Le processus est renouvelé tant qu'un critère de convergence n'est pas atteint. Ceci fait, l'ensemble des particules est convecté selon (16) et une nouvelle itération temporelle peut commencer.

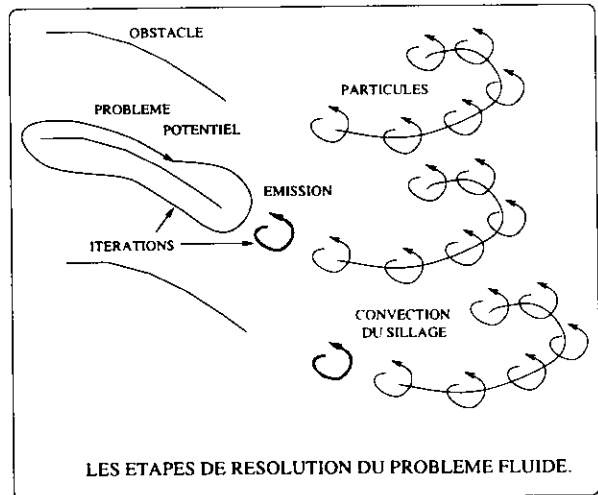


Figure 2 : Représentation schématique du problème fluide.

### 3.4 Efforts exercés par le fluide :

En l'absence de viscosité, le fluide n'exerce qu'un effort de pression normal sur l'obstacle. Cet effort de pression est donné par la relation de Bernoulli instationnaire :

$$\underline{F}(s, t) = \left( \frac{\partial \mu(s, t)}{\partial t} + \underline{U}(\underline{X}(s)) \cdot \nabla \mu(s) \right) \underline{n}(s) ds \quad . \quad (19)$$

## 4 Couplage des deux problèmes :

Ayant détaillé la résolution des problèmes fluide et solide, il faut rechercher un algorithme permettant de trouver à chaque instant une solution compatible. Cette compatibilité est exprimée à l'aide des équations de couplage qui sont de nature cinématique et dynamique. L'équation de couplage cinématique qui traduit la continuité des vitesses normales au travers des interfaces fluide / solide est donnée par l'Eq.(10), et l'équation dynamique donnée par Eq.(19) identifie l'effort extérieur exercé sur la structure à l'effort de pression dû au fluide. On propose le schéma de couplage suivant :

- A : Nouvelle itération temporelle - Une estimation de la configuration au temps  $t + \Delta t$  est  $\underline{Y}^0 \in S$ .
  - 1 On résout le problème fluide Eq.(12) (15) (14) avec  $\underline{Y}^k$  ce qui fournit une estimation  $\underline{F}^k$  pour les efforts Eq.(19).
  - 2 On résout le problème de membrane Eq.(8), en considérant les efforts extérieurs  $\underline{F}^k$  et on obtient une nouvelle configuration  $\underline{Y}^{k+1}$ .
  - 3 On reprend en (1) avec  $k \leftarrow k + 1$  ou bien, si un critère de convergence sur la stationnarité de  $\underline{Y}^k$  est satisfait, on continue en B.
- B :  $\underline{X}^{t+\Delta t} = \underline{Y}^k$
- C : Convection du sillage Eq.(16)
- D :  $t \leftarrow t + \Delta t$ . Retour en A

On remarque que les étapes (1) et (2) constituent le corps de la décomposition de l'interaction qui est schématisée sur la figure 3 :

