

**6e JOURNÉES DE L'HYDRODYNAMIQUE**

**24, 25, 26 février 1997 - Nantes**

## **Modélisation instationnaire de poches de cavitation par la méthode potentielle et par la méthode VOF**

**B. MOLIN\*, L. DIÉVAL\*\*, R. MARCER\*\*\*, M. ARNAUD\*\***

\* ESIM, 13451 Marseille cedex 20

\*\* DCN/CTSN, BP 28, 83000 Toulon Naval

\*\*\* Principia, 83507 la Seyne sur Mer cedex

### **Résumé**

On considère la phase d'approche de la surface libre, par un engin immergé animé d'une grande vitesse verticale. Le problème étudié est celui de la modélisation numérique des poches de cavitation qui apparaissent à la paroi. Deux approches différentes sont utilisées, la première basée sur la théorie potentielle (avec un certain nombre d'hypothèses simplificatrices), la seconde sur la résolution directe des équations d'Euler couplée à une méthode VOF de suivi d'interface. Il apparaît que la méthode potentielle est mieux adaptée à la modélisation de la phase initiale d'apparition et de gonflement de la poche, tandis que la méthode VOF se prête mieux à la phase suivante de déformation et au percement de la surface libre.

### **Summary**

We consider a submerged body approaching the free surface with a large vertical velocity. We are interested in the development of cavitation bubbles on the wall, and the subsequent perturbations that may occur at the crossing of the free surface. Two different numerical methods are used. The first one is based on potential flow theory, with some simplifying hypotheses. The second one consists in solving directly the Euler equations with a VOF method to track the cavitation bubbles. It turns out that the potential flow method is best suited to model the initial development of the bubbles, whereas the VOF method permits to follow the subsequent stages, including the crossing of the free surface.

## INTRODUCTION

Le problème considéré est celui de la sortie d'eau d'un engin animé d'une grande vitesse verticale. A l'approche de la surface libre, la pression ambiante diminuant, des poches de cavitation apparaissent sur la partie avant de l'engin, et la traversée de la surface libre peut s'en trouver perturbée.

La modélisation numérique de cette phase de traversée, l'objectif final de l'étude entreprise, est délicate et nécessite a priori des méthodes numériques accommodantes comme la méthode "Volume Of Fluid" (VOF). Cette méthode, introduite par Hirt et Nichols (1981), a été appliquée avec succès à l'étude de phénomènes apparentés comme le ballotement dans les cuves, le déferlement, la striction de bulles, etc.

Récemment, Diéval, Marcer et Arnaud (1996) ont obtenu des résultats très encourageants sur la modélisation de la cavitation sur des profils. Un problème numérique qui se pose néanmoins avec la méthode VOF est celui de l'initiation de la poche. Pour bien fonctionner en effet la méthode VOF nécessite que l'interface couvre un nombre important de cellules. La phase de départ, où la fonction VOF, de façon quelque peu arbitraire, est mise à zéro dans quelques cellules voisines, soulève un certain nombre de problèmes quant à la représentation correcte des phénomènes physiques.

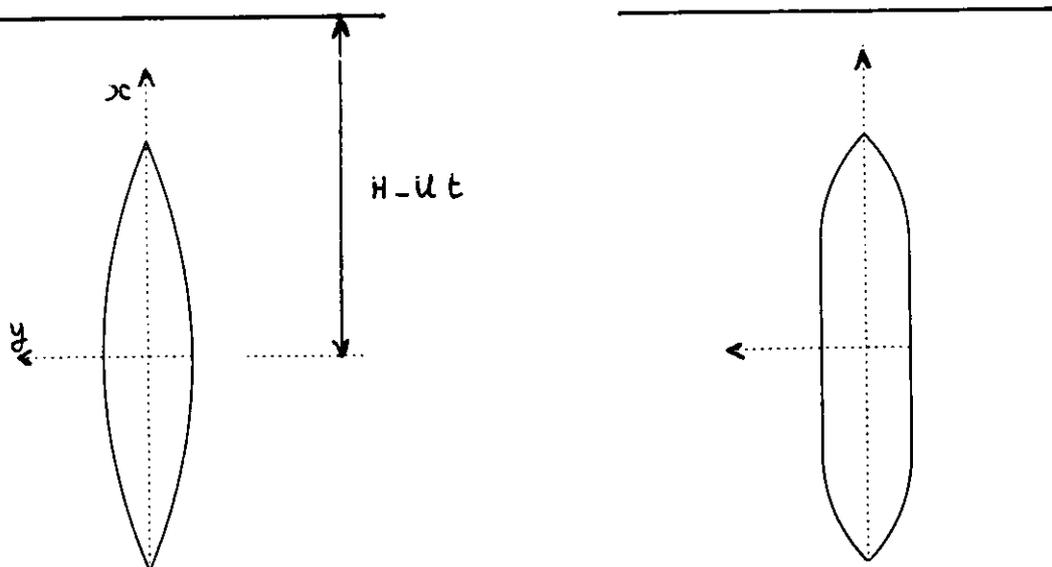
A l'inverse la théorie potentielle est a priori applicable tant que la poche est mince et que l'écoulement ne présente ni décollement ni jet rentrant. Elle semble donc bien adaptée à la modélisation de la phase initiale d'apparition et de gonflement de la poche.

Il a donc paru intéressant de confronter, sur un même cas, les résultats fournis par les deux méthodes. On a choisi pour cela le problème plan d'un profil mince et élancé qui offre l'avantage, en théorie potentielle, de permettre une représentation quasi analytique de l'écoulement.

La première partie de la communication décrit l'approche potentielle, et les résultats obtenus. La méthode VOF est ensuite sommairement décrite (des détails peuvent être obtenus dans les articles en référence), et ses résultats sont comparés aux précédents. En conclusion on élabore sur de futurs développements et sur une possible approche combinée (potentielle + VOF) à la résolution du problème.

## I. THEORIE POTENTIELLE

La figure ci-dessous présente la géométrie du problème.



La forme du profil est donnée par

$$y = \pm \eta(x) \quad x \in [-l \ l]$$

$l$  étant la demi-longueur. En application on considèrera soit des profils de forme parabolique, donnée par :

$$\eta(x) = b \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right)$$

$b$  étant la demi-largeur, soit des profils "en ogive" formés d'un tronç rectiligne, terminé par deux arcs de cercle.

Le système d'axe  $xy$  est lié au profil, qui monte à la vitesse  $U$ .

On se propose de représenter l'écoulement via la théorie potentielle.

Un premier problème qui se pose est celui de la représentation de la surface libre, et des conditions aux limites à y afficher. Ici la surface libre intervient d'abord comme niveau de référence pour la pression hydrostatique, donnée par :

$$p_h = p_{\text{atm}} + \rho g (H - U t - x)$$

$H$  étant la distance du milieu du profil à la surface libre à l'instant initial.

La prise en compte rigoureuse des conditions cinématiques et dynamiques à la position instantanée de la surface libre nécessite une approche complètement numérique, du type de celles mises en œuvre par exemple par Cointe (1989) ou Ferrant (1994). Ici notre objectif est d'obtenir simplement des résultats de référence de quelque valeur pour comparaison avec ceux de la méthode VOF. Dans le problème inverse d'entrée dans l'eau à grande vitesse (l'impact), la condition de surface libre est fréquemment simplifiée en  $\Phi = 0$  sur le plan moyen de surface libre. