

6e JOURNÉES DE L'HYDRODYNAMIQUE

24, 25, 26 février 1997 - Nantes

Etude du roulis non-linéaire des navires par la méthode de Melnikov

Y.-M. Scolan* Ph. Le Buhan**
J.-F. Dock*** C. Berhault**

* ESIM, IMT, 13451 Marseille, Cedex 20.

** PRINCIPIA R.D. Port de Brégaillon, 83507 La Seyne sur Mer.

*** DCN/CSTN/MDTC BP 28, 83800 Toulon naval.

Résumé

L'étude du roulis des navires constitue une étape essentielle de leur conception. Les études en dynamique non-linéaire couplant tous les effets hydrodynamiques et structurels, sont encore rares du fait des ressources informatiques qu'elles nécessitent. L'alternative est de formuler le problème comme un système d'équations non linéaires pour lequel on peut bénéficier des avancées théoriques majeures de la modélisation des bifurcations et du chaos.

On met ainsi en œuvre la méthode de Melnikov après avoir exposé la mise en équation du problème à conditions initiales pour le mouvement du roulis. Cette technique d'analyse globale permet de réduire considérablement le coût d'une analyse paramétrique au prix néanmoins de quelques développements analytiques. C'est ainsi que sont produites de nouvelles solutions lorsque le moment de rappel est un polynôme de degré 5. Des résultats d'application sont présentés pour un navire réel.

Abstract

The study of ship rolling is a crucial step of their conception. Models of the nonlinear dynamical behavior coupling both hydrodynamical and structural effects are not yet used in a standard way; this is due to the high computational cost. An alternative is to use the recent theoretical advances in the domain of chaos and bifurcations.

The Melnikov method is thus detailed after posing the initial value problem for the rolling motion. This technique considerably reduces the computational cost of a parametrical study in spite of some analytical developments. Thus new solutions are produced when the restoring couple is a quintic polynomial. Applications are presented for a real ship.

1 Introduction

Encore maintenant l'étude du comportement d'un navire relève des seuls calculs du moment de redressement en statique et de l'effort moyen d'excitation; cela s'avère très insuffisant. En fait l'analyse du comportement dynamique en roulis des navires bénéficie depuis peu des développements théoriques menés sur les équations différentielles non linéaires (théorie des bifurcations et du chaos). Le but poursuivi est de fournir une alternative à la résolution systématique et complète des équations non-linéaires du mouvement dont l'analyse paramétrique peut être fastidieuse. Parmi les alternatives proposées, la méthode de Melnikov constitue une avancée décisive puisqu'elle fournit des critères objectifs de perte de stabilité (chavirement ou mouvement chaotique).

La première partie de cet article est consacrée à l'établissement de l'équation différentielle; on rappelle notamment les hypothèses simplificatrices.

La résolution numérique de l'équation du mouvement est exposée. Les notions de sensibilité aux conditions initiales ainsi que d'érosion du bassin d'attraction sont introduites. On caractérise les orbites du mouvement dans le plan des phases (mouvement - vitesse), et on procède à la mise en œuvre de la méthode de Melnikov dans une troisième partie. Des solutions analytiques nouvelles sont proposées; elles concernent le couplage de l'effet d'eau sur le pont et de la perte de stabilité. Enfin des applications sont présentées pour un navire réel en houle irrégulière.

2 Mise en équation du problème du roulis

Le préalable nécessaire à l'étude de la stabilité est de bien connaître les phénomènes physiques significatifs puis d'en donner l'équivalent mathématique. Pour un seul degré de liberté (mouvement x), la forme générale de l'équation différentielle du second ordre en temps est la suivante:

$$(I + I_a)\ddot{x} + D(\dot{x}) + P(x) = f(t) \quad (1)$$

- les inerties propre et ajoutée du navire sont notées I et I_a respectivement,
- l'amortissement est représenté par une fonction du temps $D(\dot{x})$ en phase avec la vitesse du mouvement; il contient essentiellement l'amortissement de radiation et d'origine visqueuse,
- le rappel hydrostatique $P(x)$ est ici nécessairement non-linéaire,
- le forçage ou excitation du système dynamique $f(t)$, représente l'action de l'environnement: houle, vent, courant, ...

Des termes de couplage avec les autres mouvements pourraient être introduits dans le second membre (excitation) sous forme paramétrée; ce cas n'est pas envisagé ici.

2.1 Excitation des vagues

La principale source de mise en mouvement d'un navire est évidemment liée aux vagues. Cette excitation est de nature plus ou moins régulière. Si on examine le cas le plus simple d'une houle régulière représentée par une onde plane progressive, le terme d'excitation dû aux seuls effets des vagues peut se mettre sous la forme:

$$E(t) = a H \cos \omega t \quad (2)$$

où a désigne ici une fonction de transfert de l'effort exciteur fonction elle-même de l'amplitude H (constante dans le temps) de la vague.

La directionalité de la houle constitue également un aspect important de la nature de l'excitation. On peut distinguer deux cas très différents: la houle de travers et la houle d'arrière ou de face. Dans le premier cas, on est amené à prendre en compte la pente locale des vagues. Cela est possible si la longueur d'onde est grande devant la largeur du navire. Dans ce cas on n'attend pas de couplage particulier avec un autre mouvement (voir Nayfeh et Sanchez 1990). Le terme de forçage est donc simplement du type de l'équation (2). Par contre, dans le deuxième cas, il est nécessaire d'introduire un couplage avec un autre mouvement (pilonnement ou lacet). Celui-ci peut être injecté dans les équations sous une forme paramétrique.

Si la houle est de nature aléatoire, on décompose le terme d'excitation en une somme finie de raies:

$$E(t) = H_s \sum_{i=1}^N a_i \cos(\omega_i t + \phi_i) \quad (3)$$

les fonctions de transfert a_i et les phases ϕ_i sont calculées par un modèle standard de tenue à la mer (ici il s'agit de Diodore). Le spectre de houle excitateur est caractérisé par une hauteur significative H_s et une période de pic T_p représentatives d'un état de mer réaliste. Le contenu fréquentiel de l'excitation est limité par les fréquences de coupure de part et d'autre du pic $\omega_p = 2\pi/T_p$.

