

**SIMULATION NUMÉRIQUE EN FLUIDE VISQUEUX
DU PROBLÈME BIDIMENSIONNEL DE RADIATION
PAR UN CORPS PERÇANT LA SURFACE LIBRE**

L. GENTAZ, B. ALESSANDRINI, G. DELHOMMEAU

*Division Hydrodynamique Navale, Laboratoire de Mécanique des Fluides
Ecole Centrale de Nantes*

B.P. 92101 44321 Nantes Cedex 3

Tel : 02 40 37 25 96, Fax : 02 40 37 25 23, e-mail : Lionel.Gentaz@ec-nantes.fr

RESUME

Cet article présente une méthode numérique originale permettant de simuler des écoulements bidimensionnels instationnaires et laminaires en présence d'une surface libre en fluide visqueux et incompressible.

Les équations de Navier-Stokes sous forme convective sont discrétisées par des méthodes de différences finies au second ordre en espace et en temps.

Les conditions aux limites de surface libre sont utilisées de façon à éviter l'emploi de conditions supplémentaires non-physiques sur cette frontière. De plus, un seul système linéaire couplé sur les inconnues de vitesses, pression et hauteur de surface libre est résolu à chaque itération en temps.

Des calculs ont été effectués pour des cylindres perçant la surface libre avec différents types de mouvements forcés.

SUMMARY

This article presents an original numerical method to solve two-dimensional unsteady and laminar free surface flows in viscous fluid.

Navier-Stokes equations under convective form are discretised by second-order finite differences.

Only physical free-surface boundary conditions are needed in this method. A linearised system for velocities, pressure and free surface elevation is solved at each time iteration.

Computations have been undertaken for free surface-piercing bodies in heave, sway or roll forced motions.

1. INTRODUCTION

Une méthode originale résolvant les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles en présence d'une surface libre est présentée ici, le fluide étant supposé visqueux, incompressible et newtonien, l'écoulement instationnaire et laminaire.

Dans la plupart des méthodes actuelles simulant les écoulements réels à surface libre (Proceedings du CFD Workshop, 1994), les champs de vitesse et de pression sont déterminés à l'aide d'un algorithme itératif de type PISO ou SIMPLER (Patankar, 1980), l'élévation de surface libre étant actualisée après coup par intégration de la condition cinématique. De ce fait, un découplage existe entre les inconnues de vitesse et de pression d'une part et les inconnues de hauteur de surface libre d'autre part.

Ce principe, utilisé pour la simulation de l'écoulement autour d'un corps perçant en pilonnement forcé (Gentaz *et al.*, 1996), donne des résultats satisfaisants mais conduit à un certain nombre de problèmes :

- la condition cinématique étant utilisée pour le calcul de l'élévation de surface libre, la condition dynamique tangentielle et l'équation de continuité fournissent les deux conditions aux limites de surface libre pour les vitesses, la condition dynamique normale apparaissant comme une condition de Dirichlet pour la pression. En pratique, les problèmes numériques rencontrés conduisent à remplacer l'équation de continuité par une condition non-physique plus simple.
- l'intégration de la condition cinématique nécessite l'emploi de conditions non-physiques pour les inconnues de hauteur de surface libre aux extrémités de celle-ci. Il est alors impossible d'effectuer un traitement précis des conditions aux limites de surface libre (avec des termes de viscosité ou de tension superficielle) dans la région proche du corps perçant. Dans ces conditions, la singularité de la condition cinématique à l'intersection surface libre-paroi solide, résolue par l'introduction d'un ménisque, peut conduire à l'arrêt de la simulation numérique lorsque la pente de ce ménisque devient trop forte. L'utilisation d'une extrapolation linéaire de la surface libre dans la région du ménisque permet la poursuite des calculs en résolvant partiellement le problème évoqué précédemment. Cette solution n'est cependant guère satisfaisante et il est impossible de prendre en compte les conditions aux limites de surface libre exactes.

La méthode proposée ici s'appuie sur l'utilisation de la condition dynamique normale pour calculer la déformée de surface libre. Dès lors, la condition cinématique et la condition dynamique tangentielle fournissent les deux conditions aux limites physiques pour les vitesses sur la surface libre : aucune condition aux limites non-physique n'est donc à rajouter sur la surface libre.

Le système linéaire en vitesses-pression-hauteur de surface libre obtenu est résolu de façon couplée. La conservation globale de la masse est alors assurée et le caractère implicite du problème est renforcé, même si le système linéaire à résoudre est de taille plus importante et de structure plus complexe.

Les équations du problème écrites dans un système de coordonnées curvilignes évoluant avec le domaine fluide seront donc discrétisées par des schémas de différences finies précis au second ordre en espace et en temps. La localisation retenue pour les inconnues est une localisation mixte : les composantes cartésiennes de la vitesse (U^1 , U^2) sont placées aux nœuds du maillage, la pression (P) au centre des mailles élémentaires, et les élévations de surface libre (H) au centre des interfaces constituant la surface libre, ceci afin de ne pas placer d'inconnues sur la singularité de la condition cinématique (c'est-à-dire à l'intersection surface libre-paroi solide). L'équation de conservation de la masse est utilisée par le biais d'une équation de pression. Une interpolation de type Rhie et Chow (Rhie et Chow, 1983) est utilisée pour la discrétisation de cette équation afin d'éviter le découplage pair-impair rendu possible par la localisation mixte tout en conservant pour les schémas une précision au second ordre. Cette interpolation de Rhie et Chow est généralisée pour les mailles en contact avec la surface libre (Alessandrini *et al.*, 1995, 1996) afin de rendre inversible le bloc matriciel de pression et de faciliter l'inversion du

système linéaire totalement couplé. Ce système est résolu par un algorithme itératif de type CGSTAB (Van der Vorst, 1992) avec un préconditionnement LU incomplet du seul bloc de pression.

Cette méthode a été utilisée dans le cadre du problème bidimensionnel d'un corps perçant la surface libre en pilonnement forcé (Gentaz, 1995). Les résultats présentés portent sur la généralisation de cette méthode pour traiter des mouvements de cavalement ou de roulis. Les coefficients hydrodynamiques obtenus, pour différents types de mouvements forcés, avec la méthode couplée sont comparés avec des résultats expérimentaux ou numériques.

2. EQUATIONS

Les équations de Navier-Stokes pour un écoulement laminaire sont écrites sous forme convective dans le repère cartésien (O, x^1, x^2) . x^1 est confondu avec la surface libre au repos et x^2 , de direction verticale ascendante, est l'axe de symétrie du corps en mouvement forcé. Les variables dépendantes du problème sont les coordonnées cartésiennes de la vitesse (u^1, u^2) , la pression dynamique $p = P + \rho g x^2$ et la hauteur de surface libre h .