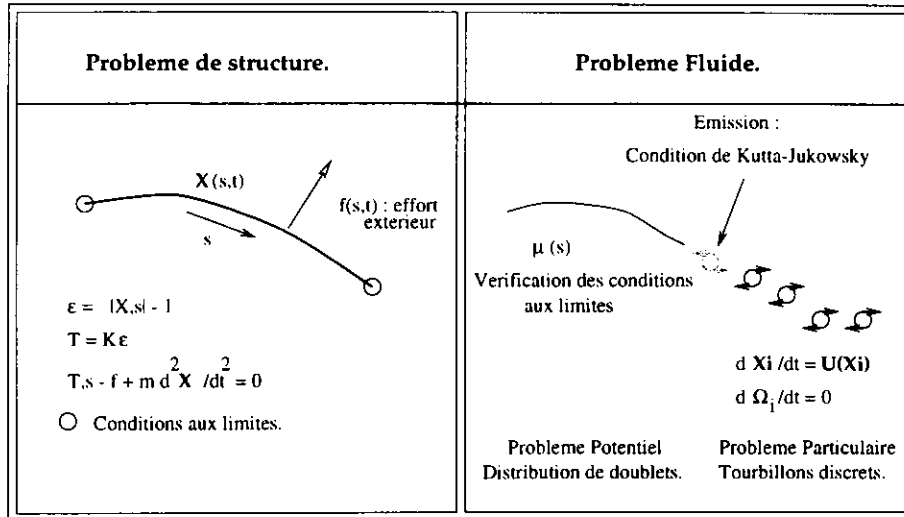


Figure 3 : Décomposition de l'interaction en un problème de structure (gauche) et un problème fluide (droite).

## 5 Résultats numériques :

Le problème est adimensionnalisé à l'aide des grandeurs  $U_\infty$ ,  $C$  et  $\rho$  caractéristiques des vitesses, longueurs et masse volumique du système en interaction. Cette caractérisation fait apparaître 3 nombres sans dimensions :

- $L/C$  : ce rapport entre la longueur totale de la structure et la distance séparant ses deux extrémités, permet de différencier les cas 'pré-tendus'  $L < C$  pour lesquels aucune configuration admissible n'annule l'énergie élastique, des cas 'lâches'  $L > C$ .
- $K^* = 2Kh/C\rho U_\infty^2$  : ce nombre compare les efforts internes élastiques aux efforts extérieurs exercés par le fluide.
- $M^* = S_v/(\rho C)$  : exprime le rapport des efforts d'inertie dans le fluide et dans la structure. Si  $M^* \ll 1$  alors les effets d'inertie dans la structure seront négligeables et le problème de membrane peut être résolu dans la limite  $S_v \rightarrow 0$ .

Ces trois nombres caractérisent le système. Il convient aussi de préciser la nature des perturbations à l'origine de l'instationarité. Deux types d'excitations ont été différenciés :

- Ecoulement incident instationnaire : dans la sous section (5.2) on étudie la réponse du système pour un écoulement incident d'intensité variable. Les extrémités de la structure sont fixes. Ce type de situation correspond à une voile agissant comme récepteur (elle est passive) pour des perturbations de la force du vent. A partir de données statistiques sur la turbulence atmosphérique, on reconstruit facilement un vent incident irrotationnel et incompressible, en supposant que les longueurs d'ondes des perturbations sont grandes devant  $C$ . Le champ peut alors être considéré uniforme en espace et son intensité est modélisée par une fonction stochastique.
- Forçage d'une extrémité de la structure : on considère dans la sous section (5.3) un écoulement incident stationnaire et uniforme. Une perturbation du système est introduite en forçant un mouvement du bord de fuite de la structure. Il s'agit ici d'une idéalisation de l'interaction entre un voilier agité par la houle dans un vent stationnaire. Le système



transfère alors de l'énergie du domaine solide vers le fluide, conduisant à un amortissement de la dynamique de la structure. Le processus est en effet irréversible : toute circulation émise dans le domaine fluide sous forme de particule ne peut être réabsorbée.

Les deux types d'instationarité envisagés sont schématisés sur la figure 4, ainsi que les conditions aux limites correspondantes.

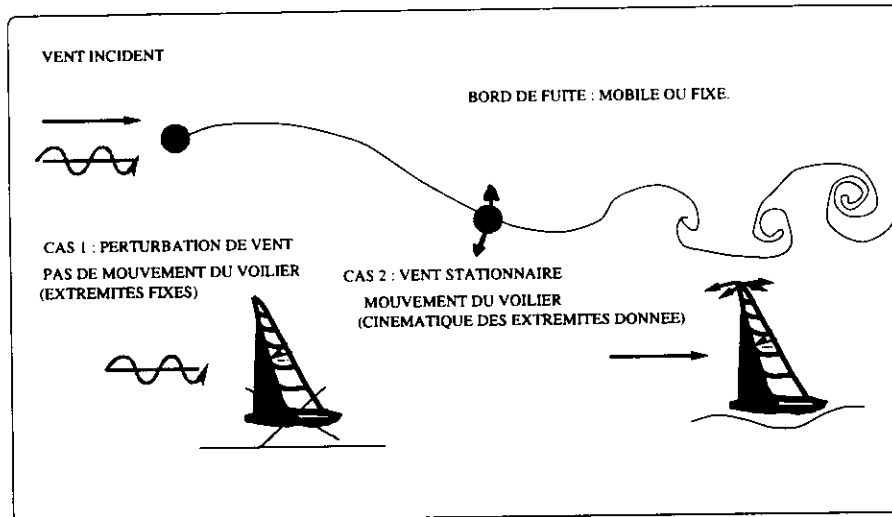


Figure 4 : Différentes perturbations considérées et conditions aux limites.

### 5.1 Résultat préliminaire.

On présente sur la figure 5, l'évolution de la configuration de l'obstacle et du proche sillage dans le cas d'un écoulement incident  $\underline{U}_\infty$  constant et parallèle à l'axe  $(O, x)$ , et un forçage du bord de fuite.

La position du bord de fuite est imposée par la loi :

$$\underline{X}_{BF} = \underline{X}_e = C(\cos(\alpha(t)), \sin(\alpha(t)))$$

$$\alpha(t) = 10 + 5\cos(\pi U_\infty / 2C t)$$

La troisième dimension d'espace est le temps  $t$  qui est adimensionnée par  $U_\infty/C$ . On observe un enroulement périodique du proche sillage au voisinage des zones supportant les circulations les plus intenses. L'angle de propagation de ces enroulements, dans le plan  $(x, t)$ , montre que ces zones sont convectées à la vitesse moyenne  $U_\infty$ . D'autre part, cet exemple met en évidence les limites des linéarisations géométriques, les déformations du sillage et de l'obstacle étant ici de l'ordre de  $C$ .

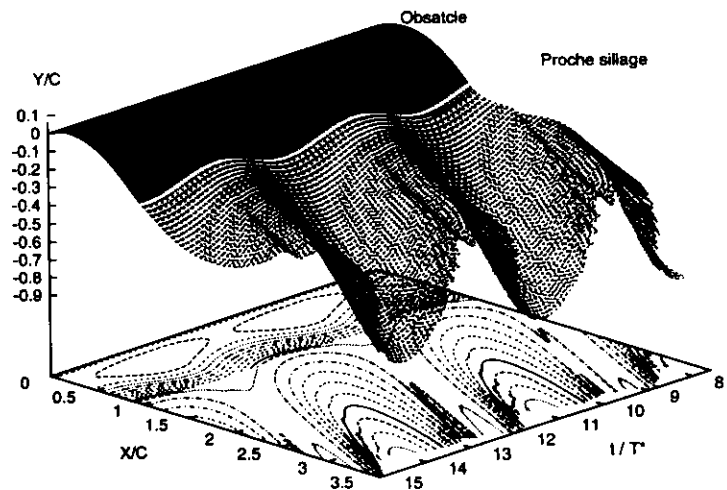


Figure 5 : Vue de la configuration solution et du proche sillage à différents instants.

5.2 Ecoulement incident stochastique :

On étudie la réponse du système lorsque la structure est soumise à des perturbations de l'écoulement incident. Cet écoulement est supposé uniforme en espace et constant en direction.

Son intensité est une fonction stochastique caractérisée par l'auto-spectre présenté figure 6. Cet auto-spectre indique que les perturbations ont une énergie à peu près constante sur la gamme de fréquences réduites  $f/f^* \in [0 : 2]$ , où  $f^* = \|\underline{U}_\infty\|/C$ .

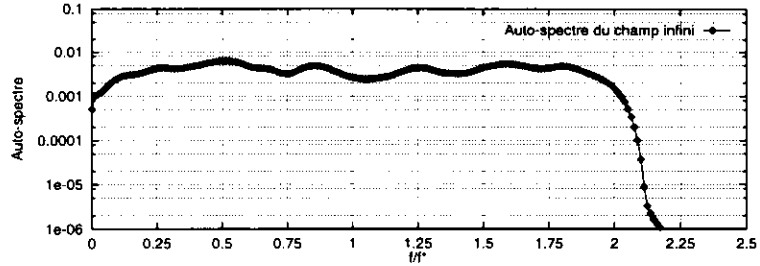


Figure 6 : Auto-spectre de l'intensité du vent incident.