Les outils de calcul des termes de l'excitation due aux vagues fournissent non seulement les efforts excitateurs (diffraction) mais aussi les coefficients hydrodynamiques (amortissement de radiation et inertie ajoutée). Ces coefficients dépendent de la fréquence d'excitation en houle régulière. Si l'on considère les mouvements induits par la houle irrégulière les coefficients doivent être calculés en principe à l'aide d'intégrale de convolution connaissant les coefficients pour l'ensemble des fréquences qui composent le spectre (voir Hooft pp 267-272). On montre ainsi, que l'équation différentielle qui régit un seul degré de liberté pour une excitation monochromatique à la pulsation ω , contient le terme:

$$(I + I(\omega))\ddot{x} + (D(\omega) + D)\dot{x} \quad (4)$$

où $I(\omega)$ et $D(\omega)$ représentent respectivement les coefficients d'inertie ajoutée et d'amortissement de radiation, qui dépendent, tous deux, de la fréquence d'excitation. On rappelle d'ailleurs que ces coefficients sont calculés sous l'hypothèse classique de faible mouvement autour d'une position d'équilibre (a priori en contradiction avec la perspective d'étude du comportement fortement non-linéaire). Si dorénavant l'excitation est de nature irrégulière et décomposable en série selon l'équation (3), alors les mêmes termes deviennent:

$$(I + \lim_{\omega \rightarrow \infty} [I(\omega)])\ddot{x}(t) + \int_0^t R(t - \tau)\dot{x}(\tau)d\tau + D\dot{x} \quad \text{avec} \quad R(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty D(\omega) \cos(\omega t) d\omega \quad (5)$$

Dans les applications envisagées ici, on considère que les coefficients de l'équation différentielle sont constants et indépendants de l'excitation; c'est là une hypothèse simplificatrice qui se justifie si la réponse est à bande étroite.

2.2 Effet du vent

L'effet du vent s'apparente à celui des vagues. Si le vent s'exerce de façon continue dans le temps, le terme d'excitation correspondant est identique aux termes des équations (2) et (3) éventuellement augmentés d'une valeur moyenne. En fait, les effets du vent sont souvent discontinus si bien que sa fonction équivalente est représentée par des masses de Dirac rendant compte des rafales de vent (voir Cardo et Michelacci 1982) ou par une fonction échelon (voir Odabasi et Vince 1982).

2.3 Embarquement d'eau sur le pont

L'effet d'embarquement d'eau sur le pont s'apparente à de nombreux autres phénomènes comme: la présence de glace ou le déplacement de la cargaison dans les cales. Dans le cas le plus simple où l'eau ne se déplace pas (ou plutôt l'eau se déplace instantanément), une analyse statique classique permet de déterminer les angles d'équilibre dit pseudo-statique. Il existe en général deux positions de part et d'autre du point d'équilibre milieu (équilibre instable). Le phénomène correspondant s'appelle le mouvement de lolling. Si l'eau se déplace, il convient de coupler sa dynamique à celle navire. Pour cela, Dillingham (1981) résout les équations de St Venant (eau peu profonde). D'autres applications du même type sont décrites dans Dillingham et Falzarano (1986), Jones et Hulme (1987) et Pantazopoulos (1988).

2.4 Amortissement

L'amortissement constitue un aspect crucial de la stabilité notamment au voisinage de la fréquence de résonance du système dynamique. En première approximation, on ajoute à l'amortissement de radiation linéaire (voir équation 4), une contribution linéaire et quadratique qui améliore la prise en compte des effets de détachements tourbillonnaires et de friction ou de couche limite. D'une manière générale on écrit ici le terme d'amortissement de l'équation différentielle sous la forme générique:

$$D(\dot{x}) = \sum_{k=1}^{N_d} \mu_k \dot{x} |\dot{x}|^{k-1} \quad (6)$$

où les coefficients μ_k - en nombre N_d - sont a priori positifs afin d'être sûr que ces termes sont en phase avec la vitesse \dot{x} .

Ces coefficients sont fournis soit par l'expérience (voir Himeno 1981) soit à partir de modèles numériques. Dans les cas simples –là où on peut faire des hypothèses d'écoulement bidimensionnel par exemple– la modélisation numérique se substitue avantageusement à l'utilisation de formules empiriques. Il est ainsi, possible de calculer directement l'effort d'amortissement à tout instant grâce à une simulation temporelle. Dans d'autres cas on peut envisager de constituer une base de données de coefficients d'amortissement pour un grand nombre de types d'écoulement. Parmi les modèles simples on retient les modèles de Vortex Discrets tels qu'il sont mis en œuvre dans Faltinsen et Sortland (1987) ou dans Braathen (1987). Ces modèles peuvent aussi bien être utilisés pour les appendices de direction que pour les dispositifs anti-roulis.

2.5 Détermination du rappel

Le rappel est le dernier –mais non des moindres– aspect du comportement dynamique. Il est associé à l'énergie potentielle du système mécanique. Si on connaît la courbe du moment de redressement du navire, on peut calculer l'énergie potentielle en calculant l'intégrale suivante:

$$E_p(x) = \int_0^x P(\alpha) d\alpha \quad (7)$$

Concernant le choix de la fonction $P(x)$, on sait que c'est –en général, sauf s'il s'agit du lolling– une fonction impaire de x pour des raisons de symétrie de la coque. Ici on représente $P(x)$ à l'aide d'un polynôme de degré impair. Aller au moins jusqu'à l'ordre 3 est nécessaire pour introduire des non-linéarités; on a alors l'oscillateur de Duffing pour lequel de nombreux développements théoriques existent. Le choix d'un polynôme de degré supérieur (de degré 5) est discuté dans Nayfeh et Khdeir (1986). Dans ce cas:

- on peut mieux coller au moment de redressement fourni par le modèle d'hydrostatique,
- on représente d'autres phénomènes comme le "lolling" qui se manifeste par des zéros (où la pente $dP(x)/dx$ est positive) en deçà des points de perte de stabilité; les développements théoriques originaux présentés ici, portent précisément sur cette configuration particulière.

La forme générale de $P(x)$ s'écrit:

$$P(x) = \sum_{i=1}^N \eta_i x^{2i-1} \quad (8)$$

dont les zéros sont notés $\pm x_v$ s'il n'en existe que deux non nuls; ils sont notés $\pm x_l$ and $\pm x_v$ s'il en existe quatre non nuls.

En houle de travers, la pente des vagues devient un facteur important d'instabilité du navire. La mise en équation du problème est détaillée dans Bass (1983) et Nayfeh et Khdeir (1986). Les hypothèses sont:

- la longueur d'onde est grande devant la largeur du navire,
- la masse ajoutée en roulis est constante, en particulier indépendante de l'inclinaison.

Si on désigne par ϕ l'angle absolu de rotation et par η la pente locale, l'équation du mouvement s'écrit:

$$I\ddot{\phi} + \delta I(\ddot{\phi} - \ddot{\eta}) + D(\dot{\phi} - \dot{\eta}) + P(\phi - \eta) = 0 \quad (9)$$

suivant les notations de Nayfeh et Khdeir (1986). L'équation est donc résolue pour l'angle de roulis relatif noté $x = \phi - \eta$, où η est une fonction du temps donnée, comme par exemple $\eta = A \cos \omega t$ pour la houle régulière de pente maximum A . On est donc amené à résoudre une équation différentielle standard à coefficients constants.

3 Résolution numérique

L'équation (1) est rendue adimensionnelle par les transformations et changements de variables suivants:

- division par l'inertie totale supposée indépendante de x ,
- changement d'échelle sur le temps $t \rightarrow ht$ où h est choisi de telle façon que le terme de plus haut degré du polynôme de rappel soit ± 1 .

Le système d'équations différentielles que l'on résout s'écrit:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -P(x) + D(y) + E(t) \end{cases} \quad (10)$$

où l'amortissement D est donné par l'équation (10) et le forçage E par l'équation (3).

La résolution directe de système différentiel (10) est effectuée par un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4. La résolution numérique directe sert à introduire la terminologie employée ici. En particulier si on s'intéresse au système non perturbé (c'est à dire qu'il ne reçoit pas d'énergie ni n'en dissipe), on résout l'équation:

$$\ddot{x} - x(x^2 - x_v^2)(x^2 - x_l^2) = 0 \quad (11)$$

on introduit la notion d'orbites homoclines pour le lolling et d'orbites hétéroclines pour la perte de stabilité comme cela est illustré par les figures (1).

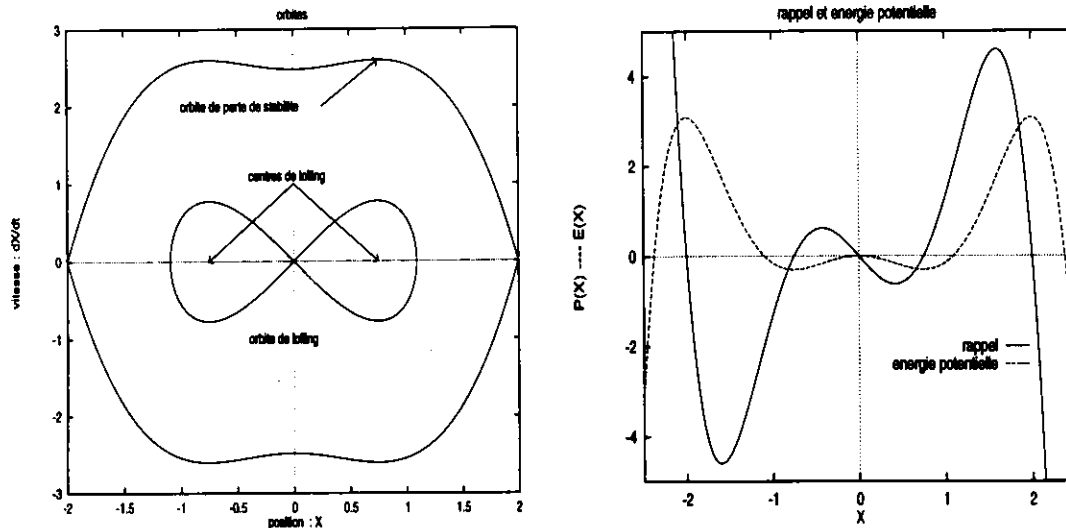


Figure 1: caractéristiques de la solution du système non perturbé pour un rappel polynôme de degré 5 ($x_v = 2$ et $x_l = 0.75$)

On peut orienter les orbites de telle façon qu'on tend asymptotiquement soit vers le point d'équilibre (orbite stable), soit on s'en écarte (orbite instable). Il faut retenir que ces orbites tracées sont des orbites limites. Par exemple, celle relative aux points de perte de stabilité sépare le plan des phases en deux parties parfaitement disjointes:

- si le couple de conditions initiales (x_o, \dot{x}_o) est à l'intérieur, la solution reste bornée,
- sinon il n'existe pas de solution (ou plutôt $x(t)$ tend vers l'infini asymptotiquement pour les cas qui nous intéressent ici).

On définit ainsi le bassin d'attraction comme étant constitué des points (x_o, \dot{x}_o) du plan des phases pour lesquels la solution est bornée. Son contour n'est pas toujours régulier et il peut être fractal. C'est effectivement le cas, si on perturbe le système en ajoutant $D(y)$ et $E(t)$; les orbites stable et instable s'ouvrent. L'étude de la sensibilité aux conditions initiales permet ainsi de rendre compte de l'érosion du bassin d'attraction. Cela est illustré par les figures (2); il s'agit de bassin d'attraction tracé dans le plan des phases. Le système dynamique est désormais perturbé par des termes d'amortissement et de forçage comme suit:

$$\ddot{x} - x(x^2 - x_v^2)(x^2 - x_l^2) + \mu\dot{x} = A \cos(\omega t + \phi) \quad (12)$$

Pour constituer ce résultat, on procède à un balayage sur les conditions initiales du système différentiel: $(x_o, \dot{x}_o) \in [-1.5, 3.] \times [-5.0, 2.5]$. Pour chaque couple on arrête la simulation dès que x dépasse un certain seuil arbitraire (ici $|x| \leq 30$). On met une marque + si la solution est bornée et * sinon. Entre les deux cas l'amplitude du forçage est passée de $A = 1.2$ à $A = 1.22$.

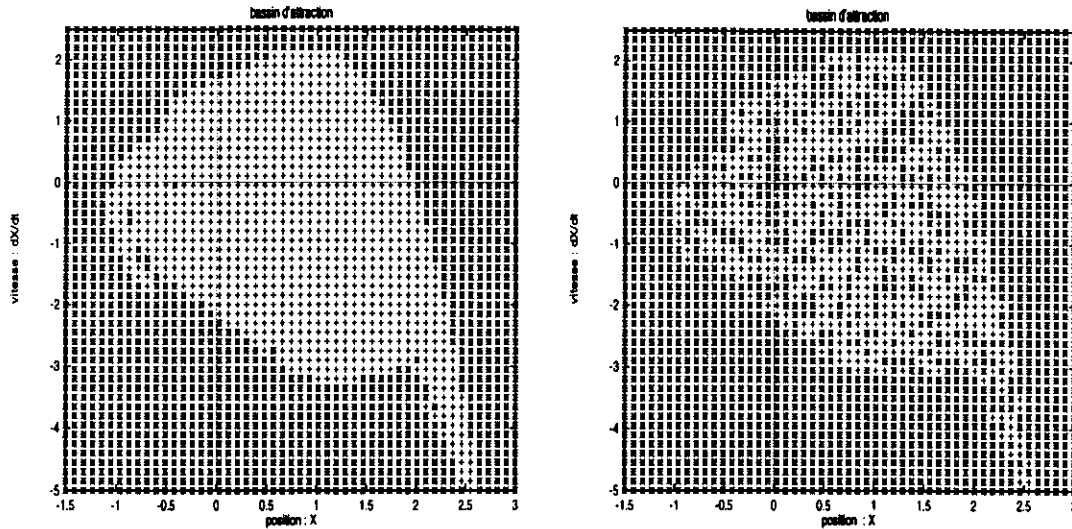


Figure 2: bassin d'attraction peu érodé à $A = 1.2$ et très érodé $A = 1.22$
caractéristique: $x_v = 2$, $x_\ell = 0.75$, $\omega = 0.85$, $\mu = 0.2$, $\phi = 0$

On dit que le bassin d'attraction a subi une érosion. L'aire correspondante aux solutions bornées (en fait le nombre de + rapporté à l'aire du plan des phases tout entier) permet de quantifier cette érosion. Il est souvent noté que cette érosion se produit de façon brutale, *i.e.* pour une faible variation d'un paramètre (ici le forçage). On obtient par conséquent un critère de perte de stabilité sur une valeur critique du forçage. Si la variation de l'aire est lentement décroissante, le critère de stabilité sera d'autant plus vague et incertain.

Ici le critère est lié à un seuil $|x| \leq 30$, mais il est évident que l'on peut choisir n'importe quel autre critère comme le dépassement d'une amplitude plus faible (en deçà de la limite de perte de stabilité) en un certain temps ou après un nombre de vagues donné.

On retient aussi que le calcul du bassin d'attraction nécessite des ressources informatiques importantes. Sa délimitation est d'autant plus précise que le nombre de simulations est grand. Il existe des techniques, par exemple la méthode Cell-to-Cell Mapping (voir Hsu 1987), qui permettent d'optimiser son calcul, au moins dans des zones circonscrites du plan des phases.

4 Méthode de Melnikov

L'alternative à la résolution directe des équations proposée ici est la méthode de Melnikov. Cette technique consiste à:

1. étudier le système dynamique non linéaire non perturbé, c'est à dire expurgé des termes d'apport ou de dissipation d'énergie,
2. de quantifier la propension du système à devenir instable en fonction de toutes ses caractéristiques dynamiques.

Dans un premier temps, on cherche la solution du système (10). L'apport essentiel de cet article est précisément le calcul analytique de ces solutions lorsque $P(x)$ est un polynôme de degré 5.

Le principe est d'exhiber l'Hamiltonien en multipliant l'équation (11) par \dot{x} et en intégrant dans le temps:

$$H(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + E_p(x) = Cte \quad \text{indépendante du temps} \quad (13)$$

Il s'agit d'un invariant: c'est ici l'énergie mécanique total (cinétique et potentielle). On peut l'évaluer à l'instant initial. Si cette constante est calculée aux points $(x_o, \dot{x}_o) = (\pm x_v, 0)$ ou $(x, \dot{x}) = (0, 0)$, il est possible de déterminer les solutions de l'équation suivante issue de (13):

$$dt = \int \frac{dx}{\sqrt{2(H(x_o, \dot{x}_o) - E_p(x))}} \quad (14)$$

Les différentes configurations relatives à un polynôme de rappel de degré 5 sont résumées dans le tableau suivant; les variables sont les configurations liées au choix des paramètres (x_o, \dot{x}_o) à partir de (x_v, x_ℓ) .

phenomène	moment de rappel: $P(x) =$	Hamiltonien: $\dot{x}^2 =$
lolling	$-x(x^2 - x_v^2)(x^2 - x_\ell^2)$	$\frac{x^2}{3}(x^4 - 3(x_v^2 + x_\ell^2)x^2 + 3x_v^2x_\ell^2)$
perte de stabilité $N^{\circ}1$	$-x(x^2 - x_v^2)(x^2 - x_\ell^2)$	$\frac{1}{3}(x_v^2 - x^2)^2(x^2 + \frac{x_v^2 - 3x_\ell^2}{2})$
perte de stabilité $N^{\circ}2$	$-\frac{1}{3}x(x^2 - x_v^2)(3x^2 - x_v^2)$	$\frac{x^2}{3}(x_v^2 - x^2)^2$
perte de stabilité $N^{\circ}3$	$x^3(x^2 - x_v^2)$	$\frac{1}{3}(x^2 - x_v^2)^2(x^2 + \frac{x_v^2}{2})$
perte de stabilité $N^{\circ}4$	$x(x^2 - x_v^2)^2$	$\frac{1}{3}(x^2 - x_v^2)^2(x^2 + 2x_v^2)$
perte de stabilité $N^{\circ}5$	$-x(x^2 - x_v^2)(x^2 + b^2)$	$\frac{1}{3}(x^2 - x_v^2)^2(x^2 + \frac{x_v^2 + 3b^2}{2})$

Les solutions sont obtenues en résolvant l'équation (14); elles sont rassemblées dans le tableau suivant:

phenomenon	$\dot{x}(t)$	$x(t)$
lolling	$\frac{u \sinh wt}{(1+v \cosh wt)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{u}{(1+v \cosh wt)^{\frac{1}{2}}}$
perte de stabilité $N^{\circ}1$	$\frac{u \cosh wt}{(1+v \cosh 2wt)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{u \sinh wt}{(1+v \cosh 2wt)^{\frac{1}{2}}}$
perte de stabilité $N^{\circ}2$	$\frac{u(1 \pm \tanh wt)^{\frac{1}{2}}}{\cosh wt}$	$\bar{u}(1 \mp \tanh wt)^{\frac{1}{2}}$
perte de stabilité $N^{\circ}3$	$\frac{u \cosh wt}{(2 + \cosh^2 wt)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{u}{\bar{u}} \frac{(\cosh^2 wt - 1)^{\frac{1}{2}}}{(\cosh^2 wt + 2)^{\frac{1}{2}}}$
perte de stabilité $N^{\circ}4$	$\frac{u \cosh wt}{(1 + 2 \cosh^2 wt)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{u}{\bar{u}} \frac{(\cosh^2 wt - 1)^{\frac{1}{2}}}{(2 \cosh^2 wt + 1)^{\frac{1}{2}}}$
perte de stabilité $N^{\circ}5$	$\frac{u \cosh wt}{(1+v \cosh 2wt)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{u \sinh wt}{(1+v \cosh 2wt)^{\frac{1}{2}}}$

où les coefficients (u, v, w, \bar{u}) dépendent uniquement de x_v et x_ℓ (voir Scolan 1996). Il s'agit des solutions d'un mouvement non perturbé. Si on trace les orbites dans le plan des phases (voir figure 1), on obtient:

- des orbites hétéroclines aux deux points de pertes de stabilité $\pm x_v$,
- des orbites homoclines à l'origine qui est un point d'équilibre instable si on tient compte du phénomène de lolling.

La méthode de Melnikov, proprement dite, peut alors être mise en œuvre (voir Gugkenheimer et Holmes 1983). Il s'agit de calculer l'intégrale suivante:

$$M(\tau) = - \int_{-\infty}^{+\infty} yD(y)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} yE(t + \tau)dt = M_f(\tau) - M_D \quad (15)$$

Cette intégrale s'interprète comme une mesure de la distance qui sépare les orbites stable et instable au voisinage d'un point d'équilibre. Ses zéros signifient que l'on passe d'une orbite stable à une orbite instable et par conséquent fournissent un critère global de stabilité. Le rapport des deux termes de l'intégrale exprime aussi l'équilibre entre apport et dissipation d'énergie du système dynamique:

- le premier ne dépend que de l'amortissement et le noyau de l'intégrale est strictement positif; c'est la moyenne de la fonction $M(\tau)$,
- le deuxième intègre tout apport d'énergie; il tient compte des termes d'excitation de nature régulière ou non.

Ces deux termes ($M_f(\tau)$ et M_D) peuvent être calculés analytiquement à partir des expressions de D et E des équations (3) et (6).

Dans le cas d'une excitation harmonique, la fonction $M_f(\tau)$ est elle même harmonique; il existe donc un rapport limite entre l'amplitude de $M_f(\tau)$ (notée $M_f(\omega)$) et M_D . On en tire une relation simple entre tous les coefficients du système différentiel (10); cette relation résulte des conditions:

$$M(\tau) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dM(\tau)}{d\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \max_{\tau}(M_f)(\tau) = M_f(\omega) = M_D \quad (16)$$

On considère ici un modèle linéaire de calcul des efforts, la quantité $M_f(\omega)$ est proportionnelle à l'amplitude H de la houle. De la relation (16), on déduit une valeur critique de H en fonction de tous les autres paramètres.

$$M_f(\omega) = M_f^*(\omega) H_{lim} = M_D \quad \Rightarrow \quad H_{lim} = \frac{M_D}{M_f^*(\omega)} \quad (17)$$

Si l'excitation est irrégulière, la relation (17) associe une amplitude de houle limite à chaque raie entre deux fréquences de coupure. On constate néanmoins que ce calcul est très conservatif et prédit des amplitudes critiques très différentes (a priori bien plus faibles) de celle que l'on va calculer en houle irrégulière. De plus ce calcul ne contient aucune information sur la répartition d'énergie entre chaque raie. Il n'est donc pas possible -à ce stade- de tirer une courbe liant la hauteur critique à une période de pic.

Pour cela il faut procéder à une analyse statistique de la fonction $M(\tau)$. Les travaux de Hsieh *et al.* (1994) fournissent le cadre théorique. Les données du problème sont:

- un spectre de houle caractérisé par le couple hauteur significative H_s et période de pic T_p ; le signal de houle correspondant est le plus généralement stationnaire centré et gaussien,
- les efforts induits pour toutes les fréquences contenues dans ce spectre; c'est un signal qui a les mêmes propriétés statistiques que le signal de houle.

On suppose ici que l'on a déterminé (suivant une méthode de calcul connue mais qui n'est pas détaillée) le spectre discret des efforts: $S_f(\omega_j)$. Ce spectre se déduit en fait de la transformée de Fourier des efforts (notée f^*) selon la formule:

$$S_f(\omega_j) = 2\pi \overline{f^*(\omega_j)} f^*(\omega_j) \quad (18)$$

où \overline{f} représente le complexe conjugué de f . On fait l'hypothèse que M est un signal ergodique; par conséquent ses propriétés statistiques sont entièrement connues à partir de:

- sa moyenne temporelle: on a vu que c'était le terme M_D ,
- sa variance notée σ^2 ; c'est aussi celle de $M_f(\tau)$; il faut la calculer.

On s'intéresse en fait à la probabilité selon laquelle la fonction M devient positive. En pratique on calcule:

$$\Phi = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} M^+(\tau) d\tau \quad \text{avec} \quad M^+(\tau) = \begin{cases} M & \text{si } M > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (19)$$

Cette fonction Φ s'interprète comme la valeur moyenne de l'aire au dessus de l'axe $M = 0$. Par définition de la fonction de Melnikov, la valeur de Φ donne une idée de la propension du système dynamique à devenir chaotique ou non borné.

La fonction densité de probabilité de M est celle d'une loi normale; elle est définie par:

$$p(M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(M+M_D)^2}{2\sigma^2}} \quad (20)$$

par définition de la quantité Φ on a:

$$\Phi = \frac{\int_0^{+\infty} M p(M) dM}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(M) dM} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{M_D^2}{2\sigma^2}} + \frac{M_D}{2} \left[\text{erf} \left(\frac{M_D}{\sigma\sqrt{2}} \right) - 1 \right] \quad (21)$$

où erf est la fonction erreur. On note que Φ décroît rapidement pour des valeurs faibles de σ mais reste non nul. Cela prouve que le chavirement et le mouvement chaotique se produisent

nécessairement dès que la simulation est suffisamment longue pour se trouver dans des circonstances favorables à ces cas extrêmes. On montre plus loin qu'il existe une valeur asymptotique de σ en deçà de laquelle peu de risque est à craindre.

Il reste à calculer σ qui correspond, par définition, à l'espérance mathématique du carré de $M_f(\tau)$:

$$\sigma^2 = E[(M + M_D)^2] = E[M_f^2(\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} M_f^2(\tau) d\tau \quad (22)$$

et par définition de la densité spectrale de la fonction $M_f(\tau)$, on a aussi:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{M_f}(\omega) d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{M_f^*(\omega)} M_f^*(\omega) d\omega \quad (23)$$

on calcule finalement la transformée de Fourier de $M_f(\tau)$:

$$M_f^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} M_f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = 2\pi \overline{y_o^*(\omega)} f^*(\omega) \quad (24)$$

si bien que:

$$\sigma^2 = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} S_{y_o}(\omega) S_f(\omega) d\omega = \sigma_o^2 H_s^2 \quad (25)$$

puisque le spectre de puissance des efforts est directement lié au spectre de houle. Le coefficient σ_o se déduit donc de l'équation (25). En examinant l'asymptote de Φ quand $\sigma \rightarrow \infty$, on montre qu'il existe une hauteur critique telle que la quantité Φ s'annule:

$$\Phi_{asymptote} = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} - \frac{M_D}{2} = 0 \Rightarrow H_s^{critique} = \frac{\sqrt{2\pi} M_D}{2\sigma_o} \quad (26)$$

Hsieh *et al.* (1994) constatent effectivement que la courbe limite ($H_s^{critique}, T_p$) constitue bien un minorant des zones où le chavirement peut se produire au bout d'un temps donné.

