

Calcul de la surface libre d'un canal dont le radier a une forme quelconque

F. TOISON, J. HUREAU

ESEM Laboratoire de Mécanique et Energétique, 8 Rue Léonard de Vinci, 45072 Orléans Cedex 2

Tel : 02.38.49.45.14 Fax : 02.38.41.73.83

RESUME

Nous considérons l'écoulement bidimensionnel stationnaire dû à la présence d'un obstacle de forme quelconque sur un radier plat. L'écoulement est supposé irrotationnel et le fluide incompressible et non visqueux. La gravité est prise en compte ou non dans la condition de surface libre. La résolution est effectuée numériquement grâce à un processus itératif. Le problème mixte (problème de Riemann Hilbert) est utilisé pour établir la bijection entre les frontières des domaines du plan physique et du plan auxiliaire. Les résultats numériques concordent avec ceux de Vanden-Broeck et Dias. Nous calculons alors d'autres écoulements, tout d'abord au-dessus d'obstacles quelconques, puis nous généralisons à un radier de forme arbitraire. Enfin, pour montrer ses possibilités, nous appliquons notre méthode aux écoulements issus d'une buse et soumis à l'action de la pesanteur.

SUMMARY

Two-dimensional steady potential flow over an arbitrary obstacle at the flat bottom of a channel is considered. The flow is assumed to be irrotational and the fluid inviscid and incompressible. Gravity is either included or not in the free-surface condition. The problem is solved numerically by an iterative process. The mixed problem (Riemann-Hilbert problem) is used to establish the one-to-one correspondence between the boundaries in the physical plane and those in an auxiliary plane. Numerical results agree with those of Vanden-Broeck and Dias. Then we calculate free-surface flows, first over various obstacles, secondly over the bottom (whose shape is arbitrary) of a channel. To show its possibilities, this method is eventually applied to the flows emerging from a nozzle and falling under gravity.

INTRODUCTION

La représentation d'écoulements réels par des écoulements bidimensionnels et irrotationnels de fluide parfait incompressible et non pesant a été très répandue grâce à une théorie mathématique rigoureuse. Les premières études faites en hydraulique considéraient des parois rectilignes et très vite l'hypothèse de fluide non pesant a, évidemment, été abandonnée pour les problèmes où interviennent des surfaces libres ou des jets. Cette théorie a été de moins en moins utilisée à cause des critiques suscitées par certaines hypothèses (fluide parfait en écoulement bidimensionnel) et surtout en raison de la difficulté à prendre en compte des parois non rectilignes.

Pour un bon nombre de problèmes d'hydraulique les hypothèses incriminées permettent une bonne représentation du phénomène physique. Il s'ensuit qu'il existe encore de nombreux travaux dans le domaine : J.M. Vanden-Broeck a publié de nombreux articles relatifs aux écoulements sur radier (par exemple obstacle semi-circulaire sur un radier horizontal, (réf.8)) mais ces études sont un peu académiques compte tenu de la forme de l'obstacle et/ou du radier (fig. 1a). L'avènement des nouveaux moyens de calcul a permis de s'affranchir partiellement de la limitation sur la forme des parois. A la suite des travaux de Dias, Elcrat et Trefethen (réf.2) relatifs à une intégrale de Schwarz-Christoffel modifiée, des parois réelles peuvent être approchées par des lignes polygonales, ce qui permet l'étude d'obstacles de section triangulaire (fig. 1b, réf.1).



Fig. 1a

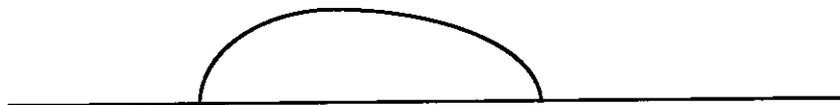


Fig. 1b

Nous proposons ici une autre méthode qui permet d'étudier des écoulements limités par des parois courbes; développée initialement pour des écoulements autour de profils décollés (réf.3, 4 et 5), nous en présentons l'application à l'étude de la forme de la surface libre sur un radier de forme quelconque, le fluide pouvant être supposé pesant ou non.

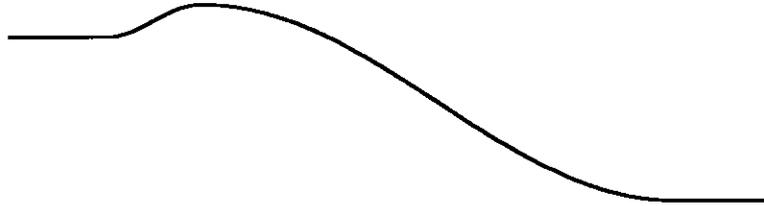
I POSITION DU PROBLEME

Initialement nous devons calculer la modification de la surface libre due à la présence d'un obstacle quelconque sur un radier horizontal :



Dans cette configuration, la déformation de la surface libre étant très localisée, la notion de fluide parfait, donc l'absence de pertes de charge, peut tout à fait être tolérée. De

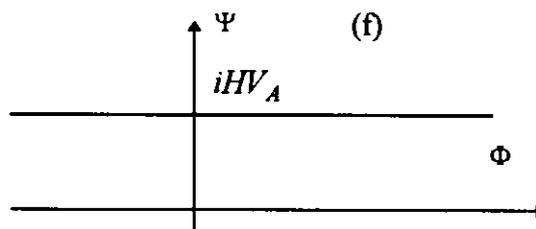
plus, le fait de ne pas prendre en compte la pesanteur n'est pas pénalisant car les variations d'altitude restent faibles. Les résultats obtenus avec le fluide non pesant font ici office de première approximation très acceptable. Il n'en est plus de même lorsque l'on veut généraliser à l'étude de la forme de la surface libre au dessus d'un radier de forme quelconque et dont les extrémités ne sont pas au même niveau:



La différence d'hypothèse fluide pesant-fluide non pesant prend alors toute son importance car les écarts entre les surfaces libres obtenues avec ou sans action de la gravité sont significatives. Il devient impératif de supposer le fluide pesant pour approcher de manière réaliste le phénomène physique. Notons que dans ce cas plus général, la notion de fluide parfait devient plus discutable puisque dans l'écoulement réel les pertes de charge interviennent. Or, en réalité, nous n'étudions que la zone de déformation du radier et de la surface libre; elle est encore très courte (une dizaine de fois la profondeur) par rapport à la longueur du canal entier. Nous conservons ainsi les hypothèses habituelles de l'hydraulique en négligeant localement les pertes de charge.

Résoudre le problème de l'écoulement au dessus d'un radier arbitraire revient à déterminer les lignes de courant et surtout la surface libre. En théorie classique, la relation $z = \int \frac{df}{w}$ est utilisée pour définir le domaine D_z (inconnu) de l'écoulement dans le plan physique (z). Pour cela nous devons transformer conformément les domaines D_f et D_w qui représentent l'écoulement dans les plans du potentiel complexe f et de la vitesse complexe w , sur un domaine D_ζ du plan auxiliaire (ζ).

Dans notre cas, D_f est très simple:



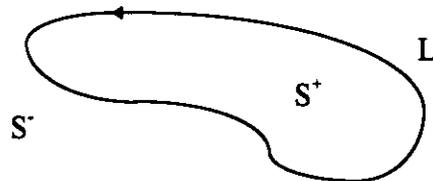
Sa transformation ne présente donc pas de difficulté particulière. Il n'en est pas de même dans le plan (w) ou plutôt dans le plan Log-hodographe (Q), où $Q = \text{Log} \frac{V_\infty}{w} = \tau + i\theta$, θ étant l'argument de la vitesse et τ étant tel que $|\vec{V}| = V_\infty e^\tau$. Ce plan est généralement utilisé

lorsque les frontières sont des parois rectilignes ou des lignes de courant libres car, alors, le domaine D_Q du plan Q est un polygone aisément transformable. Si, comme dans notre cas, les parois sont courbes, D_Q est inconnu et la transformation conforme sur D_ζ est impossible. Nous devons maintenant résoudre un problème mixte aux limites : calculer Q connaissant sa partie réelle puis sa partie imaginaire sur la frontière de D_ζ . Cela impose le choix de D_ζ , puisque la solution à de tels problèmes n'a été établie que pour le disque unité ou le demi-plan. En fait, dans un premier temps, deux possibilités ont été envisagées : disque unité ou demi-disque unité supérieur. L'avantage de la seconde découle du fait qu'en prolongeant analytiquement la fonction recherchée au demi-disque inférieur, le problème mixte initial dégénère en un problème de Dirichlet beaucoup plus simple à résoudre. Malheureusement, en simplifiant ainsi cette résolution, la prise en compte de l'action de la pesanteur devient impossible. Puisque nous avons souhaité considérer le cas d'un fluide pesant, cette seconde possibilité a été abandonnée. Le choix du disque unité pour D_ζ imposant la résolution d'un problème mixte, nous allons maintenant rappeler quelques résultats à ce sujet.

II LE PROBLEME MIXTE

1) Le problème de Hilbert

C'est le cas le plus général de problème à la frontière; il s'agit de trouver une fonction holomorphe $\phi(z)$ dans S^+ et S^- , avec la condition aux limites sur le contour L :



$$\phi^+(t) = G(t)\phi^-(t) + g(t), \quad G \text{ et } g \text{ étant deux fonctions données, } t \in L \text{ et } z \in S.$$

$X(t)$ étant la solution particulière du problème homogène ($g(t) \equiv 0$), la solution générale est:

$$\phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi} \int_L \frac{g(t)}{X^+(t)(t-z)} dt + Y(z)X(z), \quad \text{avec : } Y(z) \text{ un polynôme arbitraire et}$$

$$X(z) = \sqrt{(z-a_1)(z-b_1)} \quad (\text{réf.6}), \text{ si}$$

nous appelons a_i et b_i les extrémités des arcs de L où l'on se donne alternativement la partie réelle et imaginaire $g(t)$ de la fonction recherchée.

2) Le problème de Riemann-Hilbert

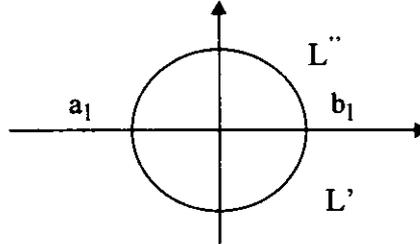
Le problème mixte qui nous concerne est un problème de Riemann-Hilbert, cas particulier du problème précédent: il s'agit de déterminer une fonction holomorphe uniquement à l'intérieur du domaine (i.e la région S^+), satisfaisant la condition à la frontière:

$$\operatorname{Re}((a+ib)\phi^+(t)) = a\operatorname{Re}(\phi(t)) - b\operatorname{Im}(\phi(t)) = c(t) \text{ sur } L. \text{ La solution unique d'un tel problème est}$$

$$\text{alors : } \phi(z) = \frac{X(z)}{i\pi} \int_L \frac{c(t) dt}{(a+ib)X^+(t)(t-z)}, \quad (\text{réf.6}).$$

Nous pouvons voir que la numérisation d'une telle intégrale de Cauchy n'est pas immédiate, à cause des infinis induits par $X^+(t)$ en $t = a_i$ ou b_i .

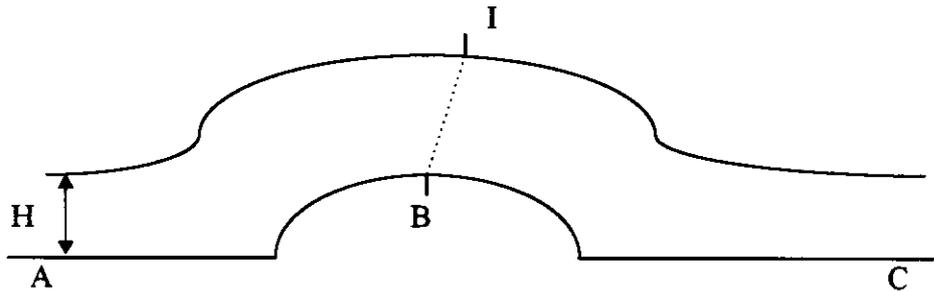
Le problème mixte à deux zones que nous avons exploité revient à calculer la partie réelle de ϕ sur L'' et sa partie imaginaire sur L' , connaissant les parties complémentaires sur la frontière. Sur L' , $a(t) = 1$ et $b(t) = 0$, et sur L'' , $a(t) = 0$ et $b(t) = -1$.



Numérisée au laboratoire, cette résolution mathématique a été testée sur différentes fonctions et les résultats obtenus montrent une précision comparable à celle des résultats de l'intégrale de Schwarz-Villat pour le problème de Dirichlet (réf.5 et 7).

III RESOLUTION ET NUMERISATION

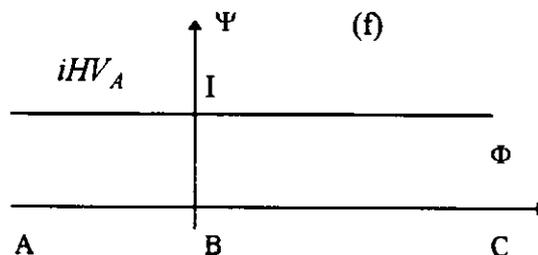
Considérons l'écoulement suivant:



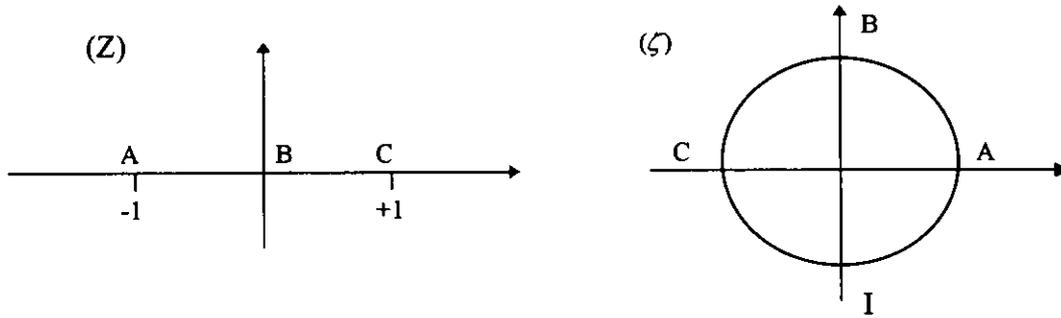
Les points A et C sont situés aux infinis amont et aval, où la vitesse est considérée comme uniforme. Le point B est l'origine de l'abscisse curviligne sur le radier et le niveau de référence est en A. Les conditions aux limites sont:

- $\text{Im}(w.dz) = 0$ sur ABC
- $|w| = V_A$ en A
- $P = \text{constante}$ sur la surface libre.

Comme nous l'avons précédemment signalé, le plan du potentiel f est très simple :



Les deux transformations pour parvenir au plan auxiliaire (ζ) sont les suivantes:



$$f = \frac{V_A H}{\pi} \log \frac{Z+1}{Z-1} + iV_A H$$

$$\zeta = \frac{i-Z}{1-iZ}$$

La fonction recherchée dans D_ζ est : $Q = \text{Log}\left(\frac{V_A}{w}\right) = \log \frac{V_A}{|w|} + i \arg(w) = T(\zeta) + i\Theta(\zeta)$.

Sur le cercle unité, $\zeta = e^{i\sigma}$ et $Q = \tau(\sigma) + i\theta(\sigma)$.

Pour calculer Q dans D_ζ et à la frontière du domaine, nous utilisons le problème mixte. Il nous faut donc connaître alternativement les parties imaginaire $\theta(\sigma)$ et réelle $\tau(\sigma)$ de Q sur la frontière. Appelons $\beta(s)$ la fonction qui lie l'abscisse curviligne s à l'angle de la tangente à la paroi ($dz=ds \cdot e^{i\beta}$), si la bijection $\varepsilon : \sigma \in [0, \pi] \mapsto s = \varepsilon(\sigma)$, $s \in]-\infty, +\infty[$ est supposée connue, la partie imaginaire de Q sur le demi-cercle supérieur est définie par:

$$\theta(\sigma) = \beta(\varepsilon(\sigma)), \text{ pour } \sigma \in [0, \pi].$$

En appliquant maintenant la relation de Bernoulli sur la surface libre, on accède à la connaissance de la partie réelle de Q :

$$P + \frac{1}{2}\rho|w|^2 = P_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2 \quad \text{en fluide non pesant (noté FNP)}$$

$$P + \frac{1}{2}\rho|w|^2 + \rho g z = P_A + \frac{1}{2}\rho V_A^2 + \rho g H \quad \text{en fluide pesant (noté FP).}$$

La pression étant constante sur la surface libre, les deux relations deviennent :

$$|w| = V_A \quad \text{et} \quad \tau(\sigma) = \log \frac{V_A}{|w|} = 0 \quad \text{(FNP)}$$

$$\left(\frac{|w|}{V_A}\right)^2 = 1 + \frac{2}{F^2} \left(1 - \frac{y}{H}\right) \quad \text{et} \quad \tau(\sigma) = -\frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{2}{F^2} \left(1 - \frac{y(\sigma)}{H}\right)\right) \quad \text{(FP),}$$

en appelant $F = \frac{V_A}{\sqrt{gH}}$ le nombre de Froude et $y(\sigma)$ l'altitude du point courant.

En fluide pesant, nous devons exprimer $y(\sigma)$, donc tracer la surface libre. Pour ceci, partant du point B, nous construisons la ligne BI en suivant l'équipotentielle des vitesses jusqu'à la surface libre, puis nous traçons les deux demi surfaces libres de part et d'autre du point I ainsi obtenu, ce qui donne:

$$y(\sigma) = y_B + \operatorname{Im} \left(\frac{H}{\pi} \int_i^{-i} \left(\frac{1}{\zeta-1} - \frac{1}{\zeta+1} \right) e^{i\Theta(\zeta)} e^{\Gamma(\zeta)} d\zeta \right) + \operatorname{Im} \left(\frac{H}{\pi} \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\sigma} \frac{e^{\tau(\sigma)} e^{i\theta(\sigma)}}{\sin \sigma} d\sigma \right).$$

Maintenant les conditions nécessaires à l'utilisation du problème mixte sont réunies et les trois inconnues $\varepsilon(\sigma)$, $\theta(\sigma)$ et $\tau(\sigma)$ sont:

$$\cdot \quad \varepsilon(\sigma) = \int_0^{\sigma} \frac{df}{w} = \frac{H}{\pi} \int_0^{\sigma} \frac{d\sigma'}{\sin \sigma'} e^{\tau(\sigma')}, \quad \sigma \in [0, \pi]$$

$$\cdot \quad \theta(\sigma) = \beta(\varepsilon(\sigma)), \quad \sigma \in [0, \pi]$$

$$\theta(\sigma) = \frac{\sqrt{(e^{i\sigma} + 1)(e^{i\sigma} - 1)}}{i\pi} \left(\int_0^{\pi} \frac{\Theta(t) dt}{\sqrt{(t+1)(t-1)(t-e^{i\sigma})}} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\Gamma(t) dt}{\sqrt{(t+1)(t-1)(t-e^{i\sigma})}} \right), \quad \sigma \in [\pi, 2\pi]$$

$$\cdot \quad \tau(\sigma) = \frac{\sqrt{(e^{i\sigma} + 1)(e^{i\sigma} - 1)}}{i\pi} \left(\int_0^{\pi} \frac{\Theta(t) dt}{\sqrt{(t+1)(t-1)(t-e^{i\sigma})}} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\Gamma(t) dt}{\sqrt{(t+1)(t-1)(t-e^{i\sigma})}} \right), \quad \sigma \in [0, \pi]$$

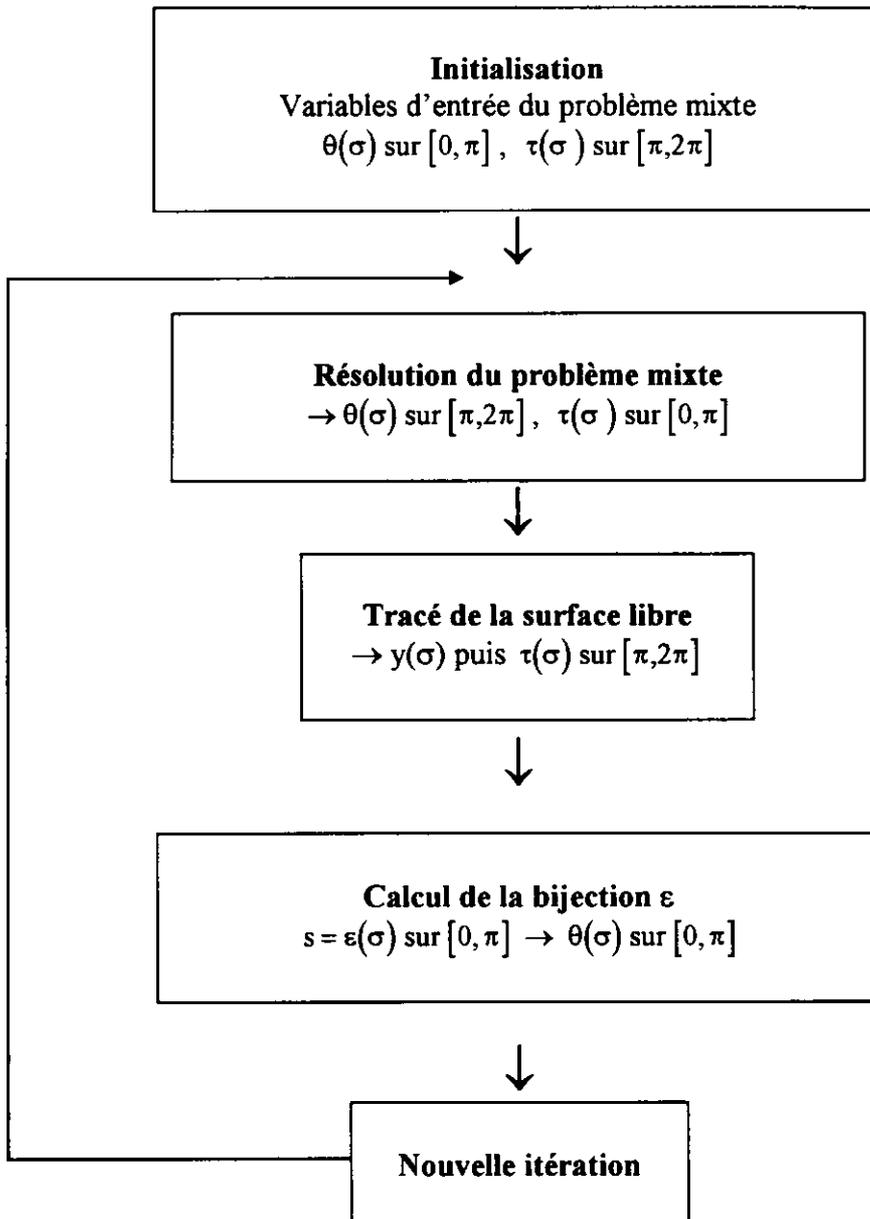
$$\tau(\sigma) = -\frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{2}{F^2} \left(1 - \frac{y(\sigma)}{H} \right) \right) \quad (\text{FP}) \quad \sigma \in [\pi, 2\pi]$$

$$\tau(\sigma) = 0 \quad (\text{FNP}) \quad \sigma \in [\pi, 2\pi].$$

Toutes les équations précédemment citées ont été établies en supposant connue la correspondance bijective entre la paroi de D_z et son homologue dans D_ζ (demi-cercle supérieur). La seule façon de l'obtenir pratiquement est de procéder itérativement. Le processus est le suivant: la première correspondance $\varepsilon(\sigma)$ est choisie arbitrairement pour initialiser les $\theta(\sigma)$ sur le demi-cercle supérieur, de même que les $\tau(\sigma)$ du demi-cercle inférieur sont choisis comme étant nuls au départ. Par résolution du problème mixte on obtient la valeur

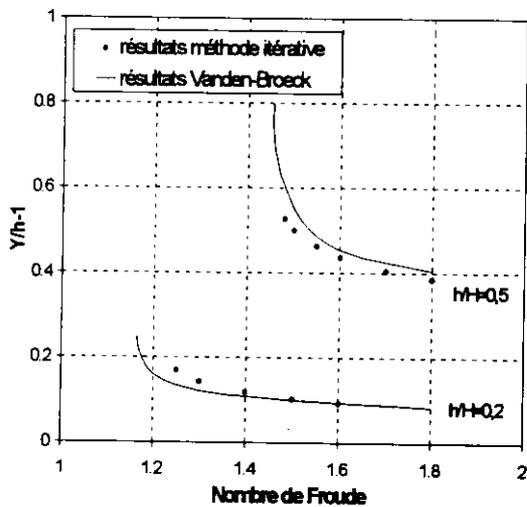
de Q dans tout D_ζ . On construit alors la surface libre pour obtenir les nouvelles valeurs de $\tau(\sigma)$ sur $[\pi, 2\pi]$ (étape inutile en fluide non pesant), puis nous calculons une nouvelle correspondance $\varepsilon(\sigma)$ sur la paroi, ce qui donne de nouvelles valeurs pour $\theta(\sigma)$ sur $[0, \pi]$. L'itération suivante peut alors commencer.

Organigramme:

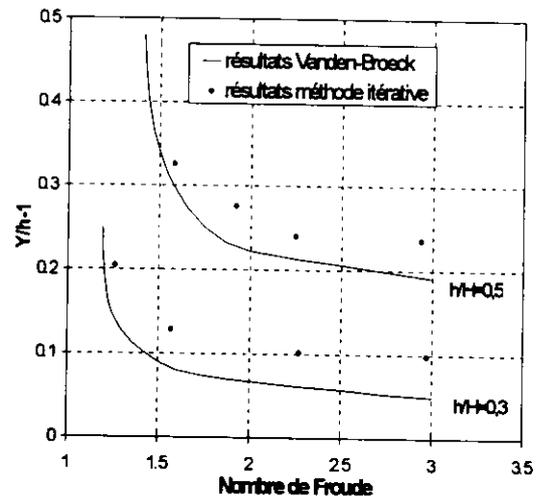


IV RESULTATS NUMERIQUES

Notre programme a été appliqué aux écoulements déjà traités par F. Dias et J.M. Vanden-Broeck, c'est-à-dire dus à des obstacles demi-cylindrique et triangulaire placés sur radier horizontal. Nous ne présentons pas ici les comparaisons des formes de surface libre obtenue, les différences constatées étant indiscernables à l'échelle de la figure. Les deux graphes suivants présentent la hauteur maximale de la surface libre adimensionnée par la hauteur de l'obstacle, en fonction du nombre de Froude, pour les deux méthodes (h est la hauteur de l'obstacle). La comparaison fait apparaître des écarts inférieurs à 3% pour le demi-cylindre et inférieurs à 5% pour le triangle.



Obstacle demi-cylindrique

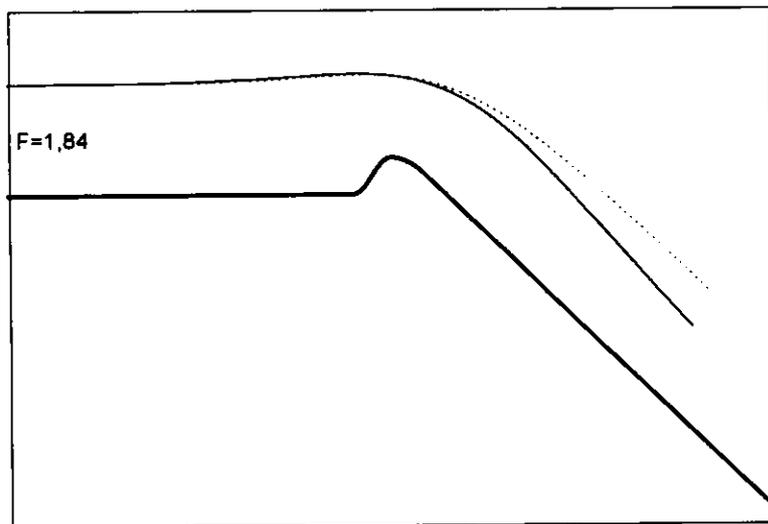
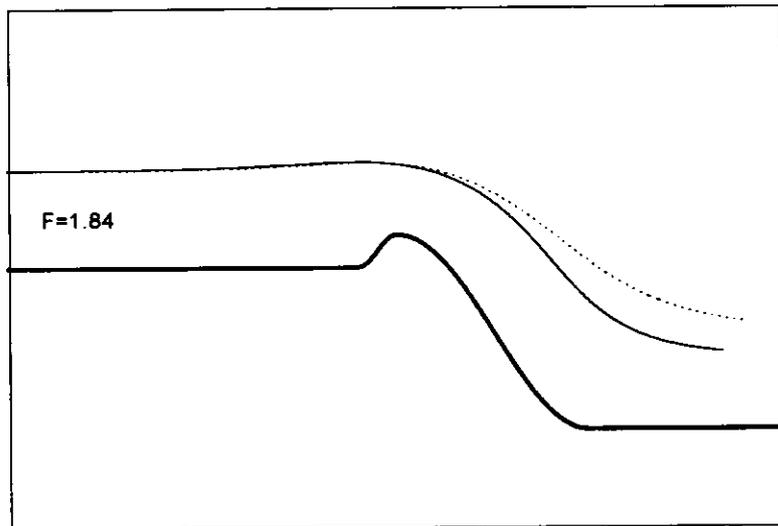
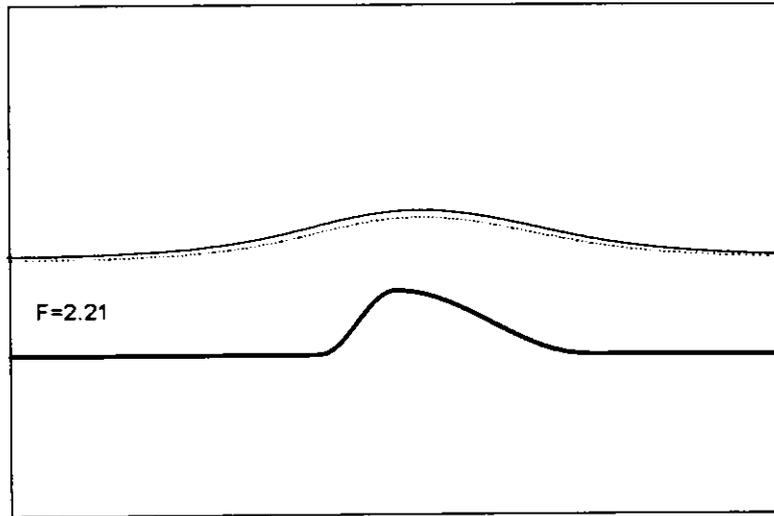


Obstacle triangulaire

Les écarts maximaux sont obtenus sur l'obstacle triangulaire et sont justifiés par le fait que nous n'avons pas introduit dans notre résolution de fonction singularité pour la bonne prise en compte des sauts de tangente sur le radier, notamment au sommet de l'obstacle où la vitesse devient infinie. Cette fonction singularité Q_S est définie de manière simple : $Q = \tilde{Q} + Q_S$ où Q_S présente la même singularité que Q . Ici $Q_S = \delta \log(\zeta - e^{i\gamma})$. On définit ainsi une nouvelle fonction $\tilde{Q}(\zeta) = Q_S - \delta \log(\zeta - e^{i\gamma})$ (γ est l'argument du point anguleux sur la frontière de D_ζ et δ est la valeur du saut de tangente en ce point). C'est alors cette fonction \tilde{Q} qui est considérée dans la résolution au lieu de Q . Cette prise en compte de manière explicite des discontinuités de tangente n'a pas été effectuée ici car l'intérêt de notre méthode est de pouvoir traiter des formes courbes. Pour plus de détails sur ce traitement avec fonction singularité on pourra se reporter aux travaux précédents (réf.3). Notre calcul revient à considérer un triangle émoussé. La vitesse au sommet n'est donc pas infinie et par conséquent la profondeur est plus importante que celle calculée par F. Dias et J.M. Vanden-Broeck.

Après cette validation de notre programme, nous présentons trois formes de surface libre obtenues, l'une sur un radier horizontal avec obstacle quelconque, la deuxième sur un radier avec dénivellation entre les infinis amont et aval horizontaux et la dernière sur un radier

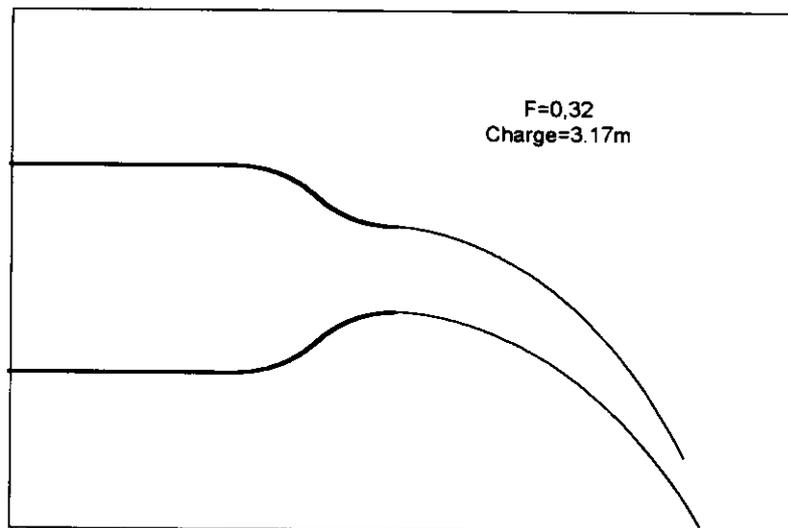
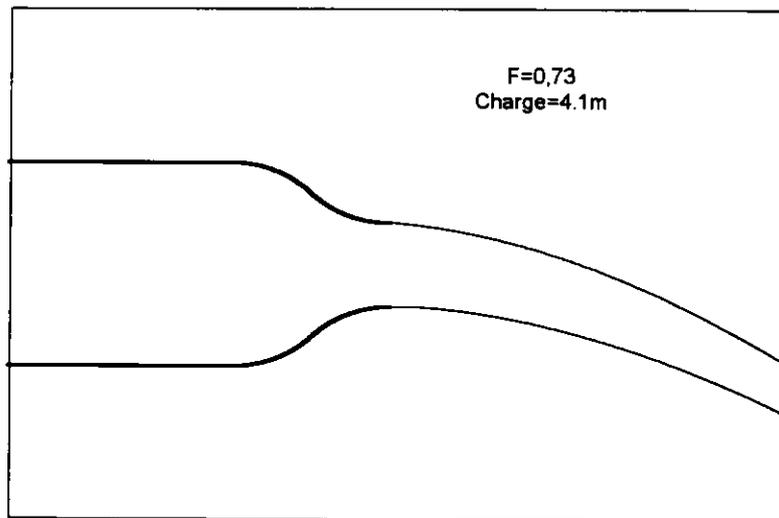
de forme quelconque, où l'infini amont est horizontal et l'infini aval présente une pente constante. Nous indiquons en pointillés la forme de la surface libre en fluide non pesant.



CONCLUSION

Au vu des résultats obtenus, nous pensons que notre méthode permet le tracé de la surface libre de l'écoulement dans un canal dont le radier a une forme quelconque. Au cas où cela serait utile, il va de soi que la répartition des pressions sur le radier ou l'obstacle est aisément disponible à partir de $\tau(\sigma)$. Un autre avantage de notre méthode est le faible coût en temps de calcul: les résultats présentés ont été obtenus en quelques minutes sur des PC DX4-100 ou station Risk 6000.

Ce modèle doit pouvoir être utilisé, avec les mêmes hypothèses générales, pour d'autres écoulements où existent des surfaces libres ou des lignes de courant libre. Nous présentons ainsi les premiers résultats relatifs à des jets pesants issus de buses à parois courbes, pour différentes charges et différents nombres de Froude (résultats qui seront développés dans un article ultérieur).



REFERENCES

- (1) **F. Dias & J.M. Vanden-Broeck**
Open channel flows with submerged obstructions
J. Fluid. Mech. (1989), vol.206, pp.155-170.
- (2) **F. Dias, A.R. Elcrat & L.N. Trefethen**
Ideal jet flow in two dimensions
J. Fluid. Mech. (1987), vol.185, pp.275-288.
- (3) **J. Hureau, E. Brunon & Ph. Legallais**
Ideal free streamline flow over a curved obstacle
J. Comp and applied Math.,72 ,193-214, (1996).
- (4) **Ph. Legallais, J. Hureau & E. Brunon**
Determination of flows past curved obstacles
using a mixed problem solution
Eur. J. Mech. B/Fluids, 14, n°3, 275-299 (1995).
- (5) **Ph. Legallais**
Le problème mixte et la modélisation d'écoulements
autour d'obstacles avec sillages
Thèse de l'université d'Orléans (1994).
- (6) **N.I. Muskhelishvili**
Singular integral equations
Nordhoof International Publishing (1977).
- (7) **F. Toison**
Numérisation du problème mixte et application à
la modélisation d'écoulements autour d'obstacles avec sillages
Stage de DEA (1993).
- (8) **J.M. Vanden-Broeck**
Free surface flow over an obstruction in a channel
Physic. fluid, vol.30, n°8 (1987).