Les extrémités de la voile sont fixes et placées de façon à ce que la droite les joignant fasse un angle de 10 degrés avec l'écoulement incident. On reconstruit une série temporelle pour l'intensité du vent à partir de l'auto-spectre de perturbation par transformée de Fourier inverse. Afin d'étudier la réponse du système aux perturbations, on observe l'évolution de l'effort de portance exercé sur la structure. Cet effort est la projection sur la direction perpendiculaire à l'écoulement incident de l'intégrale de (19) sur la structure. En calculant les auto-spectres de portance et les inter-spectres perturbation - portance, pour différentes valeurs de  $M^*$  et de  $K^*$  on met en évidence leur influence sur la dynamique du système. Pour caractériser cette dynamique, on simule, à l'aide du modèle présenté ci-dessus, la réponse du système avec la série stochastique pour  $\|\underline{U}_\infty\|$  comme condition aux limites. La simulation s'étend typiquement sur un temps adimensionnel de 180. La série temporelle de portance obtenue est ensuite analysée par traitement du signal. La figure 7 présente les résultats obtenus en choisissant  $L/C = 1$ . En observant les

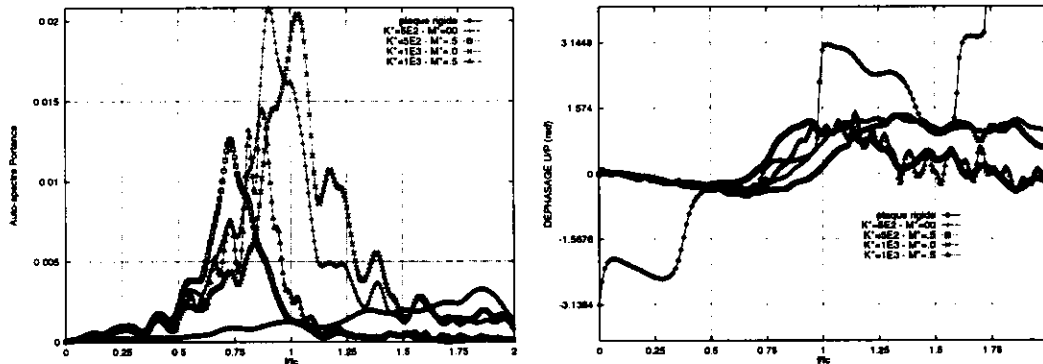


Figure 7 : (A) auto-spectres de portance - à gauche - et (B) déphasage perturbation / portance - à droite - pour différentes valeurs de  $K^*$  et  $M^*$ . Incidence 10 degrés,  $L/C = 1$ .

auto-spectres de portance (figure 7-A), on constate que le système répond de façon privilégiée à certaines fréquences, alors que la perturbation ne sélectionne aucune fréquence à priori entre  $[0 : 2]$ . Ce résultat met en évidence un comportement non linéaire : le système est capable de transférer de l'énergie dans le domaine spectral pour la restituer à des fréquences correspondant aux maximums d'amplitudes. Ces pics s'identifient aux fréquences propres non linéaires du système mouillé. On remarque ainsi qu'une augmentation de  $K^*$  déplace ces fréquences propres vers la droite du domaine spectral alors que  $M^*$  a l'effet inverse (diminution des fréquences propres). De plus, on remarque que pour  $M^*$  augmentant, la réponse est atténuée (le maximum de l' auto-spectre est plus faible). En comparant au cas rigide (pas de déformation élastique ou

bien, puisque  $L/C = 1$ ,  $K^* \rightarrow \infty$  voir [5]), on observe que la déformation élastique a pour effet d'augmenter l'énergie de la réponse en portance, en donnant de la cambrure à la structure. Sur la figure 7-B, on a tracé le déphasage entre la perturbation de l'intensité du vent et la réponse en portance pour la gamme de fréquences réduites  $[0 : 2]$ . On remarque que l'introduction de l'élasticité stabilise le déphasage dans l'intervalle  $[-\pi/2 : \pi/2]$ , contrairement au cas rigide pour lequel le déphasage décrit l'intervalle  $[-\pi : \pi]$  sur la gamme de fréquences étudiée. De plus, le déphasage s'annule et devient positif pour des fréquences d'autant plus faibles que  $M^*$  est grand et  $K^*$  petit.