5 Résultats

On ne procède pas ici à une étude exhaustive d'un problème typique du roulis non-linéaire des navires; ce sera en fait l'objet de futurs travaux de développements du modèle. La configuration étudiée est par ailleurs volontairement simple afin d'illustrer les capacités de la méthode de Melnikov. On s'intéresse ainsi à un navire symétrique par rapport à son plan longitudinal. Ces caractéristiques sont rassemblés dans le tableau ci-dessous:

inertie	$I + I_a$	$4.18 \cdot 10^7 \text{ kg m}^2$
amortissement linéaire	μ_1	$0.5 \cdot 10^6 \text{ kg m}^2/\text{s}$
amortissement quadratique	μ_2	$1. \cdot 10^6 \text{ kg m}^2$
moment de rappel	$P(x)$	$-3.33 \cdot 10^7 x (x^2 - (1.07)^2) \text{ kg m}^2/\text{s}^2$

Le polynôme de rappel (degré 3) est tracé sur la figure (3).

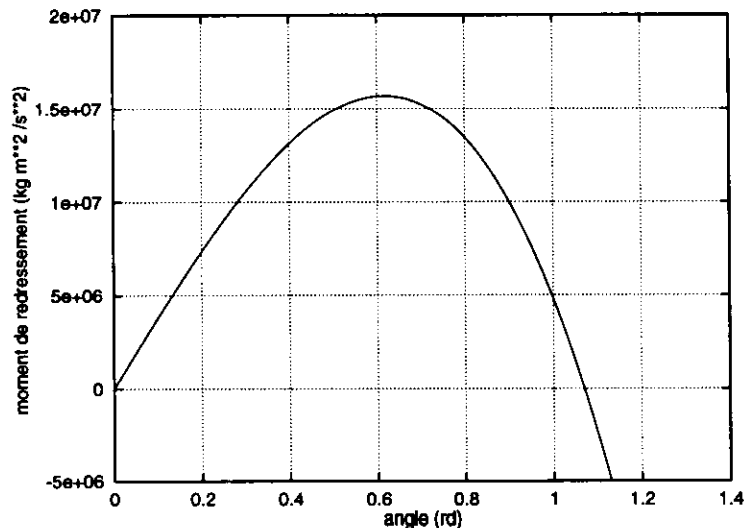


Figure 3: moment de redressement du navire

La fonction de transfert des efforts excitateurs est représentée par la courbe (4). La houle est définie par un spectre de JONSWAP; le coefficient d'étalement du spectre est $\gamma = 2$, la période de pic varie dans l'intervalle $T_p \in [5s, 20s]$ et la hauteur significative est $H_s = 1m$ (cette valeur a en fait peu d'importance ici). Les résultats de la méthode de Melnikov sont illustrés par la courbe (5); c'est le spectre de puissance $S_{y_0}(\omega)$ (calculé à $4\pi^2$ près).

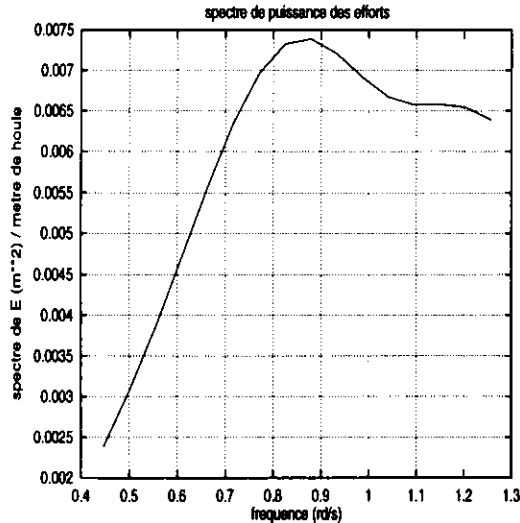


Figure 4: spectre de puissance des efforts adimensionnalisés $S_f(\omega/4\pi^2)$ (issus de Diodore)

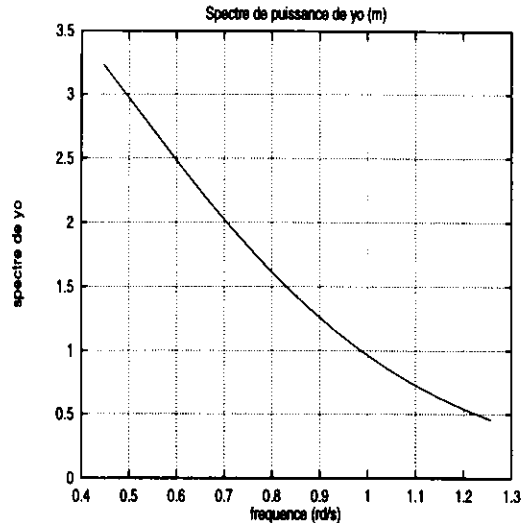


Figure 5: spectre de puissance de la solution non perturbée $S_{y_0}/4\pi^2$

Les résultats correspondants fournissent les valeurs des $H_s^{critique}$ comprises entre $3m$ et $5m$. Ces valeurs sont comparées sur la figure (6) aux hauteurs fournies par la formule (17); il est clair que traiter chaque raie séparément prédit des hauteurs trop faibles. C'est là le principal résultat de la méthode de Melnikov.

A noter aussi que le coût informatique de la figure (6) est négligeable comparé au temps de calcul des bassins d'attraction qui procède d'un balayage sur les couples de conditions initiales.

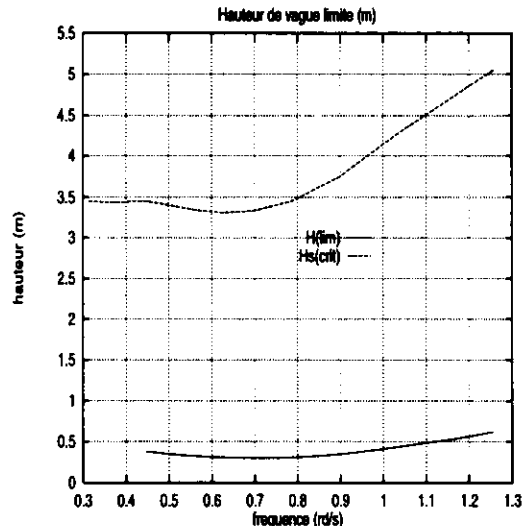


Figure 6: hauteur limite (houle régulière) et hauteur significative critique (houle irrégulière)

Comme on l'a évoqué précédemment, la sensibilité du système dynamique aux conditions initiales est associée au phénomène d'érosion du bassin d'attraction. Cela est illustré sur la figure (8); la variation de l'aire y est tracée en fonction de l'amplitude de l'amortissement. On a conservé ici le seul amortissement linéaire. L'aire tend vers un palier qui ne dépend que l'amplitude de l'excitation.

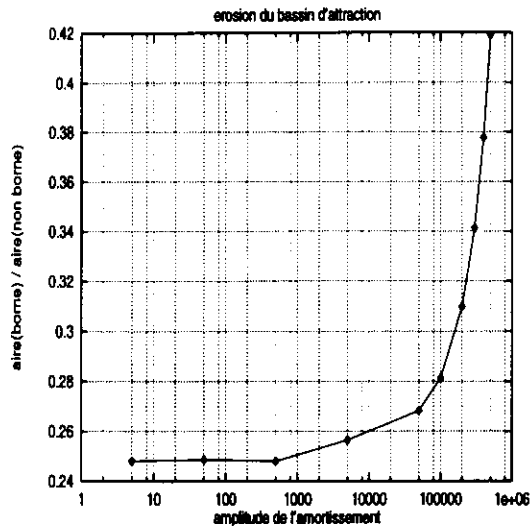


Figure 8: variation de l'aire du bassin d'attraction avec le coefficient d'amortissement linéaire pour une amplitude d'effort $a = 10^7 \text{kgm}^2/\text{s}^2$

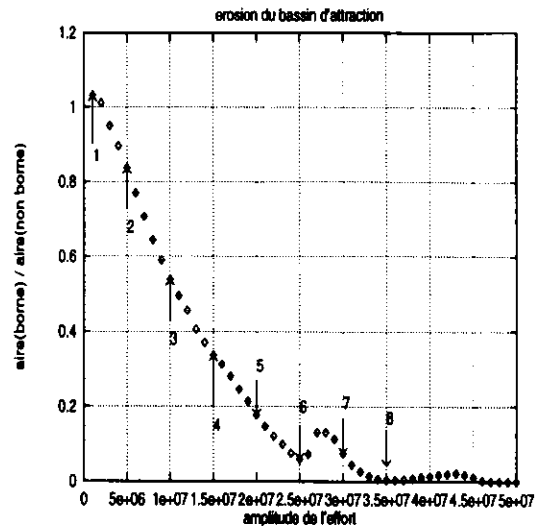


Figure 9: variation de l'aire du bassin d'attraction avec l'amplitude de l'effort harmonique; les numéros renvoient aux bassins tracés sur la figure (10).

Si on examine la variation de l'aire du bassin avec l'amplitude de l'excitation on observe, sur la figure (9), une décroissance non monotone de l'aire. Les raisons à cela sont encore incertaines. On constate ici que l'érosion ne se fait pas brutalement; il n'est donc pas possible de définir un critère de stabilité (par exemple un majorant de l'amplitude de la houle).

Les états de mer critiques pour la stabilité ayant été identifiés en négligeant l'influence des couplages avec les autres degrés de liberté, une vérification finale est en fait nécessaire. Cette tâche, actuellement en développement, sera réalisée en intégrant dans le domaine temporel les équations du mouvement du navire pour les 6 degrés de liberté. Le modèle utilisé, disponible dans le programme **Diodore**, permet de s'affranchir de certaines hypothèses simplificatrices faites jusqu'à maintenant. Par exemple:

- les efforts hydrostatiques instantanés sont obtenus en déterminant l'intersection du maillage représentant le navire avec la déformée locale de la houle incidente,
- les amortissements sont introduits par des formulations de forme quelconque,
- la résolution est effectuée dans le repère barycentrique en introduisant les angles d'Euler ce qui élimine toute restriction sur les amplitudes des mouvements,
- les efforts de houle du premier ordre sont corrigés par des termes non-linéaires liés à la diffraction du second ordre, aux effets de crête ou d'impact,
- les appendices complexes sont pris en compte directement; ils sont éventuellement mus par des lois de pilotage connues.

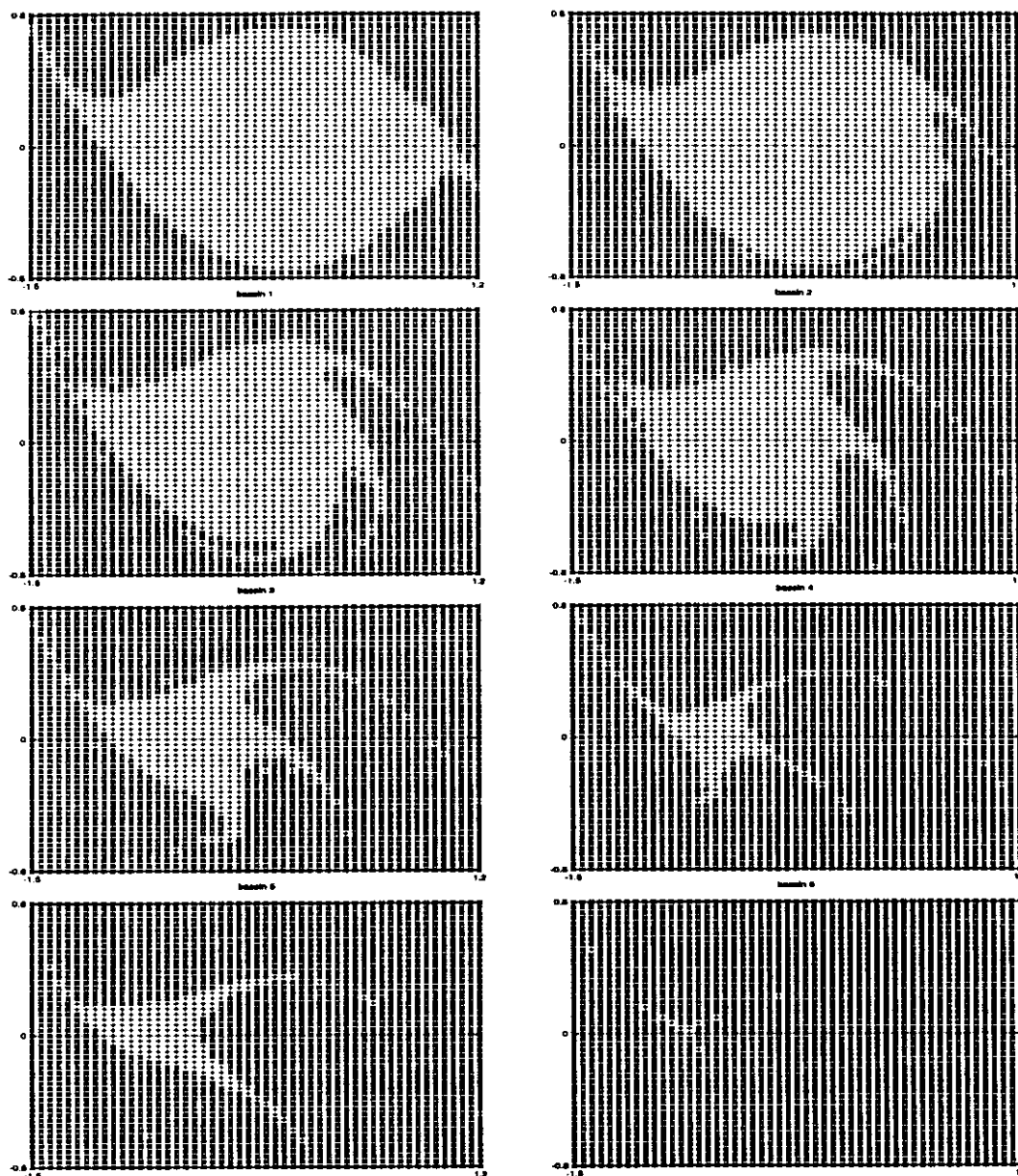


Figure 10: bassins d'attraction pour différentes valeurs de l'amplitude de l'effort harmonique.

6 Conclusion

L'établissement de l'équation non-linéaire du mouvement de roulis s'est appuyée sur une analyse des phénomènes prépondérants. On est amené, en première approximation, à résoudre une équation à coefficients constants. Le moment de redressement est de type polynomial et rend compte de la perte de stabilité ainsi que d'éventuels effets d'eau embarquée (lolling). Les seules autres non linéarités sont liées à l'amortissement également de type polynomial.

L'excitation en roulis rend compte de la houle et/ou du vent. Elle est de nature harmonique. Ces efforts sont calculés par un modèle linéaire de tenue à la mer. L'excitation peut être irrégulière en décomposant le spectre de houle en un nombre fini de raies.

Pour étudier la stabilité du système, on a mis en œuvre les outils d'analyse suivants:

- une méthode classique de résolution directe du mouvement pour la production du bassin d'attraction,
- la méthode de Melnikov qui produit un critère global de stabilité.

On montre que les coûts informatiques de ces deux méthodes sont sans commune mesure.

La méthode de Melnikov procède d'un calcul des solutions du système dynamique non perturbé (sans apport ni dissipation d'énergie). Cela permet de définir des orbites cycliques dans le

plan des phases. Ici de nouvelles solutions analytiques sont calculées pour un couple de rappel représenté par un polynôme de degré 5. La méthode de Melnikov produit un critère qui relie l'ensemble des paramètres constitutifs du système et permet une analyse paramétrique.

L'autre approche consiste à intégrer directement l'équation du mouvement. L'intérêt est d'accéder à la mesure du bassin d'attraction et à son érosion en fonction des caractéristiques mécaniques.

Les futurs travaux doivent désormais porter sur l'intervalisation des différentes approches utilisées. Des comparaisons avec les résultats expérimentaux disponibles permettront de valider ces approches et surtout cerner leur domaine d'application respectif.

7 Références

1. Bass D.W., 1983, "On the response of biased ships in large amplitude waves." *Int. Shipbuld. Progre.*, 30, No 341, pp 2-9.
2. Bikdash M., Balachandran B & Nayfeh A., 1994, "Melnikov analysis for a ship with a general roll-damping model.", *Nonlinear Dynamics*, 6, pp 101-124.
3. Braathen A., 1987, "Application of a vortex tracking method to the prediction of roll damping of a two dimensional floating body.", PhD thesis, University of Trondheim, Norway.
4. Cardo A., Francescutto A. & Nabergoj R., 1982, "Technical Note: on damping models in free and forced rolling motion.", *Ocean Engng*, Vol 9, No 2, pp 171-179.
5. Dillingham J.T. & Falzarano J.M., 1986, "Three dimensional numerical simulation of green water on deck.", 3rd Int Conf. on Stability of Ships and Ocean Vehicles, STAB'86, Gdansk.
6. Dillingham J.T., 1981, "Motion studies of a vessel with water on deck.", *Marine Technology*, Vol. 18, No. 1, pp 38-50.
7. Faltinsen O.M. & Sortland B., 1987, "Slow drift eddy making damping of a ship.", *Applied Ocean Research*, Vol. 9, No.1, pp 37-46.
8. Falzarano J.M. & Troesch A.W., 1990, "Application of modern geometric methods for dynamical systems to the problem of vessel capsizing and water on deck.", *Proc. of the 4th Int. Conf. on the stability of ships and ocean vehicles*, Naples, Italy. pp 565-572.
9. Falzarano J.M., Shaw S.W. & Troesch A.W., 1992, "Application of global methods for analysing dynamical systems to ship rolling motion and capsizing.", *Int. Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol.2, No1, pp 101-115.
10. Gugkenheimer J. & Holmes P., 1983, "Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields.", *Applied Mathematical Sciences*, N° 42, Springer-Verlag.
11. Hooft J.P., 1982, "Advanced Dynamics of marine structures.", A Wiley Interscience publication.
12. Hsieh S.-R., Shaw S.W. & Troesch A.W., 1993, "A predictive method for vessel capsize in random seas.", *Proc. of OMAE*, Vol1, ASME.
13. Himeno Y., 1981, "Prediction of ship roll damping. State of art.", *Rapport interne No 239*, Université de Michigan.
14. Hsieh S.-R., Shaw S.W. & Troesch A.W., 1993, "A nonlinear probabilistic method for predicting vessel capsizing in random beam seas.", *Proc. R. Soc. Lond. A* 446, pp 195-211.
15. Hsu C.S., 1987, "Cell to cell Mapping.", *Applied Math. Sciences*, Vol 64, Ed. Springer Verlag.
16. Jones A.F. & Hulme A., 1987, "The hydrodynamics of water on deck.", *Journal of Ship Research*, Vol. 31, No 2, pp 125-135.
17. Lin H. & Yim S.C.S., 1995, "Chaotic roll motion and capsize of ships under periodic excitation with random noise.", *Applied Ocean Research* 17, pp 185-204.
18. Nayfeh A.H. & Sanchez N.E., 1990, "Stability and complicated rolling responses of ships in regular beam seas.", *Int. Shipbuld. Progre.*, 37, No 412, pp 331-352.

19. Nayfeh A.H. & Khdeir A.A. (1986), "Nonlinear rolling of biased ships in regular beam waves.", *Int. Shipbuld. Progre.*, 33, No 381, pp 84-93.
20. Nayfeh A.H., 1973, "Perturbation methods", Wiley-Interscences.
21. Odabaşı A.Y. & Vince J., 1982, "Roll response of a ship under the action of a sudden excitation.", *Int. Shipbuld. Progre.*, 29, No 340, pp 327-332.
22. Oh I.G. & Nayfeh A.H., 1995, "Nonlinearly coupled pitch and roll motions in the presence of internal resonance; part 1, theory.", *Int. Shipbuld. Progre.*, 42, pp 295-324.
23. Sclan Y.-M., 1996, "Projet Stadyne - Méthode de Melnikov", *Rapports ESIM/GM/YMS/1.01, 3.01, 4.01 et 6.01.*