Un système de coordonnées curvilignes lié au maillage est défini afin de prendre en compte la géométrie du domaine fluide et de faciliter l'écriture des conditions aux limites. Le corps en mouvement aura pour équation $\varepsilon^1 = 0$, les deux surfaces libres distinctes étant définies par les équations $\varepsilon^2 = 0$ et $\varepsilon^2 = \varepsilon_{\max}^2 = 1$ et la frontière extérieure par $\varepsilon^1 = \varepsilon_{\max}^1 = 1$ (fig. 1). A la fin de chaque itération en temps, un remaillage du domaine est effectué afin de prendre en compte l'évolution de la surface libre et le mouvement du corps.

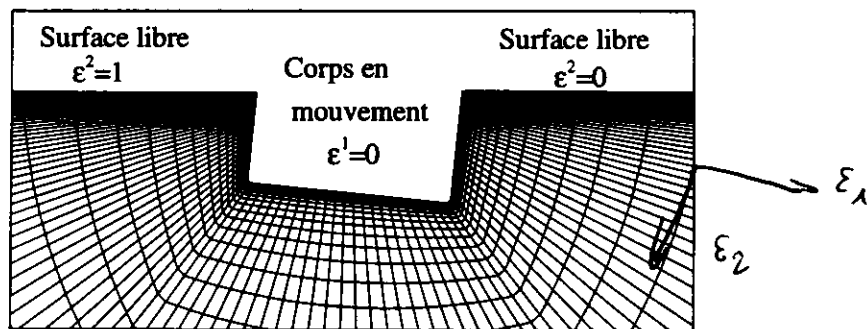


Fig. 1 : allure du maillage à proximité du corps au cours d'une simulation.

Une transformation partielle entre l'espace physique et l'espace de calcul (défini par les coordonnées curvilignes) est utilisée et la métrique correspondante, faisant intervenir les bases locales covariantes a_i et contravariantes a^i , le jacobien J , le tenseur métrique contravariant g^{ij} , les paramètres de contrôle de grille f^k et les vitesses de déplacement du maillage v_g^i , est calculée après chaque remaillage du domaine fluide.

Les équations de quantité de mouvement s'écrivent alors pour l'écoulement laminaire étudié :

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t} + \left(a_j^k (u^j - v_g^j) - v_f^k \right) \frac{\partial u^\alpha}{\partial \varepsilon^k} - v_g^{kt} \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \varepsilon^{k2}} + \frac{1}{\rho} a_\alpha^k \frac{\partial p}{\partial \varepsilon^k} = v_g^{kt} \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \varepsilon^k \partial \varepsilon^t} \Big|_{k \neq t} \quad \alpha \in \{1, 2\} \quad (1)$$

et l'équation de continuité :

$$a_j^i \frac{\partial u^j}{\partial \varepsilon^i} = 0 \quad (2)$$

Les conditions aux limites de surface libre sont au nombre de trois et se composent d'une condition cinématique et de deux conditions dynamiques tangentielle et normale.

La condition cinématique (3) exprime le fait que les particules fluides situées sur la surface libre demeurent sur cette frontière au cours de l'écoulement. L'élévation de surface libre h est considérée comme une fonction de ε^1 uniquement.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{a_{11}}(u^1 - v_g^1) \frac{\partial h}{\partial \varepsilon^1} = u^2 \quad (3)$$

Les conditions dynamiques tangentielle (4) et normale (5) correspondent à l'équilibre des contraintes à la traversée de la surface libre, la pression étant supposée constante et égale à zéro au-dessus de la surface libre :

$$\left(a_m^j a_m^2 a_{1i} + a_m^j a_i^2 a_{1m} \right) \frac{\partial u^i}{\partial \varepsilon^j} = 0 \quad (4) \quad \rho g h + \frac{\gamma}{R} - p = -2\rho v \frac{a_i^2 a_j^2}{|a^2|^2} a_j^k \frac{\partial u^i}{\partial \varepsilon^k} \quad (5)$$

γ et R représentent respectivement le coefficient de tension superficielle et le rayon de courbure de la surface libre au point considéré.

3. DISCRETISATION DES EQUATIONS

Les maillages monoblocs structurés sont générés à l'aide d'une méthode algébrique d'interpolation transfinite (Eriksson, 1982).

Les inconnues discrètes de vitesses U_i^α , de pression P_i et de hauteur de surface libre H_i sont localisées respectivement aux nœuds du maillage, au centre des mailles et au centre des segments appartenant à la surface libre (fig. 2).

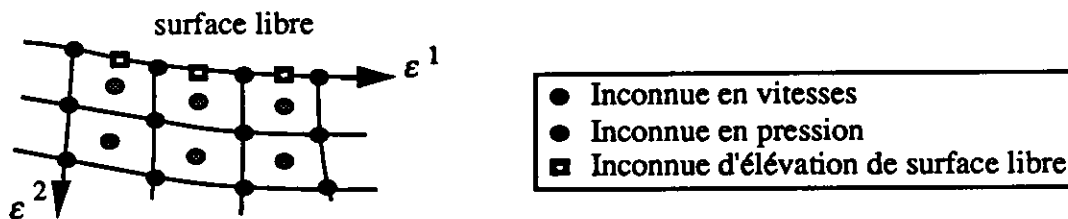


Fig. 2 : localisation des inconnues dans la méthode couplée.

Cette localisation mixte comporte les avantages suivants :

- les conditions aux limites sur les vitesses sont facilement applicables.
- la conservation de la masse est toujours effectuée sur des volumes fixes définis par les mailles élémentaires.
- l'écriture de la quantité de mouvement aux nœuds du maillage est naturelle, les vitesses horizontales et verticales y étant toutes deux situées.

Tous les schémas de différences finies utilisés sont, sauf indication contraire, du second ordre. Dans ce qui suit, les symboles \sim et \bullet placés au-dessus des variables correspondent à des interpolations de ces variables respectivement au centre des interfaces et aux nœuds du maillage.

3.1. Discrétisation des équations de transport

Les équations (1) sont linéarisées en calculant les termes des métriques et le membre de droite au pas de temps précédant le pas de temps courant. Les dérivées spatiales sont décentrées pour les termes de convection et centrées pour les termes de diffusion non croisés. Ces derniers sont traités de façon implicite afin de renforcer la dominance diagonale du système. Le gradient de

pression est discrétisé au nœud i du maillage à l'aide des 4 inconnues de pression l'entourant. Il vient :

$$U_i^\alpha + (M_u)_{ij} U_{j \neq i}^\alpha + (M_p)_{ik}^\alpha P_k = (f_u)_i^\alpha \quad \alpha \in \{1,2\} \quad (6)$$

3.2. Discrétisation des conditions aux limites de surface libre

L'originalité de cette méthode est de s'appuyer non plus sur la condition cinématique mais sur la condition dynamique normale pour exprimer les hauteurs de surface libre.

Les conditions cinématique et dynamique tangentielle sont donc utilisées comme conditions aux limites sur les vitesses. L'équation cinématique (3) est linéarisée en explicitant les dérivées spatiales de h puis discrétisée aux nœuds du maillage, ce qui donne en tout nœud i de la surface libre une relation implicite entre les composantes de la vitesse :

$$r_1 U_i^1 + r_2 U_i^2 + r_h \tilde{H}_i = s_h \quad (7)$$

L'équation dynamique tangentielle est également discrétisée aux nœuds du maillage, soit pour le nœud i :

$$v_{11} U_i^1 + v_{1j} U_{j \neq i}^1 + v_{2j} U_j^2 = 0 \quad (8)$$

Le système linéaire formé par ces deux équations (7) et (8) est ensuite résolu analytiquement en U_i^1 et U_i^2 (i étant le numéro du nœud considéré) pour donner deux conditions aux limites de surface libre de structure analogue :

$$U_i^\alpha + (M_{su})_{ij}^\alpha U_{j \neq i}^\alpha + (M_{sh})_i^\alpha \tilde{H}_i = (f_s)_i^\alpha \quad \alpha \in \{1,2\} \quad (9)$$

La condition dynamique normale, quant à elle, est discrétisée au centre des interfaces formant la surface libre et est représentée par l'équation (10). La pression sur la surface libre est extrapolée linéairement à partir des deux inconnues de pression P_j situées au centre des deux mailles situées sous l'interface f considérée :

$$H_f + (M_{sp})_{ff} P_j = (f_h)_f \quad (10)$$

Le terme de tension superficielle γR est en partie implicite et les termes visqueux placés dans le second membre (et donc traités sous forme explicite).

3.3. Discrétisation de l'équation de pression par une méthode de Rhie et Chow généralisée

L'équation de pression est obtenue en écrivant la divergence de la vitesse au centre de chaque maille élémentaire à l'aide des équations de transport interpolées au centre des interfaces de la maille considérée. Une interpolation de type Rhie et Chow (Rhie & Chow, 1983) est utilisée pour éviter les problèmes de découplage pair-impair. Pour cela, les équations de transport (6) sont réécrites en introduisant les pseudo-vitesses $U_i^{*\alpha}$ définies aux nœuds du maillage par :

$$U_i^{*\alpha} + (M_u)_{ij} U_{j \neq i}^\alpha = (f_u)_i^\alpha \quad \alpha \in \{1,2\} \quad (11)$$

Les équations de transport ainsi modifiées deviennent :

$$U_i^\alpha - U_i^{*\alpha} + (M_p)_{ik}^\alpha P_k = 0 \quad \alpha \in \{1,2\} \quad (12)$$

La méthode de Rhie et Chow consiste alors à interpoler linéairement au centre des interfaces les vitesses et les pseudo-vitesses de l'équation (12), le gradient de pression étant directement reconstruit. Pour cela, les dérivées en pression suivant chacune des deux directions curvilignes sont discrétisées au centre des interfaces f à l'aide des schémas présentés ci-dessous (fig. 3) :

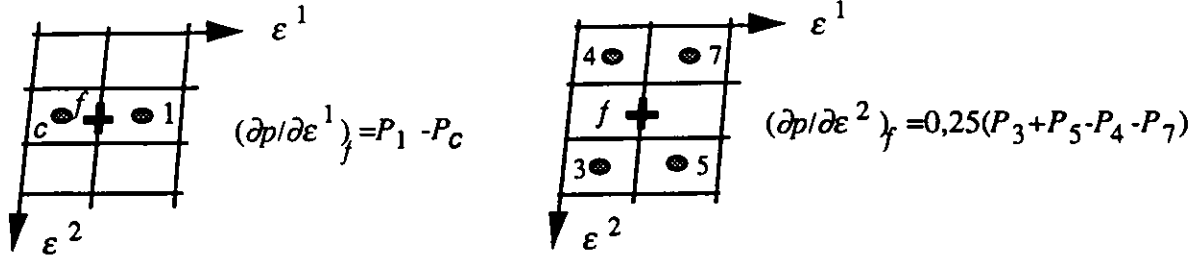


Fig. 3 : Discretisation des dérivées curvilignes de la pression au centre des interfaces dans la procédure Rhie et Chow.

Les équations (12), transposées au centre de chacune des quatre interfaces f_k ($k \in \{1,2,3,4\}$) délimitant la maille où l'on cherche à discrétiser l'équation de pression, s'écrivent :

$$\bar{U}_{f_k}^\alpha - \bar{U}_{f_k}^{*\alpha} + (\bar{M}_p)_{f_k j}^\alpha P_j = 0 \quad \alpha \in \{1,2\} \quad (13)$$

L'équation de pression est alors obtenue en reportant les équations (13) dans l'expression de la divergence calculée au centre c de la maille considérée, soit :

$$(\text{div} \bar{u})_c = (a_\alpha^1) (\bar{U}_{f_2}^\alpha - \bar{U}_{f_1}^\alpha) + (a_\alpha^2) (\bar{U}_{f_4}^\alpha - \bar{U}_{f_3}^\alpha) \quad (14)$$

L'équation de pression relie donc les pseudo-vitesses définies aux nœuds de la maille considérée et les neuf inconnues en pression situées aux centres de la maille considérée et des mailles voisines (fig. 4).

Le sous-bloc relatif aux inconnues de pression M_{dp} ainsi obtenu n'est pas inversible même si le système linéaire totalement couplé en vitesses-pression-hauteur de surface libre l'est et admet une solution unique (pour le problème à surface libre uniquement, la pression étant alors parfaitement définie). Afin de rendre ce bloc de pression inversible, le calcul de l'équation de pression est modifié dans les mailles en contact avec la surface libre en utilisant les conditions aux limites de surface libre (Alessandrini et al., 1995, 1996).

Les inconnues de hauteur de surface libre sont éliminées des conditions de surface libre (9) à l'aide de la condition dynamique normale (10), d'où :

$$U_i^\alpha + (M_{su})_{ij}^\alpha U_{j \neq i}^\alpha - (M_{sh})_i^\alpha (\tilde{M}_{sp})_{ij}^\alpha \tilde{P}_j = (f_s)_i^\alpha - (M_{sh})_i^\alpha (\tilde{f}_h)_i^\alpha = (f_{su})_i^\alpha \quad \alpha \in \{1,2\} \quad (15)$$

La méthode de Rhie et Chow généralisée consiste à récrire l'équation (15) au centre de l'interface formant la surface libre (notée f_3) en interpolant les vitesses et pseudo-vitesses et en rediscrétisant le gradient de pression, soit :

$$\bar{U}_{f_3}^\alpha - \bar{U}_{f_3}^{*\alpha} - (\bar{M}_{sh})_{f_3}^\alpha (M_{sp})_{f_3 j}^\alpha P_j = (\tilde{f}_{sp})_{f_3}^\alpha \quad \alpha \in \{1,2\} \quad (16)$$

où les pseudo-vitesses sont définies par (valable uniquement aux nœuds de la surface libre) :

$$U_i^{*\alpha} + (M_{su})_{ij}^\alpha U_{j\neq i}^\alpha = (f_{su})_i^\alpha - (f_{sp})_i^\alpha = (f_{sv})_i^\alpha \quad \alpha \in \{1,2\} \quad (17)$$

Pour une maille en contact avec la surface libre, l'équation de pression est obtenue avec la relation (14) mais la contribution de l'interface sur la surface libre est donnée par les équations (16) et non pas par les équations (13) comme pour les autres interfaces.

Cette prise en compte des conditions aux limites de surface libre dans l'équation de pression permet d'obtenir un bloc de pression M_{dp} inversible dans le système couplé. L'équation de pression obtenue s'écrit alors de façon générale :

$$(M_{du})_{cj} U_j^{*\alpha} + (M_{dp})_{cj}^\alpha P_c = (f_p)_c \quad \alpha \in \{1,2\} \quad (18)$$

La répartition des inconnues intervenant dans l'équation de pression généralisée ou non est décrite sur la figure 4, la maille hachurée étant celle où l'équation de pression (18) est discrétisée.

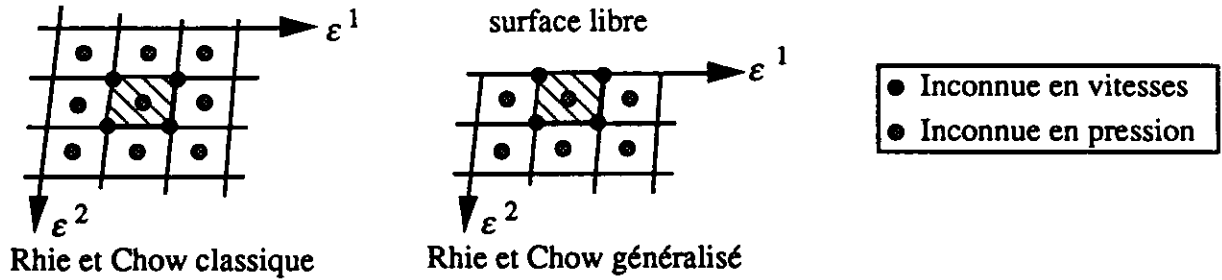


Fig. 4 : molécule de discrétisation de l'équation de pression.

4. RESOLUTION NUMERIQUE

A chaque itération en temps, les nouveaux champs de vitesse, pression et hauteur de surface libre sont obtenus par la résolution du système couplé (19) :

$$\begin{bmatrix} I_d & & & & -I_d & & & & & & M_p & & \\ M_{shu} & M_{shu} & M_{shu} & & & & & & & & M_{shp} & & \\ M_{sb} & M_{sb} & M_{sb} & & & & & & & & & & \\ M_u & M_u & M_u & I_d & & & & & & & & & \\ M_{su} & M_{su} & M_{su} & & I_d & & & & & & & & \\ & & & & & I_d & & & & & & & \\ & & & & & & -I_d & & & & & & \\ & & & & & & & M_{du} & M_{du} & M_{du} & & M_{dp} & \\ & & & & & & & & & & & M_{sp} & I_d \end{bmatrix}
 \begin{pmatrix} U(\Omega) \\ U(\Omega_s) \\ U(\Omega_b) \\ U^*(\Omega) \\ U^*(\Omega_s) \\ U^*(\Omega_b) \\ P(\Omega_v) \\ H(\Omega_{si}) \end{pmatrix} =
 \begin{pmatrix} f_{su} \\ f_{sb} \\ f_u \\ f_{sv} \\ f_p \\ f_h \end{pmatrix} \quad (19)$$

Ω , Ω_s , Ω_b représentent l'emplacement des inconnues discrètes U et U^* respectivement dans le domaine intérieur, sur la surface libre, sur les autres frontières, Ω_v la localisation des inconnues de pression P et Ω_{si} celle des inconnues de surface libre H .

Les équations constituant ce système sont respectivement les équations de transport (12), les conditions aux limites de surface libre avec les inconnues vitesses-pression (15), des conditions aux limites d'adhérence pour les frontières autres que la surface libre, les relations entre les

inconnues en vitesses et pseudo-vitesses pour le domaine intérieur (11), la surface libre (17) et les autres frontières (on a alors simplement $U^\alpha = U^{*\alpha}$), l'équation de pression (18) et la condition dynamique normale (10) qui est la seule à faire intervenir les inconnues d'élévation de surface libre.

Le système linéaire (19) est résolu à l'aide d'un algorithme itératif de type CGSTAB (Van der Vorst, 1992), inspiré des méthodes de Gradient Conjugué (Joly, 1982), avec un préconditionnement LU incomplet sur le seul bloc de pression M_{dp} .

Seuls des algorithmes de ce type ou des techniques multigrilles peuvent inverser de façon efficace de tels systèmes matriciels.

Au cours d'un même pas de temps, des itérations sur les non-linéarités peuvent être effectuées afin d'améliorer le caractère implicite de la solution.

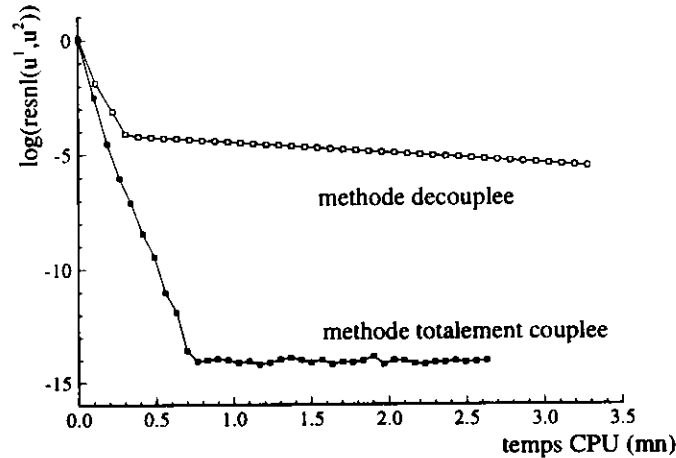


Fig. 5 : convergence du résidu non-linéaire.

La figure 5 montre l'efficacité de la méthode couplée présentée ici devant la méthode découplée (Gentaz *et al.*, 1996) basée sur la résolution de deux systèmes linéaires (un en vitesses-pression, issu des équations de transport et un en vitesses, issu de l'équation de continuité) par un algorithme de type SIMPLER, la hauteur de surface libre étant calculée après coup par intégration de la condition cinématique.

Avec la méthode couplée, les résidus non-linéaires (pour une itération en temps donnée) convergent bien jusqu'à zéro machine alors que la résolution par SIMPLER limite la convergence à 6 ordres pour la méthode découplée. La simulation d'écoulements instationnaires nécessitant une résolution précise à chaque itération en temps, la méthode couplée s'avère donc beaucoup mieux adaptée.

De plus, pour les cas de calcul présentés ci-dessous, le gain de temps CPU avec la méthode couplée par rapport à la méthode découplée est d'un tiers environ.

5. RESULTATS

Dans ce qui suit, les coefficients hydrodynamiques sont obtenus par développement en série de Fourier de la variation en temps des efforts hydrodynamiques s'exerçant sur le corps lorsque le régime stationnaire est atteint, soit en pratique, après 2 ou 3 périodes de mouvement.

5.1. Cylindre circulaire en pilonnement forcé

Le premier cas étudié est celui d'un cylindre circulaire de rayon r perçant la surface libre en pilonnement forcé (Gentaz *et al.*, 1996). La loi du mouvement est $x^2(t) = y_a \sin \omega t$ avec $y_a/r=0,2$ et $K_r = \omega^2 r/g$ variant de 0 à 2. Les calculs sont effectués en supposant l'écoulement symétrique par rapport à l'axe vertical de symétrie du corps : seule la moitié du domaine fluide est donc maillée. Des maillages de 5000 points (100 sur la surface libre, 50 sur le corps) ont été

utilisés.

Pour ces calculs, le fait d'itérer sur les non-linéarités permet d'améliorer les résultats et l'accord avec les expériences (Gentaz, 1995). Avec 2 itérations sur les non-linéarités, 2 h 30 CPU sont nécessaires pour une simulation de 10 s (avec un pas de temps de 0,02 s) sur une station de travail de 30 Mflops réels.

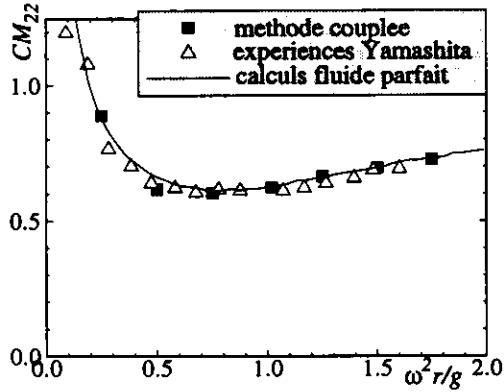


Fig. 6 : cylindre circulaire en pilonnement.
Masse ajoutée CM_{22} .

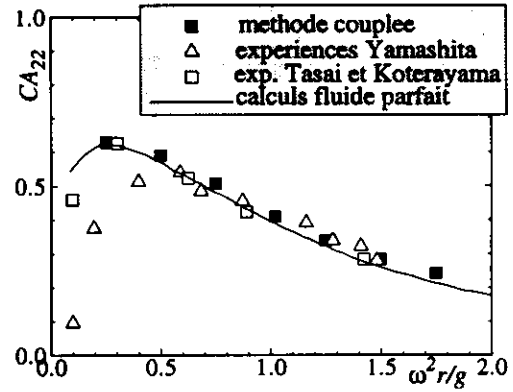


Fig. 7 : cylindre circulaire en pilonnement.
Amortissement CA_{22} .

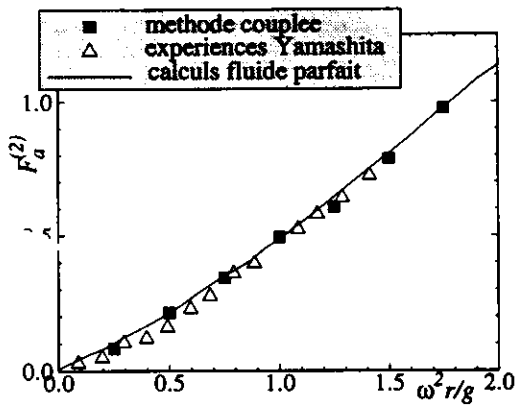


Fig. 8 : cylindre circulaire en pilonnement.
Force au second ordre $F_a^{(2)}$.

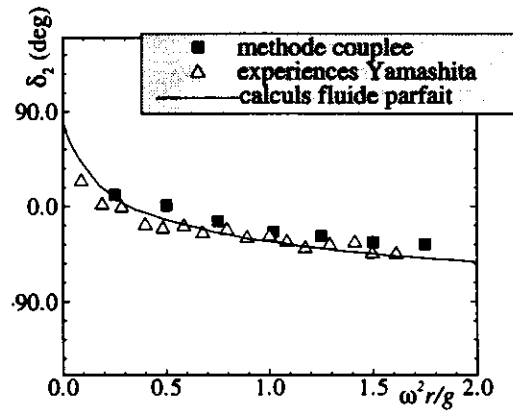


Fig. 9 : cylindre circulaire en pilonnement.
Déphasage au second ordre δ_2 .

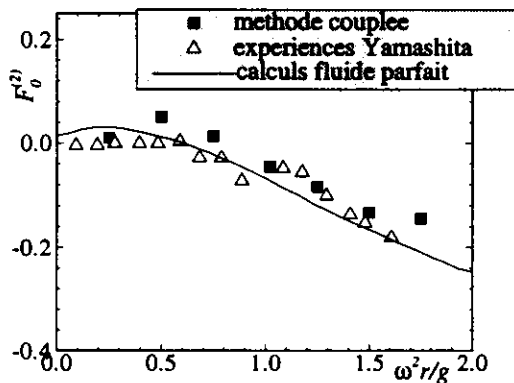


Fig. 10 : cylindre circulaire en pilonnement.
Force de dérive verticale $F_0^{(2)}$.

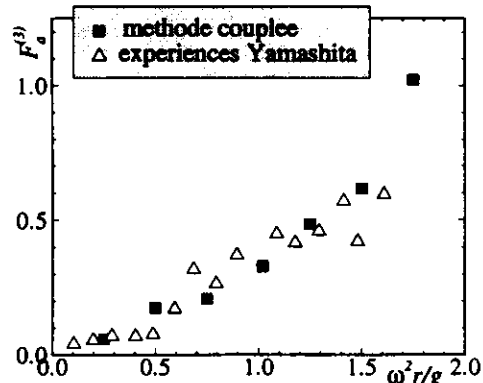


Fig. 11 : cylindre circulaire en pilonnement.
Force au troisième ordre $F_a^{(3)}$.

Les résultats obtenus sont en bon accord avec les données expérimentales (Yamashita, 1977; Tasai *et al.*, 1976) et les calculs en fluide parfait (Papanikolaou *et al.*, 1984) pour les masses

ajoutées (fig. 6) et les coefficients d'amortissement (fig. 7), les différentes grandeurs du 2^{ème} ordre (fig. 8 à 10), la force de dérive verticale (fig. 10) étant la partie constante de la force au second ordre. Les écarts importants sur la valeur expérimentale des coefficients d'amortissement apparaissent pour les basses fréquences, ce qui ne permet pas de juger de la justesse ou non des calculs effectués. L'accord avec les expériences sur les efforts au 3^{ème} ordre est également très satisfaisant (fig. 11). Il faut noter que ces efforts au 3^{ème} ordre sont facilement accessibles par l'analyse harmonique de la variation temporelle des efforts, ce qui n'est pas le cas avec les méthodes en fluide parfait basées sur des développements des différents termes suivant les puissances croissantes d'un petit paramètre.

5.2. Cylindre de section circulaire ou rectangulaire en cavement forcé

Des simulations ont ensuite été entreprises pour des corps de section circulaire ou rectangulaire en cavement (Guillerm, 1996), nécessitant la prise en compte de deux surfaces libres distinctes (voir fig. 1).

Outre les coefficients adimensionnels de masse ajoutée et d'amortissement, des coefficients de couplage sont présentés. Les coefficients CM_{ij} et CA_{ij} , avec i différent de j , sont respectivement les coefficients de masse ajoutée croisés et d'amortissement croisés. Ces coefficients sont relatifs au mouvement en j dans la projection de l'équation de la dynamique suivant i , les indices 1, 2 et 3 correspondant respectivement aux directions x^1 , x^2 et x^3 (axe perpendiculaire au plan de l'écoulement) et donc à des mouvements de cavement, pilonnement et roulis. Ces coefficients couplés nécessitent le calcul du moment suivant x^3 s'exerçant sur le corps en mouvement. L'ensemble des coefficients hydrodynamiques est adimensionnalisé suivant l'exemple de Vugts (Vugts, 1968) par :

$$CM_{ij} = \frac{a_{ij}}{\rho AB^2} \text{ et } CA_{ij} = \frac{b_{ij}}{\rho AB} \sqrt{\frac{B}{2g}} \quad (20)$$

où A est l'amplitude du mouvement dans la direction considérée et a_{ij} , b_{ij} les coefficients dimensionnels du 1^{er} ordre résultant de l'analyse harmonique des efforts (a_{ij} relatif aux termes d'accélération et b_{ij} aux vitesses).

Pour le cas d'un cylindre circulaire en cavement forcé, la loi du mouvement est donnée par $x^1(t) = x_a \sin \omega t$ avec $x_a = 0,02$ m, le rayon r du cylindre valant 0,15 m. Le coefficient B apparaissant dans l'expression $\omega \sqrt{B/2g}$ correspond au maître-bau du corps, soit 0,30 m ici.

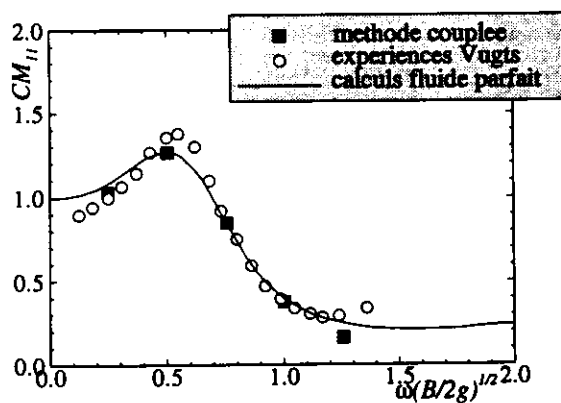


Fig. 12 : cylindre circulaire en cavement.
Masse ajoutée CM_{11} .

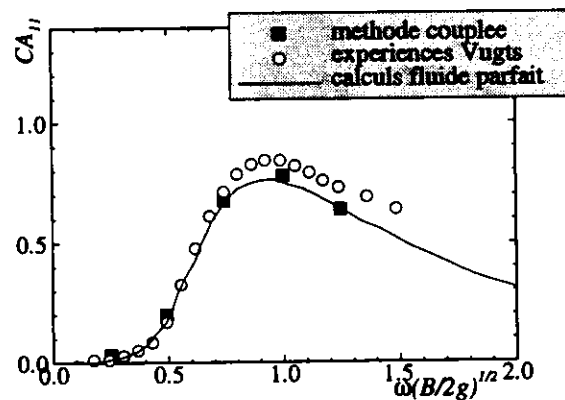


Fig. 13 : cylindre circulaire en cavement.
Amortissement CA_{11} .

Les calculs ont été effectués avec un maillage de 6000 points avec 100 points sur la surface libre. Une mise en mouvement progressive du corps (sur une période) ainsi que des itérations

sur les non-linéarités ont été utilisées.

Les masses ajoutées et les coefficients d'amortissement obtenus sont en bon accord avec les calculs fluide parfait et les résultats expérimentaux de Vugts (fig. 12 et 13), même si pour des $\omega\sqrt{B/2g}$ supérieurs à 1, les coefficients d'amortissement calculés numériquement sont légèrement sous-estimés. Les coefficients couplés CM_{31} et CA_{31} ne sont pas présentés car leurs valeurs expérimentales sont très faibles et du même ordre de grandeur que les erreurs de mesure.

Des calculs ont été ensuite effectués pour un cylindre de section rectangulaire en mouvement de cavement. Le rapport maître-bau sur tirant d'eau du corps B/T est pris égal à 2 avec $B=0,4$ m. Le mouvement imposé au corps est, comme précédemment, donné par la loi $x^1(t) = x_a \sin \omega t$ avec $x_a=0,02$ m. Là encore, les maillages utilisés comportent 10000 points (100 le long de la surface libre) et sont donc relativement grossiers. 10 s de simulation (1000 itérations avec un pas de temps de 0,01 s) nécessitent 30 mn CPU sur une station 30 Mflops.

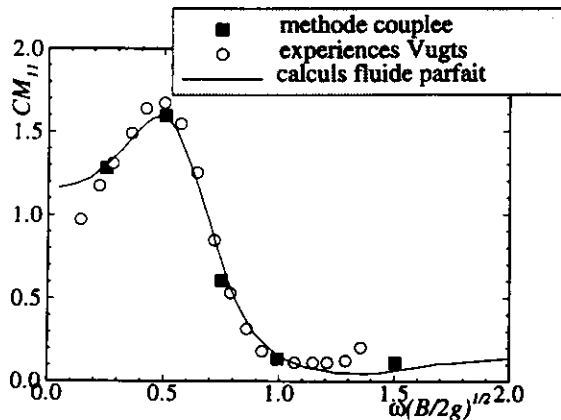


Fig. 14 : rectangle en cavement.
Masse ajoutée CM_{11} .

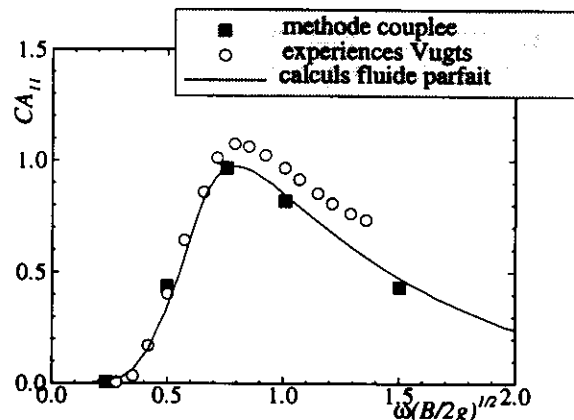


Fig. 15 : rectangle en cavement.
Amortissement CA_{11} .

Les résultats obtenus pour les masses ajoutées, les coefficients d'amortissement et les coefficients de masse ajoutée croisés sont en assez bon accord avec les résultats expérimentaux (fig. 14 à 16). Le léger décalage entre les résultats numériques et les expériences pour les plus hautes fréquences (fig. 15) peut être attribué, selon Vugts, à une petite erreur systématique due aux consignes demandées au système expérimental.