### 5.3 Forçage du bord de fuite :

On considère maintenant un écoulement incident stationnaire, uniforme en espace et d'intensité  $\|\underline{U}_\infty\|$ , orienté selon l'axe des  $x$ . Le bord d'attaque de l'obstacle (en  $s = 0$ ) est fixe et placé à l'origine  $O$  du repère de l'étude. Le bord de fuite (en  $s = L$ ) est animé d'une cinématique donnée ci-dessous :

$$\begin{aligned} t^* &= t\|\underline{U}_\infty\|/C \\ \alpha(t^*) &= \alpha_0 + \alpha_\epsilon \cos(2\pi f^r t^*) \\ f^r &= f/f^* = fC/\|\underline{U}_\infty\| \\ \underline{X}(s=L, t^*) &= C \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t^*)) \\ -\sin(\alpha(t^*)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\alpha(t)$  est l'incidence de l'obstacle, définie par rapport à la direction joignant les deux extrémités ;  $f^r$  est la fréquence réduite de perturbation de la position du bord de fuite. Elle compare le temps caractéristique dans le fluide à la période de la perturbation. La perturbation est donc paramétrisée par  $\alpha_0$  l'incidence moyenne,  $\alpha_\epsilon$  l'amplitude de perturbation et  $f^r$ .

Dans la suite, on fixe  $\alpha_0 = 15$  degrés, et on étudie le signal de portance en régime établi pour différentes valeurs de  $\alpha_\epsilon$ , de  $f^r$  et des paramètres du système  $K^*$ ,  $M^*$  et  $L/C$ .

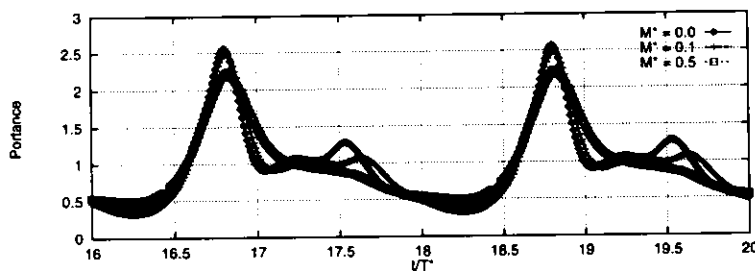


Figure 8 : Evolution de la portance sur deux périodes avec  $L/C = 1$  -  $\alpha_\epsilon = 3$  -  $K^* = 5E2$  -  $f^r = 0.5$ , pour différentes valeurs de  $M^*$ .

Sur la figure 8, bien que la fréquence réduite de perturbation soit 0.5, le signal de portance présente des modes d'ordres supérieurs. En particulier, le mode  $f = 2f^r$  apparaît clairement pour  $M^* = 0$  et s'atténue quand  $M^*$  augmente.  $M^*$  pénalise à nouveau les fréquences élevées et donc les harmoniques de la fréquence d'excitation. Ces observations sont confirmées par l'étude des auto-spectres de portance.

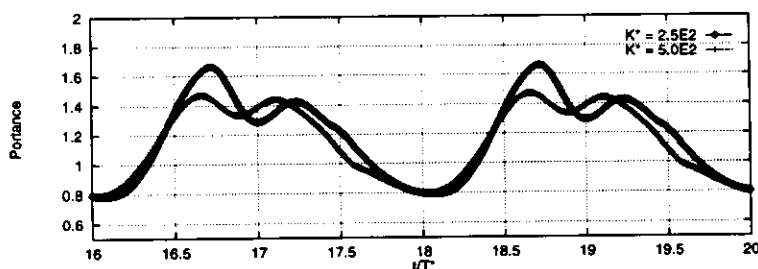


Figure 9 : Evolution de la portance sur deux périodes avec  $L/C = 1.01$  -  $\alpha_\epsilon = 2$  -  $M^* = 0$  -  $f^r = 0.5$ , pour deux valeurs de  $K^*$ .

Sur la figure 9, le signal de portance est tracé pour deux valeurs de  $K^*$ . Les effets élastiques influent sensiblement la solution, même si  $L > C$  autorise des déformations sans allongements. Le mode de déformation inextensible (voir Charvet [9]), qui apparaît pour  $L > C$ , n'est pas seul suffisant pour décrire la dynamique du système. Le calcul montre en effet qu'il faut prendre en compte les transferts entre les énergies élastiques dans le solide et cinétiques dans le fluide. De plus, la portance moyenne est d'autant plus élevée que  $K^*$  est petit car les allongements

sont moins pénalisés et la structure est en conséquence plus creuse. Les comportements non linéaires sont favorisés quand les rapports  $L/C$  sont grands et  $K^*$  petits (favorisant les grands déplacements), ou bien par des perturbations de grandes amplitudes et de fréquences proches des fréquences propres mouillées. La figure 10 donne, pour une telle situation, un exemple de réponse faisant intervenir un grand nombre de modes.

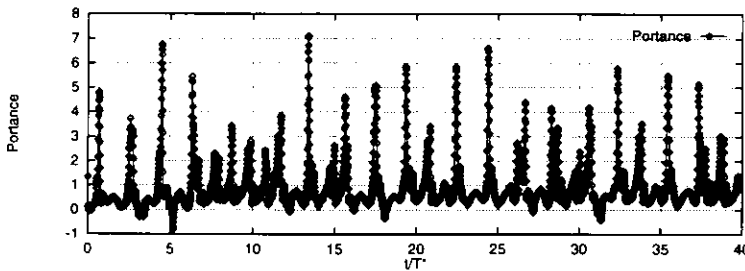


Figure 10 : Signal de portance obtenu avec  $L/C = 1.03$  —  
 $\alpha_\epsilon = 3$  —  $M^* = 0.2$  —  
 $K^* = 5E2$  —  $f^r = 1$ .

## 6 Extension au problème tridimensionnel.

Les résultats de la section précédente montrent la capacité du modèle à fournir des informations sur le comportement non linéaire du système (coefficient d'amortissement aéroélastique, critères d'efficacité, ...) et qui peuvent être utiles pour le concepteur de voiles. Cependant, pour apporter une aide opérationnelle, les modèles doivent être étendus aux cas tridimensionnels afin de résoudre le problème pour une dynamique tourbillonnaire et des conditions aux limites réalistes (en particulier sur le bord de fuite des voiles qui est un bord libre). Le problème tridimensionnel est plus complexe à traiter, mais il n'introduit pas de difficulté théorique supplémentaire par rapport au cas plan. En fait, les modèles de structure et d'écoulement présentés plus haut se généralisent assez facilement pour une direction d'espace supplémentaire :

- **Modèle mécanique de voile :** dans [4], on montre comment la déformation d'une voile, constituée d'un assemblage de tissus orientés, peut être modélisé à l'aide d'un réseau de fils. Ce modèle conduit à une équation variationnelle qui est une généralisation de l'Eq.(6) pour deux directions de contraintes internes (les directions des fils du tissu constitutif) et un espace de travail à trois dimensions. L'introduction de la dynamique déconvexifie de nouveau le problème.
- **Modèle d'écoulements tridimensionnels :** La modélisation d'écoulements tridimensionnels tourbillonnaires de fluide parfait a été intensivement étudiée. Pour des obstacles minces, la résolution associe généralement une méthode intégrale (surface portante) à un traitement lagrangien du sillage. Citons en particulier [6] et pour les applications aux voiles [9], [1].

Le problème d'interaction peut alors être résolu par un couplage s'articulant sur un schéma identique à celui introduit dans la section 4. Cependant, les temps de calcul pour déterminer les solutions dans les domaines fluides et solides étant très élevés, les modèles tridimensionnels ne permettent en l'état de déterminer que des solutions stationnaires. Un exemple de ce type de calcul est présenté ci-après. Il s'agit de rechercher la configuration d'équilibre d'un génois de First Class 8 dans un écoulement de 25 *nds* à 20 degrés d'incidence. La voile est approchée par un maillage déstructuré et on ne connaît que les longueurs naturelles séparant les sommets des éléments et les modules élastiques dans chaque direction de fil. Aucune configuration d'équilibre approchée, à priori, n'est nécessaire seules les conditions aux limites (les points fixes) sont à préciser. La voile est ensuite mise en forme, à l'aide par exemple d'un chargement uniforme ([4]). Ce calcul fournit une configuration admissible qui est notée  $C^0$ . On résout l'écoulement autour de  $C^0$ , considérée rigide, pendant un temps suffisamment long pour que les efforts  $\mathcal{F}^1$  convergent. On calcule alors la configuration  $C^1$ , solution du problème de structure avec  $\mathcal{F}^1$ . on reprend ensuite le problème fluide, avec le sillage de  $C^0$  précédemment calculé, et la géométrie

$C^1$  pour l'obstacle, jusqu'à convergence des efforts  $\mathcal{F}^2$ . Le processus est répété (Figure 11) tant que les configurations  $C^k$  successives diffèrent d'une quantité significative (Figure 12).

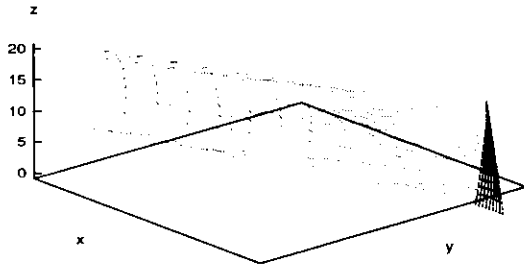


Figure 11 : Sillage obtenu lors de la mise en équilibre du génois de FC 8. Chaque perturbation du sillage correspond à l'introduction d'une nouvelle configuration d'équilibre  $C^k$  pour les efforts obtenus avec  $C^{k-1}$ . On observe que cette perturbation décroît au fur et à mesure que la solution converge.

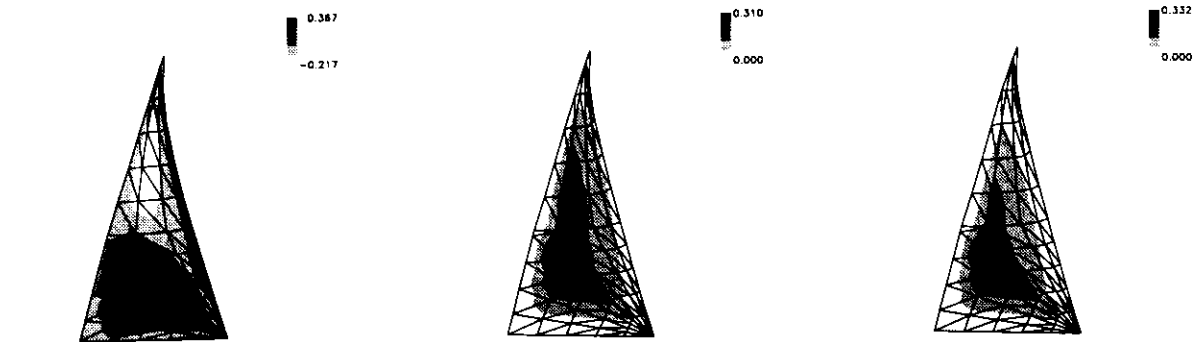


Figure 12 : Lignes de niveau du creux (distance au plan passant par les 3 extrémités) des configurations initiale  $C^0$  (à gauche), intermédiaire (au centre) et finale  $C^{60}$  (à droite) d'un génois de FC 8 dans un vent de 25 *nds* à 20 degrés d'incidence. Entre  $C^0$  et  $C^{60}$ , le point d'écoute (extrémité inférieure droite) est déplacé de 0.05 *m* vers le bas - en termes marins, le génois est bordé.

Pour des simulations instationnaires, le nombre d'itérations sur le couplage, nécessaire à chaque pas de temps, rend inaccessible la résolution du problème sur des temps longs. Une parallélisation des codes de calcul de structure et d'écoulement semble incontournable pour étudier la réponse en régime établi et pour réaliser des simulations stochastiques.

## 7 Conclusion.

Nous avons présenté un modèle pour simuler l'interaction d'une structure unidimensionnelle flexible avec un écoulement plan instationnaire. On a souhaité souligner l'influence non linéaire des grandes déformations sur la dynamique du système. Les modèles de structure et de fluide reposent sur des hypothèses simplificatrices qui peuvent être discutées :

- Le modèle élastique est établi en utilisant une hypothèse de comportement idéalement flexible de la structure : les efforts de flexion sont négligés. Cette hypothèse n'est réaliste que pour des structures de très faible épaisseur telles que les voiles sans dispositif rigidifiant. Néanmoins, en l'absence de résultats expérimentaux permettant de valider le modèle, l'influence des énergies de flexion devra être estimée en les considérant dans le modèle élastique. Toujours dans le but de mieux approcher le comportement des voiles réelles, il faudrait compléter le modèle de structure avec des éléments de type poutre pour traiter le cas de voiles lattées.
- Le modèle de fluide parfait choisi appelle quelques commentaires. Tout d'abord, ce modèle ne permet pas de considérer des situations où l'écoulement est décollé, en raison des effets dynamiques ou parce que l'incidence de décrochage statique est dépassée. Ces effets, liés à la viscosité, ne peuvent être pris en compte dans le modèle et l'on ne peut

pas définir de critère d'apparition du décollement qui établirait les limites du modèle en terme d'incidence, d'amplitude et de fréquence de perturbation. Malgré tout, on peut espérer que les effets élastiques, en conférant une plus grande adaptabilité de la structure à l'écoulement, retardent l'apparition du décollement.

Les résultats présentés mettent en évidence un comportement non linéaire du système en interaction. Ce comportement peut être étudié par analyse stochastique ou par des excitations paramétrées, fournissant des informations sur la réponse du système (déphasage, interspectre, amortissement). Le modèle permet de comprendre les mécanismes intervenant lors de l'interaction et d'identifier l'influence des grandeurs caractérisant le système. L'approche spectrale est adaptée à une description complète du comportement du voilier, en interaction avec la houle et le vent, à l'aide de fonctions de transfert non linéaires (couplage des fonctions de transfert hydrodynamique et aéroélastique). Dans ce but, la résolution du problème tridimensionnel est nécessaire, mais elle nécessite un important effort d'optimisation des codes de calcul. Aussi, avant de commencer ce travail, il serait souhaitable de valider les résultats numériques pour le problème plan.

**Remerciements :** Les auteurs remercient le Conseil Régional de la Haute Normandie qui a financé ce travail, ainsi que la société Delta Voiles qui nous a communiqué les mesures du génois de FC 8 de la section (6) et pour sa coopération.

## Références

- [1] F. HAUVILLE. *Optimisation des méthodes de calculs d'écoulements tourbillonnaires instationnaires*. PhD thesis, Université du Havre, 1996.
- [2] T. CHARVET & F. HAUVILLE & S. HUBERSON. Décomposition linéaire / non linéaire d'écoulements instationnaires. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 318, Série II:1019–1026, 1994.
- [3] T. FUKASAWA & M. KATORI. Numerical approach to aeroelastic responses of three-dimensional flexible sails. In *The Eleventh Chesapeake Sailing Yacht Symposium*, 1992.
- [4] O. LE MAITRE & S. HUBERSON & J. E. SOUZA DE CURSI. Application of a non convex model of fabric deformations to sail cut analysis. *Jnl. of Wind Engineering & Industrial Aerodynamics*, 1997.
- [5] O. LE MAITRE & S. G. HUBERSON & J. E. SOUZA de CURSI. Large displacement analysis for ideally flexible sails. In *ECCOMAS*, 1996.
- [6] J. KATZ & A. PLOTKIN. *Low-Speed Aerodynamics, from wing theory to panel methods*. Mc Graw-Hill Book Co., 1991.
- [7] C. REHBACH. Calcul d'écoulements tri-dimensionnels instationnaires de fluide parfait avec nappes tourbillonnaires. Document ONERA - Rapport 10/1737 AY 306, 12/1737 AY 308 et 13/1737 AY 312, 1979 - 1980.
- [8] G. K. BATCHELOR. *Introduction to Fluid Mechanics*. Cambridge University Press, 1969.
- [9] T. CHARVET. *Résolution numérique de problèmes liés au comportement des voiles de bateau*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 1992.