

6e JOURNÉES DE L'HYDRODYNAMIQUE

24, 25, 26 février 1997 - Nantes

**FONCTIONS DE GREEN SPECIFIQUES DES PROBLEMES
D'HYDRODYNAMIQUE POSES DANS LES MILIEUX
STRATIFIES HORIZONTALEMENT**

P. GUEVEL - D. LAJOIE

ACRI S.A.
260, Route du Pin Montard - BP 234
06904 Sophia Antipolis Cedex
Tél. 04 92 96 75 00 - Fax 04 93 95 80 95

Résumé

On présente ici les bases mathématiques qui permettent de déterminer les caractéristiques cinématiques et dynamiques de l'écoulement induit par un solide (Σ), évoluant dans un milieu composé de deux fluides non miscibles présentant une interface (δ). Le fluide inférieur (\mathcal{D}_1), de masse volumique ρ_1 , est limité par un fond horizontal (Π) ; le fluide supérieur (\mathcal{D}_2), de masse volumique $\rho_2 < \rho_1$, est limité par une surface libre (SL). Ces bases sont établies dans l'hypothèse des écoulements irrotationnels des fluides "presque parfaits" ; en outre les conditions aux limites sur les frontières libres (δ) et (SL) sont linéarisées. Le potentiel qui régit l'écoulement dans les milieux (\mathcal{D}_1) et (\mathcal{D}_2) est recherché sous la forme d'une distribution superficielle de sources réparties sur le solide (Σ). Une attention particulière est apportée au cas où ce solide traverse l'interface (δ).

Summary

We present here the mathematical basis for the calculation of the kinematic and dynamic flow characteristics, induced by a solid (Σ), moving in a medium composed of two immiscible fluids, separated by an interface (δ). The lower fluid (\mathcal{D}_1), with a density ρ_1 , is bounded by a horizontal bottom (Π); the upper fluid, with a density $\rho_2 < \rho_1$, is bounded by a free surface (SL). We make the assumptions of "nearly perfect" fluid irrotational flows; the boundary conditions on the interfaces (δ) and (SL) are linearized. The potential, which governs the flow in the media (\mathcal{D}_1) and (\mathcal{D}_2), is expressed in the form of a superficial distribution of sources on the solid (Σ). A particular attention is paid to the case where the solid goes through the interface (δ).

Introduction

Les développements qui vont suivre ont trait à la partie non confidentielle d'une étude effectuée il y a déjà plusieurs années à l'initiative de la DRET. A l'époque, on n'avait pas estimé opportun de publier sur le thème des écoulements en milieu stratifié ; et cela pour différentes raisons :

- les temps de résidence sur ordinateur étaient dissuasifs, du moins pour traiter le problème dans des configurations réalistes ;
- les méthodes, auxquelles on avait recours pour calculer un nombre extrêmement important d'intégrales dont les noyaux sont des fonctions présentant des variations anarchiques de grande fréquence, n'étaient pas jugées suffisamment fiables.
- les applications ne semblaient pas devoir dépasser le cadre des préoccupations manifestées par les militaires.

Il n'en est plus ainsi actuellement. En effet, le remarquable accroissement des performances du matériel informatique, ainsi que les très grands progrès réalisés par la communauté scientifique pour effectuer les quadratures de fonctions très rapidement variables, sont tels que l'on peut raisonnablement envisager des applications dans les configurations moins académiques que celles traitées à la fin des années 80. Par ailleurs, il semble que certaines observations satellitaires récentes, à vocation non militaire, font apparaître des phénomènes qui pourraient avoir pour origine l'existence d'ondes internes induites par les courants et les marées.

Dans la présentation actuelle des résultats théoriques concernant les écoulements dans les milieux stratifiés horizontalement, on s'est attaché à considérer les effets globaux d'une distribution superficielle de sources de Kelvin réparties sur la carène (Σ) d'un solide pouvant traverser l'interface (δ) selon un mouvement de roto-translation quelconque.

I Rappels de quelques résultats de l'analyse classique

Transformées de Fourier à deux variables

$$(1.1) \quad \begin{cases} \hat{\Phi}(\theta, k; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x', y'; t) e^{-ik(x'\cos\theta + y'\sin\theta)} dx' dy' \\ \Phi(x, y; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_0^{\infty} \hat{\Phi}(\theta, k; t) e^{ik(x\cos\theta + y\sin\theta)} k dk \end{cases}$$

Opérateur intégral de Fourier

$$(1.2) \quad \mathcal{F}\{A(\theta, k; z, t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_0^{\infty} A(\theta, k; z, t) e^{ik(x\cos\theta + y\sin\theta)} k dk$$

Si la fonction A est une combinaison linéaire de e^{kz} et de e^{-kz} , $\mathcal{F}\{A\}$ est une fonction harmonique des variables x , y , z . Pour $z=0$, $\mathcal{F}\{A\}$ est la fonction dont la transformée de Fourier est $A(\theta, k; t)$.

Expression de $\frac{1}{|MM'|}$ sous la forme d'une intégrale de Fourier

$$(1.3) \quad \frac{1}{|MM'|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-k|z-z'|} e^{ik[(x-x')\cos\theta + (y-y')\sin\theta]} dk \\ = \mathcal{F}\left\{ \frac{1}{k} e^{-k|z-z'|} + e^{-ik(x'\cos\theta + y'\sin\theta)} \right\}, |z-z'| \neq 0$$

II Spécificités du problème posé par l'évolution d'un solide dans un milieu stratifié

Un premier fluide (\mathcal{D}_1), de masse volumique ρ_1 , est limité inférieurement par un fond horizontal (Π) de cote $z = -h_1$; il est limité supérieurement par l'interface (δ), de cote moyenne $z=0$, qu'il forme avec un deuxième

fluide (\mathcal{D}_2) de masse volumique $\rho_2 < \rho_1$. Ce deuxième fluide est par ailleurs limité supérieurement par une surface libre (SL) de cote moyenne $z=h_2$.

L'état d'équilibre initial des deux fluides superposés est perturbé par un solide, entraîné dans un mouvement de roto-translation de vitesse $\vec{V}_E(M) = \vec{C}(t) + \vec{\Omega} \times \vec{OM}$, dont la surface de carène (Σ) peut éventuellement traverser l'interface (Δ). Dans ce dernier cas, on notera :

(Σ_1), (Σ_2) les éléments de (Σ) situés respectivement dans les domaines (\mathcal{D}_1) et (\mathcal{D}_2) ;

(SF), la surface de flottaison ;

(C), le contour de flottaison, orienté dans le sens trigonométrique. Par ailleurs, \vec{n} sera en toute circonstance la normale extérieure à (Σ).

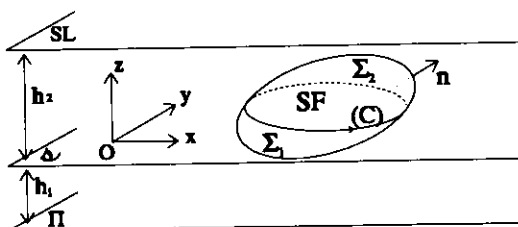


Figure 1

Tous les développements qui vont suivre seront effectués dans le cadre de la théorie linéaire des écoulements des fluides "presque parfaits", caractérisés par le coefficient de viscosité fictif $\varepsilon=(0^+)$. Dans ces conditions, le champ de perturbation est régi par un potentiel harmonique $\Phi(M,t)$ dont les déterminations $\Phi_1(M,t)$, $\Phi_2(M,t)$, valables respectivement dans (\mathcal{D}_1) et (\mathcal{D}_2), doivent respecter les conditions aux limites suivantes :

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0 & \text{pour } z = -h_1 \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} & \text{pour } z = 0 \\ \rho_1 \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + g \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + g \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right), & \text{pour } z = 0 \\ \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + g \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = 0, & \text{pour } z = h_2 \end{cases}$$

$$(2.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \vec{V}_E \cdot \vec{n}, & \text{sur } (\Sigma_1) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = \vec{V}_E \cdot \vec{n}, & \text{sur } (\Sigma_2) \end{cases}$$

La solution du problème ainsi posé sera recherchée sous la forme d'une distribution superficielle de sources de Kelvin, réparties sur la surface (Σ) avec une densité $\sigma=\sigma(M',t)$ *a priori* inconnue. Afin de satisfaire automatiquement les deux premières des équations (2.1), on pose :

$$(2.3) \quad \begin{cases} \Phi_1(M,t) = \Phi(M,t) + \Phi_0(M,t) + \mathcal{F} \left\{ \hat{\phi}(\theta, k; t) \frac{\text{chk}(z+h_1)}{\text{shkh}_1} \right\} \\ \Phi_2(M,t) = \Phi(M,t) + \Phi_0(M,t) + \mathcal{F} \left\{ \hat{\phi}(\theta, k; t) \text{shkz} + \hat{\psi}(\theta, k; t) \text{chkz} \right\} \end{cases}$$

avec :

$$(2.4) \quad \begin{cases} \Phi(M,t) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \sigma(M',t) \frac{1}{|MM'|} dS(M') \\ \Phi_0(M,t) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \sigma(M',t) \frac{1}{|MN'|} dS(M') \end{cases}$$

$N'(x', y', -(z'+2h))$ étant le symétrique de M' par rapport à la surface du fond et $\mathcal{F}\{\}$ l'opérateur défini en (1.2).

En admettant, du moins momentanément, que la loi de répartition des densités de sources sur (Σ) est connue, il reste à déterminer les fonctions $\hat{\phi} = \hat{\phi}(\theta, k; t)$, $\hat{\psi} = \hat{\psi}(\theta, k; t)$ de telle sorte que les deux dernières de ces équations (2.1) soient également satisfaites. Pour cela, il est évident qu'on a tout intérêt à mettre les potentiels de Rankine $\Phi(M, t)$ et $\Phi_0(M, t)$ sous la forme d'intégrales de Fourier ; ce qui est rendu possible par application des identités du type (1.3). Mais dans le cas présent où le solide traverse l'interface (δ) , on se heurte à une difficulté majeure du fait que l'identité,

$$\frac{1}{|MM'|} = \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{k} e^{-k|z-z'|} + e^{-ik(x'\cos\theta+y'\sin\theta)} \right\},$$

cesse d'être valable pour $z-z'=0$.

Cette circonstance nécessite de devoir se livrer à une longue digression.

III Calcul des transformées de Fourier des traces, sur le plan $z=0$, du potentiel de Rankine et de ses dérivées spatiales

On se borne ici à ne prendre en considération, dans l'expression complète du potentiel de Rankine, que la contribution du seul terme sujet à caution, soit :

$$(3.1) \quad \Phi(M, t) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \sigma(M', t) \frac{1}{|MM'|} dS(M').$$

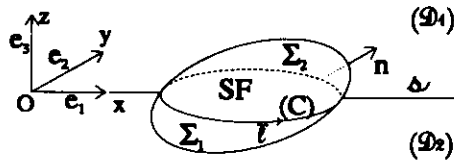


Figure 2

III.1 Transformée de Fourier de Φ , pour $z=0$

Le potentiel de simple couche étant continu à la traversée de la surface (Σ) , on peut encore écrire sans ambiguïté:

$$(3.2) \quad \Phi(x, y; t)|_{z=0} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \int_0^{\infty} [H_1(\theta, k; t) + H_2(\theta, k; t)] e^{ik(x\cos\theta+y\sin\theta)} dk,$$

en introduisant les fonctions de Kochin :

$$(3.3) \quad H_1(\theta, k; t) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_1} \sigma(M', t) e^{kz'} e^{-ik(x'\cos\theta+y'\sin\theta)} dS(M'),$$

$$(3.4) \quad H_2(\theta, k; t) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_2} \sigma(M', t) e^{-kz'} e^{-ik(x'\cos\theta+y'\sin\theta)} dS(M').$$

On en déduit immédiatement, d'après les formules de réciprocity des transformations de Fourier :

$$(3.5) \quad \hat{\Phi}(\theta, k; t) = \frac{1}{k} [H_1(\theta, k; t) + H_2(\theta, k; t)].$$

III.2 Transformées de Fourier de $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ et de $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$, pour $z=0$

En partant de la définition même de la transformée de Fourier directe, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial x}(\theta, k; t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\Phi}{\partial x} e^{-ik(x\cos\theta+y\sin\theta)} dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} [\Phi e^{-ik(x\cos\theta+y\sin\theta)}] dx dy + \frac{1}{2\pi} ik \cos\theta \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi e^{-ik(x\cos\theta+y\sin\theta)} dx dy, \end{aligned}$$

soit :

$$(3.6) \quad \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x}(\theta, k; t) = ik \cos \theta \hat{\Phi}(\theta, k; t) + \frac{1}{2\pi} \bar{e}_1 \cdot \iint_{\Delta} \overrightarrow{\text{grad}} \left[\Phi_e e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} \right] dS \\ + \frac{1}{2\pi} \bar{e}_1 \cdot \iint_{SF} \overrightarrow{\text{grad}} \left[\Phi_i e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} \right] dS,$$

en désignant par Φ_e , Φ_i , les deux déterminations du potentiel Φ dans les domaines extérieur et intérieur à la surface (Σ).

La première des intégrales peut être transformée ainsi, par application de la formule du gradient :

$$\iint_{\Delta} \overrightarrow{\text{grad}} \left[\Phi_e e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} \right] dS = - \int_C \Phi_e e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} \bar{v} dl + \int_{C_-} \Phi_e e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} \bar{v} dl,$$

\bar{v} désignant le vecteur unitaire de la normale extérieure au contour de flottaison (C) et au cercle de contrôle (C_-), de rayon R très grand.

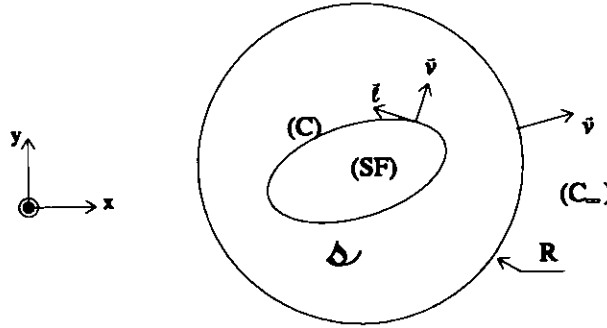


Figure 3 : Vue de dessus

La contribution de l'intégrale \bar{I}_∞ , définie sur le cercle (C_-), est manifestement nulle dans le cas où le débit total des sources réparties sur la surface (Σ),

$$Q = \iint_{\Sigma} \sigma(M') dS(M'),$$

est égal à zéro.

Il en est encore ainsi lorsque ce débit n'est pas nul ; on a en effet, en posant $x=R \cos \alpha$, $y=R \sin \alpha$:

$$\bar{I}_\infty = - \frac{Q}{4\pi} \bar{e}_1 \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ikR \cos(\alpha-\theta)} \cos \alpha d\alpha - \frac{Q}{4\pi} \bar{e}_2 \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-ikR \cos(\alpha-\theta)} \sin \alpha d\alpha \\ = \frac{iQ}{2} (\cos \theta \bar{e}_1 + \sin \theta \bar{e}_2) J_1(kR),$$

$J_1()$ étant la fonction de Bessel de première espèce, d'ordre $n=1$. L'intégrale \bar{I}_∞ tend donc bien vers zéro quand R tend vers l'infini, mais seulement comme $\frac{1}{\sqrt{R}}$. On a alors en toute circonstance :

$$(3.7) \quad \iint_{\Delta} \overrightarrow{\text{grad}} \left[\Phi_e e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} \right] dS = - \int_C \Phi_e e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} \bar{v} dl.$$

La seconde des intégrales figurant dans le second membre de la formule (3.6) peut également être transformée ainsi :

$$(3.8) \quad \iint_{SF} \overrightarrow{\text{grad}} \left[\Phi_i e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} \right] dS = \int_C \Phi_i e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} \bar{v} dl.$$

D'où, en effectuant dans (3.6) les substitutions (3.7) et (3.8) :

$$(3.9) \quad \frac{\hat{\partial\Phi}}{\partial x}(\theta, k; t) = ik \cos\theta \hat{\Phi} - \frac{1}{2\pi} \int_C (\Phi_e - \Phi_i) e^{-ik(x \cos\theta + y \sin\theta)} (\bar{e}_1 \cdot \bar{v}) d\ell.$$

Ce résultat ne préjuge en rien de la nature des singularités réparties sur la surface (Σ) ; dans le cas présent , on a simplement :

$$(3.10) \quad \frac{\hat{\partial\Phi}}{\partial x}(\theta, k; t) = ik \cos\theta \hat{\Phi}(\theta, k; t) = i \cos\theta [H_1(\theta, k; t) + H_2(\theta, k; t)]$$

et, également :

$$(3.11) \quad \frac{\hat{\partial\Phi}}{\partial y}(\theta, k; t) = ik \sin\theta \hat{\Phi}(\theta, k; t) = i \sin\theta [H_1(\theta, k; t) + H_2(\theta, k; t)].$$

III.3 Transformée de Fourier de $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$, pour $z=0$

En partant encore de la formule de définition,

$$(3.12) \quad \frac{\hat{\partial\Phi}}{\partial z}(\theta, k; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\Phi}{\partial z} e^{-ik(x \cos\theta + y \sin\theta)} dx dy,$$

puis en introduisant la fonction harmonique,

$$(3.13) \quad \Psi = e^{k[z - i(x \cos\theta + y \sin\theta)]},$$

régulière en tout point du domaine $z \leq 0$, on obtient tout d'abord :

$$\frac{\hat{\partial\Phi}}{\partial z}(\theta, k; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} \Psi - \Phi \frac{\partial\Psi}{\partial z} \right) dx dy + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi e^{-ik(x \cos\theta + y \sin\theta)} dx dy,$$

soit :

$$(3.14) \quad \frac{\hat{\partial\Phi}}{\partial z}(\theta, k; t) = k \hat{\Phi}(\theta, k; t) - \frac{1}{2\pi} \iint_D \left(\Phi \frac{\partial\Psi}{\partial z} - \Psi \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) dS - \frac{1}{2\pi} \iint_{SF} \left(\Phi \frac{\partial\Psi}{\partial z} - \Psi \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) dS.$$

La première des intégrales ci-dessus peut être transformée ainsi par application de la deuxième formule de Green dans le domaine (\mathcal{D}_1) :

$$(3.15) \quad \iint_D \left(\Phi \frac{\partial\Psi}{\partial z} - \Psi \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) dS = \iint_{\Sigma_1} \left(\Phi_e \frac{\partial\Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial\Phi_e}{\partial n} \right) dS - \iint_{(\Sigma_\infty + S'_\infty)} \left(\Phi \frac{\partial\Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right) dS,$$

(Σ_∞) étant le cylindre circulaire vertical, de rayon R très grand ; (S'_∞) étant un disque circulaire horizontal, également de rayon R, immergé à une profondeur H très grande.

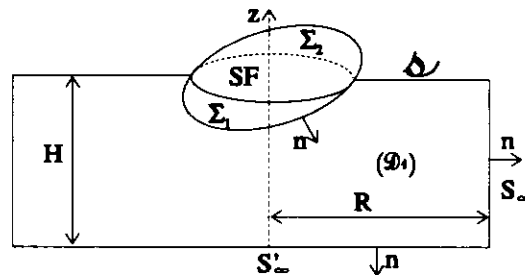


Figure 4

Les intégrales définies sur les surfaces de contrôle (S_∞) et (S'_∞) sont manifestement nulles dans le cas où le débit total Q des sources réparties sur (Σ) est lui-même nul. Lorsqu'il n'en est pas ainsi, un calcul élémentaire, analogue à celui conduit dans l'alinéa précédent pour démontrer que l'intégrale \bar{I}_∞ est nulle, permet d'établir le résultat suivant :

$$\iint_{(S_+ + S_-)} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) dS = \frac{kQ}{2} J_1(kR) \int_{-\infty}^0 \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} e^{kz} dz,$$

qui prouve que l'intégrale ci-dessus tend vers zéro comme $\frac{1}{\sqrt{R}}$ quand $R \rightarrow \infty$.