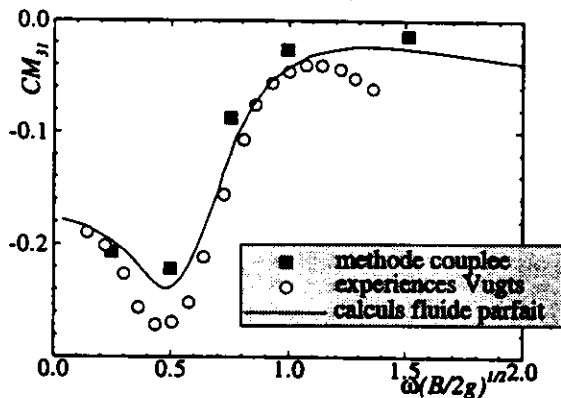


Fig. 16 : rectangle en cavement.
Coef. couplé CM_{31} .

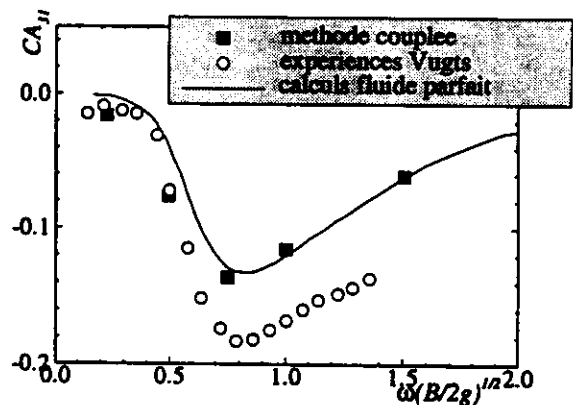


Fig. 17 : rectangle en cavement.
Coef. couplé CA_{31} .

Pour les coefficients d'amortissement croisés (fig. 17), des différences significatives entre les calculs et les expériences apparaissent. Pour des pulsations supérieures à $5,25 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$, les

coefficients calculés à partir des simulations par la méthode couplée suivent alors les résultats en fluide parfait et non plus les résultats expérimentaux.

Le maillage utilisé est sans doute trop grossier pour prendre en compte de façon suffisamment précise la formation de structures tourbillonnaires à proximité des coins du rectangle lors du mouvement de translation. Des calculs supplémentaires seront donc nécessaires pour essayer d'obtenir des résultats de meilleure qualité.

5.3. Cylindre de section rectangulaire en roulis forcé

Le dernier cas de calcul concerne un cylindre de section rectangulaire en roulis.

Le rapport B/T est de 2 et le mouvement en rotation imposé au corps est défini par $\phi(t) = \phi_a \sin \omega t$ avec $\phi_a = 0,1$ rad.

Les résultats sont comparés avec des calculs en fluide parfait, des calculs en fluide visqueux basés sur une méthode de type particulaire avec surface libre (Yeung *et al.*, 1996) pour une amplitude ϕ_a de 0,05 rad et les résultats expérimentaux de Vugts. Il a semblé intéressant de comparer ces différentes méthodes numériques bien que les deux amplitudes en roulis utilisées soient différentes. En effet, les résultats expérimentaux avec les amplitudes de 0,05 rad et 0,1 rad sont assez proches l'un de l'autre pour les masses ajoutées et les coefficients d'amortissement.

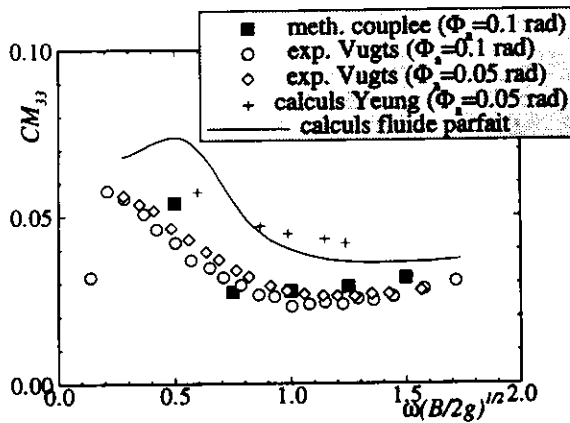


Fig. 18 : rectangle en roulis.
Masse ajoutée CM_{33} .

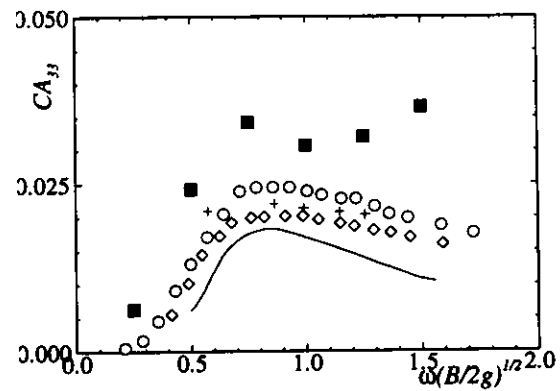


Fig. 19 : rectangle en roulis.
Amortissement CA_{33} .

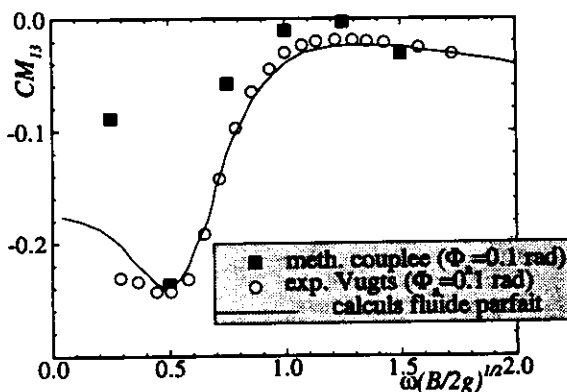


Fig. 20 : rectangle en roulis.
Coef. couplé CM_{13} .

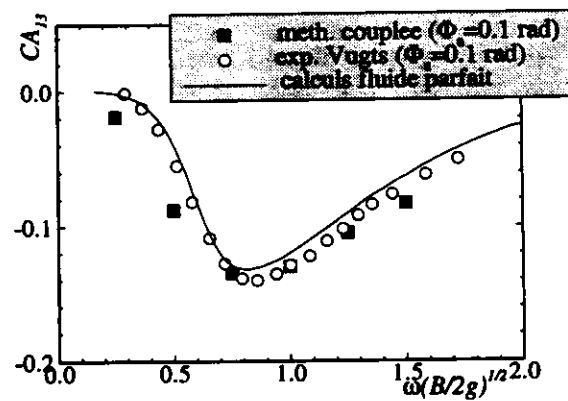


Fig. 21 : rectangle en roulis.
Coef. couplé CA_{13} .

La plupart des calculs a été effectuée avec un maillage de 10000 points (100 points suivant chacune des deux directions curvilignes) et un pas de temps de 0.01 s. Pour les fréquences les plus basses, l'emploi de maillages plus conséquents (23000 points) associé à des domaines

fluides de taille plus importante (la longueur d'onde des vagues générées étant plus grande) a été nécessaire.

Les résultats obtenus sur les masses ajoutées (fig. 18) sont en bon accord avec les résultats expérimentaux de Vugts. Par contre, les coefficients d'amortissement CA_{33} sont très largement surestimés par rapport aux expériences (fig. 19) alors que les résultats numériques en fluide visqueux obtenus par Yeung *et al.* sont très satisfaisants. Les maillages utilisés ici sont apparemment trop grossiers (en finesse dans la région du corps et en nombre de points) pour espérer approcher correctement les valeurs expérimentales de l'amortissement.

Les coefficients de masse ajoutée et d'amortissement croisés (fig. 20 et 21), quant à eux, sont correctement estimés par la méthode couplée, excepté le coefficient de masse ajoutée croisé pour la fréquence de roulis la plus faible. Il est à remarquer que la détermination expérimentale des masses ajoutées CM_{33} et CM_{13} est très difficile à basse fréquence, une petite erreur sur les mesures provoquant des écarts importants sur la valeur des coefficients (Vugts, 1968).

La figure 22 montre la répartition des iso-vorticités à proximité du corps dans le cas d'un rectangle en roulis (amplitude $\Phi_a = 0,1$ rad) à un temps égal à 6,5 s. Ce type d'écoulements apparaît comme extrêmement complexe avec la génération continue de nombreux tourbillons près des coins du rectangle. L'utilisation de méthodes numériques basées sur la résolution des équations de Navier-Stokes (respectant donc l'hypothèse du fluide visqueux) semble indispensable pour traiter correctement ces cas et pour déterminer de façon satisfaisante les différents coefficients hydrodynamiques, en particulier, les coefficients d'amortissement croisés ou non. De plus, seules ces méthodes permettent d'avoir une connaissance précise de la structure de l'écoulement instationnaire.

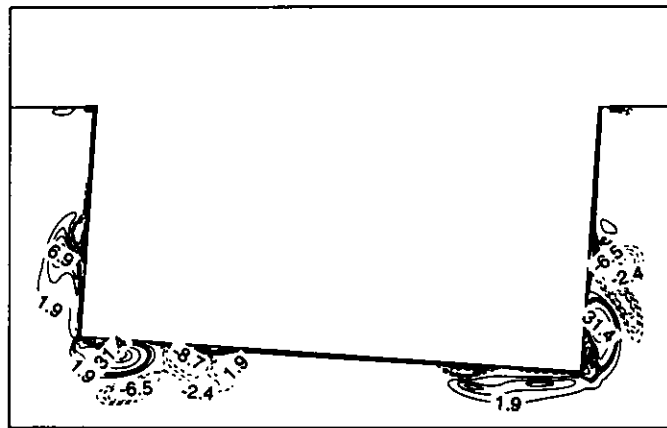


Fig. 22 : iso-vorticités à proximité d'un rectangle en roulis à $t=6,5$ s (amplitude du mouvement : $\Phi_a = 0,1$ rad).

CONCLUSION

Une méthode originale permettant de résoudre les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles avec surface libre a été présentée dans cet article.

Les premiers résultats obtenus sur le problème de radiation par un corps perçant sont satisfaisants et montrent le bien-fondé de cette méthode s'appuyant sur l'utilisation des conditions aux limites de surface libre exactes et la résolution à chaque itération en temps d'un système linéaire totalement couplé pour les inconnues de vitesses, pression et hauteur de surface libre.

Des calculs supplémentaires avec des maillages plus importants doivent être effectués afin d'améliorer la précision des résultats, en particulier pour l'estimation des coefficients d'amortissement pour un corps de section rectangulaire en cavement ou en roulis.

REFERENCES

- Alessandrini B., Delhommeau G., (1995), "*Simulation numérique de l'écoulement turbulent incompressible autour d'une carène de navire : vers une prise en compte rigoureuse des conditions de surface libre en fluide visqueux*", 5e Journées de l'Hydrodynamique, Rouen, pp. 429-442.
- Alessandrini B., Delhommeau G., (1996), "*A Multigrid Velocity-Pressure-Free Surface Elevation Fully Coupled Solver for Calculation of Turbulent Incompressible Flow Around a Hull*", preprints (Tuesday Sessions) of 21st Symposium on Naval Hydrodynamics, Trondheim, Norvège, pp. 40-55.
- Eriksson L.E., (1982), "*Generation of Boundary-Conforming Grids around Wing-Body Configurations Using Transfinite Interpolations*", AIAA Journal, vol. 20, no. 10, pp. 1313-1320.
- Gentaz L., (1995), "*Simulation bidimensionnelle en fluide visqueux de la propagation d'ondes de gravité et du mouvement forcé d'un corps : résolution des équations de Navier-Stokes en présence d'une surface libre*", Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Nantes.
- Gentaz L., Alessandrini B., Delhommeau G., (1996), "*Motion Simulation of a Cylinder at the Surface of a Viscous Fluid*", Ship Technology Research, vol. 43, no. 1, pp. 3-18.
- Guillerm P.E., (1996), "*Etude du cavement forcé d'un corps perçant en fluide visqueux*", Rapport de DEA, Ecole Centrale de Nantes.
- Joly P., (1982), "*Résolutions de systèmes linéaires non symétriques par des méthodes de gradient conjugué*", publication du Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, CNRS. N° d'enregistrement 82 045.
- Papanikolaou A., Nowacki H., (1984), "*Second-Order Theory of Oscillating Cylinders in a Regular Steep Wave*", 13th Symposium on Naval Hydrodynamics, pp. 303-331.
- Patankar S.V., (1980), "*Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*", Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences, Mac Graw-Hill book compagny.
- Proceedings of CFD Workshop, (1994), Tokyo.
- Rhie C.M., Chow W.L., (1983), "*A Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Isolated Airfoil with Trailing Edge Separation*", AIAA Journal, vol. 21, pp. 179-195.
- Tasaï F., Koterayama W., (1976), "*Nonlinear Hydrodynamic Forces Acting on Cylinders Heaving on the Surface of the Fluid*", Reports of Research Institut for Applied Mechanics, Kyushu University, vol. 23, no. 77.
- Van der Vorst H.A., (1992), "*Bi-CGSTAB : a Fast and Smoothly Converging Variant of bi-CG for the Solution of Nonsymmetric Linear Systems*", J. Sci. Stat. Comp., vol. 13.
- Vugts J.H., (1968), "*The Hydrodynamic coefficients for swaying, heaving and rolling cylinders in a free surface*", International Shipbuilding Progress, vol. 15, pp. 251-276.
- Yamashita S., (1977), "*Calculations of the Hydrodynamic Forces Acting upon Thin Cylinders Oscillating Vertically with Large Amplitude*", Journal of the Society of Naval Architecture of Japan, vol. 141, pp. 61-69.
- Yeung R.W., Cermelli C., Liao S.-W., (1996), "*Vorticity Fields due to Rolling bodies in a Free surface - Experiment and Theory*", preprints (Tuesday Sessions) of 21st Symposium on Naval Hydrodynamics, Trondheim, Norvège, pp. 69-86.