On a donc dans tous les cas :

$$(3.16) \quad \iint_{\mathcal{D}} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) dS = \iint_{\Sigma_1} \left(\Phi_e \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi_e}{\partial n} \right) dS.$$

En appliquant à nouveau la deuxième formule de Green, mais dans le domaine compris entre les surfaces (Σ_1) et (SF) , on obtient également :

$$(3.17) \quad \iint_{SF} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) dS = - \iint_{\Sigma_1} \left(\Phi_i \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} \right) dS.$$

D'où, en effectuant les deux substitutions ci-dessus dans la formule (3.14), une première expression de $\frac{\hat{\partial \Phi}}{\partial z}$; soit :

$$(3.18) \quad \frac{\hat{\partial \Phi}}{\partial z}(\theta, k; t) = k\hat{\Phi}(\theta, k; t) - \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma_1} \left\{ (\Phi_e - \Phi_i) \frac{\partial}{\partial n} e^{k[z - i(x \cos \theta + y \sin \theta)]} - \frac{\partial}{\partial n} (\Phi_e - \Phi_i) e^{k[z - i(x \cos \theta + y \sin \theta)]} \right\} dS$$

On obtient de la même manière, en introduisant la fonction harmonique,

$$(3.19) \quad \psi' = e^{-k[z + i(x \cos \theta + y \sin \theta)]},$$

mais en effectuant les transformations d'intégrales dans les domaines pour lesquels z est positif :

$$(3.20) \quad \frac{\hat{\partial \Phi}}{\partial z}(\theta, k; t) = -k\hat{\Phi}(\theta, k; t) + \frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma_2} \left\{ (\Phi_e - \Phi_i) \frac{\partial}{\partial n} e^{-k[z + i(x \cos \theta + y \sin \theta)]} - \frac{\partial}{\partial n} (\Phi_e - \Phi_i) e^{-k[z + i(x \cos \theta + y \sin \theta)]} \right\} dS$$

En additionnant membre à membre les égalités (3.18) et (3.20), on obtient la formule générale suivante :

$$(3.21) \quad \frac{\hat{\partial \Phi}}{\partial z}(\theta, k; t) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_1} \left\{ (\Phi_e - \Phi_i) \frac{\partial}{\partial n} e^{k[z - i(x \cos \theta + y \sin \theta)]} - \frac{\partial}{\partial n} (\Phi_e - \Phi_i) e^{k[z - i(x \cos \theta + y \sin \theta)]} \right\} dS \\ + \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_2} \left\{ (\Phi_e - \Phi_i) \frac{\partial}{\partial n} e^{-k[z + i(x \cos \theta + y \sin \theta)]} - \frac{\partial}{\partial n} (\Phi_e - \Phi_i) e^{-k[z + i(x \cos \theta + y \sin \theta)]} \right\} dS,$$

qui, dans le cas présent d'une distribution de simple couche se réduit à :

$$(3.22) \quad \frac{\hat{\partial \Phi}}{\partial z}(\theta, k; t) = -[H_1(\theta, k; t) - H_2(\theta, k; t)].$$

En soustrayant les égalités (3.18) et (3.20), on obtient aussi :

$$\hat{\Phi}(\theta, k; t) = \frac{1}{k} [H_1(\theta, k; t) + H_2(\theta, k; t)] ;$$

ce qui conforte le résultat déjà admis en (3.5)

III.4 Transformées de Fourier des dérivées secondes de Φ , pour $z=0$

On se bornera ici à ne présenter que le calcul de $\frac{\hat{\partial^2 \Phi}}{\partial x^2}$. D'après la formule générale (3.9), on a tout d'abord :

$$(3.23) \quad \frac{\hat{\partial^2 \Phi}}{\partial x^2}(\theta, k; t) = ik \cos \theta \frac{\hat{\partial \Phi}}{\partial x} - \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\partial (\Phi_e - \Phi_i)}{\partial x} e^{-ik(x \cos \theta + y \sin \theta)} (\bar{e}_1 \cdot \bar{v}) dl.$$

Mais, dans le cas d'une distribution de simple couche, la discontinuité de la vitesse est égale à $\sigma \bar{n}$; d'où, compte

tenu de l'expression (3.10) de $\frac{\hat{\partial}\Phi}{\partial x}$:

$$(3.24) \quad \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial x^2}(\theta, k; t) = -k \cos^2 \theta [H_1(\theta, k; t) + H_2(\theta, k; t)] + \mathcal{L}_1(\theta, k; t),$$

$$\text{en posant } \mathcal{L}_1(\theta, k; t) = -\frac{1}{2\pi} \int_C \sigma(M', t) e^{-ik(x'\cos\theta + y'\sin\theta)} (\bar{e}_1 \cdot \bar{n})(\bar{e}_1 \cdot \bar{v}) d\ell(M')$$

ou bien :

$$(3.25) \quad \mathcal{L}_1(\theta, k; t) = -\frac{1}{2\pi} \int_C \sigma(M', t) e^{-ik(x'\cos\theta + y'\sin\theta)} (\bar{e}_1 \cdot \bar{n})(\bar{e}_2 \cdot \bar{l}) d\ell(M'),$$

\bar{l} désignant le vecteur unitaire de la tangente au contour de flottaison décrit dans le sens trigonométrique. On obtient de la même manière les expressions des transformées de Fourier des autres dérivées du second ordre de Φ , toujours pour $z=0$; l'ensemble des résultats est donné ci-dessous :

$$(3.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\Phi} = \frac{1}{k} (H_1 + H_2), \\ \frac{\hat{\partial}\Phi}{\partial x} = i \cos \theta (H_1 + H_2), \quad \frac{\hat{\partial}\Phi}{\partial y} = i \sin \theta (H_1 + H_2), \quad \frac{\hat{\partial}\Phi}{\partial z} = -(H_1 - H_2) \\ \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial x^2} = -k \cos^2 \theta (H_1 + H_2) + \mathcal{L}_1, \quad \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial y^2} = -k \sin^2 \theta (H_1 + H_2) + \mathcal{L}_2 \\ \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial z^2} = k (H_1 + H_2) + \mathcal{L}_3 \\ \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial x \partial y} = -k \sin \theta \cos \theta (H_1 + H_2) + \mathcal{L}_4, \quad \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial y \partial z} = -ik \sin \theta (H_1 - H_2) + \mathcal{L}_5 \\ \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial x \partial z} = -ik \cos \theta (H_1 - H_2) + \mathcal{L}_6 \end{array} \right.$$

$$(3.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1(\theta, k; t) = -\frac{1}{2\pi} \int_C \sigma(M', t) e^{-ik(x'\cos\theta + y'\sin\theta)} \alpha_1(M') d\ell(M'), \\ \alpha_1 = (\bar{e}_1 \cdot \bar{n})(\bar{e}_2 \cdot \bar{l}), \quad \alpha_2 = -(\bar{e}_2 \cdot \bar{n})(\bar{e}_1 \cdot \bar{l}), \quad \alpha_3 = -(\alpha_1 + \alpha_2) = (\bar{n} \wedge \bar{e}_3) \cdot \bar{l}, \\ \alpha_4 = (\bar{e}_2 \cdot \bar{n})(\bar{e}_2 \cdot \bar{l}), \quad \alpha_5 = -(\bar{e}_3 \cdot \bar{n})(\bar{e}_1 \cdot \bar{l}), \quad \alpha_6 = (\bar{e}_3 \cdot \bar{n})(\bar{e}_2 \cdot \bar{l}). \end{array} \right.$$

Il apparaît ainsi que si on avait effectué les diverses dérivations à partir de l'expression du potentiel Φ , mise préalablement sous la forme d'une intégrale de Fourier,

$$\Phi(M, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \int_0^{\infty} [e^{-kz} H_1(\theta, k; t) + e^{kz} H_2(\theta, k; t)] e^{ik(x\cos\theta + y\sin\theta)} dk,$$

on aurait obtenu les formules apparentées à celles établies en (3.26), mais privées de tous les termes $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_i(\theta, k; t)$, dits "d'intégrales de ligne". Ce n'est que dans le cas du problème de diffraction-radiation sans vitesse d'avance qu'une telle omission n'a pas de conséquence ; en effet, la condition de surface libre ne fait intervenir aucune dérivée seconde du potentiel Φ .

IV Expressions des transformées de Fourier des dérivées temporelles de la trace du potentiel de Rankine Φ sur le plan $z=0$

On se borne ici à considérer le cas où les sources de Rankine sont réparties sur une surface mobile, mais non déformable, avec une densité superficielle fonction du temps. On a alors :

$$\Phi(M, t) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \sigma(M', t) \frac{1}{|MM'|} dS(M'),$$

$$\text{avec } |MM'| = \sqrt{[(x - x'(t))^2 + (y - y'(t))^2 + (z - z'(t))^2]} ;$$

et, tout d'abord :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{|MM'|} \right) = \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{1}{|MM'|} \right) \frac{dx'}{dt} + \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{1}{|MM'|} \right) \frac{dy'}{dt} + \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{1}{|MM'|} \right) \frac{dz'}{dt},$$

soit :

$$(4.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{|MM'|} \right) = - \left[\frac{dx'}{dt} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy'}{dt} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{dz'}{dt} \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{1}{|MM'|}.$$

D'où, l'expression de $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$:

$$(4.2) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t}(M', t) \frac{1}{|MM'|} dS(M') + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \iint_{\Sigma} \sigma(M', t) \frac{dx'}{dt} \frac{1}{|MM'|} dS(M') \\ + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \iint_{\Sigma} \sigma(M', t) \frac{dy'}{dt} \frac{1}{|MM'|} dS(M') + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \iint_{\Sigma} \sigma(M', t) \frac{dz'}{dt} \frac{1}{|MM'|} dS(M').$$

D'après les quatre premières des formules (3.26), la transformée de Fourier de $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, pour $z=0$, est par conséquent :

$$\frac{\hat{\partial \Phi}}{\partial t}(\theta, k; t) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_1} \left\{ \frac{1}{k} \frac{\partial \sigma}{\partial t}(M', t) + \sigma(M', t) \left[i(\cos\theta \frac{dx'}{dt} + \sin\theta \frac{dy'}{dt} - \frac{dz'}{dt}) \right] e^{k[z' - i(x'\cos\theta + y'\sin\theta)]} \right\} dS(M') \\ - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_2} \left\{ \frac{1}{k} \frac{\partial \sigma}{\partial t}(M', t) - \sigma(M', t) \left[i(\cos\theta \frac{dx'}{dt} + \sin\theta \frac{dy'}{dt} + \frac{dz'}{dt}) \right] e^{-k[z' + i(x'\cos\theta + y'\sin\theta)]} \right\} dS(M'),$$

soit :

$$\frac{\hat{\partial \Phi}}{\partial t}(\theta, k; t) = -\frac{1}{4\pi k} \iint_{\Sigma_1} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sigma(M', t) e^{k[z' - i(x'\cos\theta + y'\sin\theta)]} \right\} dS(M') \\ - \frac{1}{4\pi k} \iint_{\Sigma_2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sigma(M', t) e^{-k[z' + i(x'\cos\theta + y'\sin\theta)]} \right\} dS(M'),$$

et finalement :

$$(4.3) \quad \frac{\hat{\partial \Phi}}{\partial t}(\theta, k; t) = \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t} [H_1(\theta, k; t) + H_2(\theta, k; t)].$$

Ce résultat très simple était prévisible du fait que, d'après les formules (3.26), les expressions des transformées de Fourier du potentiel de simple couche et de ses premières dérivées ne renferment aucune intégrale de ligne.

On obtient de la même manière, après des calculs quelque peu fastidieux ne présentant néanmoins aucune difficulté particulière :

$$(4.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial t^2}(\theta, k; t) = \frac{1}{k} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [H_1(\theta, k; t) + H_2(\theta, k; t)] + \mathcal{L}(\theta, k; t) \\ \mathcal{L}(\theta, k; t) = -\frac{1}{2\pi} \int_C \sigma(M', t) \left[\alpha_1 \left(\frac{dx'}{dt} \right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{dy'}{dt} \right)^2 + \alpha_3 \left(\frac{dz'}{dt} \right)^2 + 2\alpha_4 \frac{dx'}{dt} \frac{dy'}{dt} \right. \\ \left. + 2\alpha_5 \frac{dy'}{dt} \frac{dz'}{dt} + 2\alpha_6 \frac{dz'}{dt} \frac{dx'}{dt} \right] e^{-ik(x' \cos \theta + y' \sin \theta)} d\ell(M') \end{cases}$$

les coefficients $\alpha_i = \alpha_i(M', t)$ étant toujours ceux définis en (3.27).

V Expression sous forme d'intégrale de Fourier de la fonction: $\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=0}$

D'après la quatrième des formules (3.26) et compte tenu de (4.3) ainsi que de (4.4), la quantité ci-dessus a pour transformée de Fourier :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} - gk \right) \frac{H_1(\theta, k; t)}{k} + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + gk \right) \frac{H_2(\theta, k; t)}{k} + \mathcal{L}(\theta, k; t).$$

On a par conséquent :

$$(5.1) \quad \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=0} = \mathcal{F} \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} - gk \right) \frac{H_1(\theta, k; t)}{k} + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + gk \right) \frac{H_2(\theta, k; t)}{k} + \mathcal{L}(\theta, k; t) \right\}.$$

On est maintenant en mesure de poursuivre les calculs entrepris en début d'article.

VI Détermination de la fonction de Green associée à une distribution superficielle de sources de Rankine

Avec les notations du chapitre II, la condition d'interface, qu'il convient de respecter quels que soient x , y et t , s'explique ainsi :

$$(6.1) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + gk \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \text{thkh}_1 \right) \hat{\phi}(\theta, k; t) - \frac{\rho_2}{\rho_1} \text{thkh}_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \hat{\psi}(\theta, k; t) = f(\theta, k; t),$$

$$(6.2) \quad f(\theta, k; t) = -\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \text{thkh}_1 \left\{ \frac{1}{k} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} - gk \right) [H_1(\theta, k; t) + H_0(\theta, k; t)] \right. \\ \left. + \frac{1}{k} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + gk \right) H_2(\theta, k; t) + \mathcal{L}(\theta, k; t) \right\},$$

où $H_0(\theta, k; t)$ désigne la fonction de Kochin associée à l'existence du potentiel $\Phi_0(M, t)$, soit :

$$(6.3) \quad H_0(\theta, k; t) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \sigma(M', t) e^{-k(z'+2h_1)} e^{-ik(x' \cos \theta + y' \sin \theta)} dS(M').$$

Par ailleurs, la condition de surface libre s'explique sans la moindre difficulté puisque sur le plan $z=h_2$, les différences de cote $z-z'$, $z+z'+2h_1$, restent strictement positives ; on obtient alors immédiatement :

$$(6.4) \quad \text{thkh}_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + gk \coth kh_2 \right) \hat{\phi}(\theta, k; t) + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + gk \text{thkh}_2 \right) \hat{\psi}(\theta, k; t) = g(\theta, k; t);$$

$$(6.5) \quad g(\theta, k; t) = -(1 - \text{thkh}_2) \frac{1}{k} [H_1(\theta, k; t) + H_0(\theta, k; t) + H'_2(\theta, k; t)];$$

en notant :

$$(6.6) \quad H'_2(\theta, k; t) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_2} \sigma(M', t) e^{kz'} e^{-ik(x'\cos\theta + y'\sin\theta)} dS(M').$$

Les fonctions inconnues $\hat{\phi}(\theta, k; t)$ et $\hat{\psi}(\theta, k; t)$ sont alors les solutions du système formé des deux équations différentielles ordinaires (6.1) et (6.4), du second ordre, à coefficients constants, dont les seconds membres sont des fonctions connues de la variable t . Dans le cas présent, ces équations peuvent être facilement découplées en usant de l'artifice qui consiste à introduire la fonction auxiliaire $\hat{\chi} = \hat{\chi}(\theta, k; t)$, définie ainsi :

$$(6.7) \quad \hat{\phi} = m\hat{\psi} + \hat{\chi},$$

$m=m(k)$ étant, pour l'instant, un paramètre arbitraire. En effectuant cette substitution dans les formules (6.1) et (6.4), on obtient respectivement :

$$(6.8) \quad \left(m - \frac{\rho_2}{\rho_1} \text{thkh}_1 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + gk \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \frac{m \text{thkh}_1}{m - \frac{\rho_2}{\rho_1} \text{thkh}_1} \right) \hat{\psi} \\ + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + gk \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \text{thkh}_1 \right) \hat{\chi} = f(\theta, k; t)$$

et :

$$(6.9) \quad (1 + m \text{thkh}_2) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + gk \frac{m + \text{thkh}_2}{1 + m \text{thkh}_2} \right) \hat{\psi} \\ + \text{thkh}_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + gk \coth kh_2 \right) \hat{\chi} = g(\theta, k; t).$$

Il apparaît ainsi que la fonction $\hat{\psi} = \hat{\psi}(\theta, k; t)$ pourra être éliminée entre ces deux nouvelles équations en donnant au paramètre m une valeur telle qu'on ait :

$$(6.10) \quad \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \frac{m \text{thkh}_1}{m - \frac{\rho_2}{\rho_1} \text{thkh}_1} = \frac{m + \text{thkh}_2}{1 + m \text{thkh}_2}.$$

A ce moment là, $m=m(k)$ est solution de l'équation du second degré :

$$(6.11) \quad \left(1 - \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \text{thkh}_1 \text{thkh}_2 \right) m^2 - (\text{thkh}_1 - \text{thkh}_2) m - \frac{\rho_2}{\rho_1} \text{thkh}_1 \text{thkh}_2 = 0,$$

qui admet toujours deux racines réelles de signes opposés.

En retenant arbitrairement l'une de celles-ci, l'équation différentielle qui permet de déterminer la fonction auxiliaire $\hat{\chi} = \hat{\chi}(\theta, k; t)$ se présente sous la forme suivante :

$$(6.12) \quad \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + gka(k) \right] \hat{\chi}(\theta, k; t) = F(\theta, k; t),$$

avec :

$$(6.13) \quad a(k) = \frac{\text{thkh}_1 - m(k) \left[1 - \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \text{thkh}_1 \text{thkh}_2 \right]}{1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \text{thkh}_1 \text{thkh}_2},$$

et :

$$(6.14) \quad F(\theta, k; t) = \frac{[1 + m(k) \text{thkh}_2] f(\theta, k; t) - \left[m(k) - \frac{\rho_2}{\rho_1} \text{thkh}_1 \right] g(\theta, k; t)}{1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \text{thkh}_1 \text{thkh}_2}.$$

Compte tenu des expressions (6.2) et (6.5) de $f(\theta, k; t)$, $g(\theta, k; t)$ ainsi que de celles des fonctions de Kochin $H_1(\theta, k; t)$, $H_2(\theta, k; t)$, $H_0(\theta, k; t)$, $H'_2(\theta, k; t)$, définies respectivement en (3.3), (3.4), (6.3), (6.6), la fonction ci-dessus s'explique ainsi :

$$(6.15) \quad F(\theta, k; t) = P(k) \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} - gk \right) \frac{\mathcal{H}_1(\theta, k; t)}{k} + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + gk \right) \frac{H_2(\theta, k; t)}{k} + \mathcal{L}(\theta, k; t) \right] \\ + Q(k) \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} - gk \right) \frac{\mathcal{H}_2(\theta, k; t)}{k} \right],$$

en notant :

$$(6.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} P(k) = -\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \frac{[1 + m(k) \text{th}k h_2] \text{th}k h_1}{1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \text{th}k h_1 \text{th}k h_2} \\ Q(k) = \frac{(1 - \text{th}k h_2) \left[m(k) - \frac{\rho_2}{\rho_1} \text{th}k h_1 \right]}{1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} \text{th}k h_1 \text{th}k h_2} = -\frac{m(k)(1 - \text{th}k h_2)}{m(k) + \text{th}k h_2} P(k) \end{array} \right.$$

et :

$$(6.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_1(\theta, k; t) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_1} \sigma(M', t) e^{kz'} e^{-ik(x' \cos \theta + y' \sin \theta)} dS(M') \\ \quad - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \sigma(M', t) e^{-k(z'+2h_1)} e^{-ik(x' \cos \theta + y' \sin \theta)} dS(M') \\ H_2(\theta, k; t) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_2} \sigma(M', t) e^{-kz'} e^{-ik(x' \cos \theta + y' \sin \theta)} dS(M') \\ \mathcal{H}_2(\theta, k; t) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \sigma(M', t) \left[e^{kz'} + e^{-k(z'+2h_1)} \right] e^{-ik(x' \cos \theta + y' \sin \theta)} dS(M') \end{array} \right.$$

On rappelle que tous les développements ci-dessus ont été effectués en choisissant arbitrairement l'une des racines, notée $m(k)$ de l'équation (6.11). En retenant la seconde de ces racines notée $m'(k)$, on aurait obtenu :

$$(6.18) \quad \hat{\phi} = m' \hat{\psi} + \hat{\chi}',$$

$\hat{\chi}' = \hat{\chi}'(\theta, k; t)$, étant une nouvelle fonction auxiliaire caractérisée par l'équation différentielle :

$$(6.19) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + gka'(k) \right) \hat{\chi}'(\theta, k; t) = F'(\theta, k; t),$$

dans laquelle les expressions des fonctions $a'(k)$, $F'(\theta, k; t)$ se déduisent respectivement de celles de $a(k)$, $F(\theta, k; t)$ en y effectuant la seule substitution $m(k) \Rightarrow m'(k)$.

Une fois déterminées les solutions des équations (6.12) et (6.19), les fonctions cherchées $\hat{\phi}(\theta, k; t)$, $\hat{\psi}(\theta, k; t)$ s'explicitent immédiatement à partir des formules de définition (6.7) et (6.18), soit :

$$(6.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\phi}(\theta, k; t) = \frac{m(k) \hat{\chi}'(\theta, k; t) - m'(k) \hat{\chi}(\theta, k; t)}{m(k) - m'(k)} \\ \hat{\psi}(\theta, k; t) = \frac{\hat{\chi}'(\theta, k; t) - \hat{\chi}(\theta, k; t)}{m(k) - m'(k)} \end{array} \right.$$

Afin d'éviter de devoir calculer les dérivées temporelles des fonctions de Kochin, l'équation (6.12) sera modifiée comme suit :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + gka \right) \left[\hat{\chi} - P \left(\frac{\mathcal{H}_1}{k} + \frac{H_2}{k} \right) - Q \frac{\mathcal{H}_2}{k} \right] = -g \left[(1+a)(P\mathcal{H}_1 + Q\mathcal{H}_2) - (1-a)PH_2 \right] + P\mathcal{L},$$

de sorte que la fonction $\hat{\chi}(\theta, k; t)$ s'explique ainsi :

$$(6.21) \quad \hat{\chi} = \hat{\tau} + P\left(\frac{\mathcal{H}_1}{k} + \frac{H_2}{k}\right) + Q\frac{\mathcal{H}_2}{k},$$

la fonction auxiliaire $\hat{\tau} = \hat{\tau}(\theta, k; t)$ étant la solution de l'équation différentielle :

$$(6.22) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon\frac{\partial}{\partial t} + gka\right)\hat{\tau} = -g[(1+a)(P\mathcal{H}_1 + Q\mathcal{H}_2) - (1-a)PH_2] + P\mathcal{L}.$$

On obtient de la même manière, à partir de l'équation (6.19) :

$$(6.23) \quad \hat{\chi}' = \hat{\tau}' + P'\left(\frac{\mathcal{H}_1}{k} + \frac{H_2}{k}\right) + Q'\frac{\mathcal{H}_2}{k},$$

$$(6.24) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\varepsilon\frac{\partial}{\partial t} + gka'\right)\hat{\tau}' = -g[(1+a')(P'\mathcal{H}_1 + Q'\mathcal{H}_2) - (1-a')P'H_2] + P'\mathcal{L},$$

$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\theta, k; t)$, désignant toujours l'intégrale de ligne dont l'expression est donnée en (4.4).

Dans le but de s'assurer que les paramètres $a(k)$ et $a'(k)$ sont bien positifs, on cherchera à expliciter ceux-ci sans passer par l'intermédiaire des fonctions $m(k)$, $m'(k)$. Pour cela, on mettra à profit le fait que l'équation (6.11) permet déjà d'établir les relations :

$$m + m' = \frac{thkh_1 - thkh_2}{1 - \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} thkh_1 thkh_2}; \quad m \cdot m' = -\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{thkh_1 thkh_2}{1 - \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} thkh_1 thkh_2}.$$

On a, par suite, d'après la formule de définition (6.13) des paramètres $a(k)$:

$$(6.25) \quad a + a' = \frac{thkh_1 + thkh_2}{1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} thkh_1 thkh_2}; \quad a \cdot a' = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \frac{thkh_1 thkh_2}{1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} thkh_1 thkh_2}.$$

Il apparaît ainsi que les paramètres $a(k)$, $a'(k)$ sont les solutions de l'équation du second degré :

$$(6.26) \quad \left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} thkh_1 thkh_2\right)a^2 - (thkh_1 + thkh_2)a + \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} thkh_1 thkh_2 = 0,$$

qui admet toujours deux racines réelles positives puisqu'on a manifestement : $a+a'>0$, $aa'>0$ et :

$$(6.27) \quad \Delta = (thkh_1 - thkh_2)^2 + 4\frac{\rho_2}{\rho_1} \left(1 - \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} thkh_1 thkh_2\right) thkh_1 thkh_2 > 0.$$

La mise en oeuvre d'une méthode de calcul numérique, fondée sur les développements ci-dessus, n'est pas aussi complexe qu'il y paraît à première vue ; en effet, les paramètres spécifiques du problème posé en milieu stratifié, soit : $m(k)$, $m'(k)$, $a(k)$, $a'(k)$, $P(k)$, $P'(k)$, $Q(k)$, $Q'(k)$, ne varient pas très rapidement avec k ; en outre, chacun d'eux tend vers une constante lorsque k croît indéfiniment :

$$\begin{aligned} m_\infty &= 1; & m'_\infty &= -1; & a_\infty &= \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}; & a'_\infty &= 1 \\ P_\infty &= -2\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}; & P'_\infty &= 0; & Q_\infty &= 0; & Q'_\infty &= 0. \end{aligned}$$

Les courbes, reproduites à titre d'exemple sur la figure (5), représentent les variations des fonctions $a(k)$, $a'(k)$ dans le cas particulier où on impose $h_1=h_2=h$; et cela, pour différentes valeurs du rapport $\frac{\rho_2}{\rho_1}$:

- $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1,25 \cdot 10^{-3}$ (interface eau-air) ;
- $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 0,9$ (interface eau-huile) ;
- $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 0,995$ (interface du type thermocline).

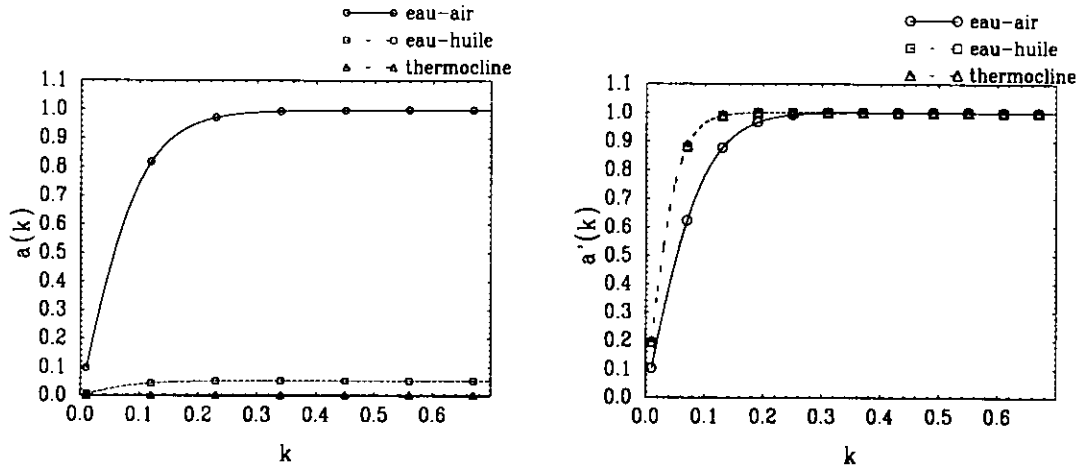


Figure 5 : fonctions a(k) et a'(k)

VII Cas particulier des problèmes bidimensionnels

Pour établir la fonction de GREEN dans une configuration bidimensionnelle, on a toujours la possibilité d'opérer selon une méthodologie calquée sur celle présentée ci-dessus, mais fondée sur les ressources de la théorie des fonctions analytiques de la variable complexe : $z=x+iy$; entre autres sur les identités suivantes :

$$(7.1) \begin{cases} \frac{1}{z-z'} = i \int_0^{\infty} e^{-ik(z-z')} dk & , \text{ pour } y-y' < 0 ; \\ \frac{1}{z-z'} = -i \int_0^{\infty} e^{ik(z-z')} dk & , \text{ pour } y-y' > 0 . \end{cases}$$

Les calculs correspondants sont particulièrement fastidieux du fait qu'il convient d'être vigilant en ce qui concerne la convergence des intégrales qu'on est amené à manipuler. Ceux-ci peuvent être évités en remarquant que tous les résultats obtenus dans une configuration tridimensionnelle sont transportables à une configuration bidimensionnelle analogue en exploitant la formule suivante :

$$(7.2) \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta, k; t) d\theta \int_{-L}^{+L} e^{ik(y-y') \sin \theta} dy' = \frac{2\pi}{k} [f(0, k; t) + f(\pi, k; t)]$$

qui s'établit à partir de la méthode de la phase stationnaire de Lord KELVIN.

On donne, à titre d'exemple, le résultat de cette transposition dans le cas du problème de diffraction avec vitesse d'avance, en profondeur finie. Dans une configuration tridimensionnelle, l'expression du potentiel induit par une source ponctuelle, de débit pulsatoire $Q = \Re e(Qe^{-i\omega t})$, se déplaçant horizontalement à la vitesse V_0 , comporte, entre autres, un terme de la forme :

$$(7.3) \Phi_{3D} = \frac{gQ}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \int_0^{\infty} \frac{ch k(z+h) ch k(z'+h) e^{ik[(x-x') \cos \theta + (y-y') \sin \theta]}}{ch^2 kh [(kV_0 \cos \theta + \omega)^2 + 2i\epsilon(kV_0 \cos \theta + \omega) - gkthkh]} k dk$$

On en déduit immédiatement le terme analogue de la configuration bidimensionnelle, soit :

$$(7.4) \quad \Phi_{2D} = \frac{gQ}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{chk}(y+h) \text{chk}(y'+h) e^{ik(x-x')}}{\text{ch}^2 kh [(kV_0 + \omega)^2 + 2i\varepsilon(kV_0 + \omega) - gkthkh]} dk \\ + \frac{gQ}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{chk}(y+h) \text{chk}(y'+h) e^{-ik(x-x')}}{\text{ch}^2 kh [(kV_0 - \omega)^2 - 2i\varepsilon(kV_0 - \omega) - gkthkh]} dk$$

Perspectives

Nous avons présenté dans cet article la méthode qui permet d'établir les formules nécessaires à la résolution d'un problème hydrodynamique posé par l'évolution d'un solide animé d'un mouvement quelconque dans un milieu stratifié horizontalement ; la solution a été recherchée sous la forme d'une distribution superficielle de sources de Kelvin. Mais, la même méthode permet également d'établir les formules correspondant au cas où cette solution serait recherchée sous la forme d'une distribution superficielle de doublets normaux ; pour cela, on est amené, entre autres, à exploiter les formules (3.9), (3.21), (3.23) qui ne préjugent en rien de la nature des singularités réparties sur la surface du solide en mouvement.

Dans le cas où ce solide intercepte l'interface (δ) ou la surface libre (SL), on n'est guère enclin à introduire des distributions de doublets du fait que les intégrales de ligne qui leur sont associées se présentent sous une forme peu engageante, faisant intervenir le gradient surfacique de la densité $\mu = \mu(M,t)$. Mais, est-il légitime de ne pas rechercher la solution du problème sous la forme d'une distribution de singularités du type mixte de GREEN, composée à la fois de sources et de doublets normaux, de densités $\sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial n}$, $\mu = -\Phi$?

Nos futurs travaux sur le sujet seront orientés en vue de donner une réponse à cette question ; on commencera évidemment par considérer des configurations moins complexes que celle envisagée dans la présente étude (par exemple, dans l'un ou l'autre des cas suivants $h_1 \rightarrow \infty$, $h_2 \rightarrow \infty$, $\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \ll 1$).

Remerciements

Nous remercions la Direction du Groupe 6 de la DRET d'avoir bien voulu nous associer à une action concertée sur les phénomènes d'ondes internes. Nous rendrons également hommage à mes anciens collègues, Messieurs Jean Bougis et Eric Landel, qui ont apporté leur précieux concours pour honorer notre contrat auprès de la DRET.

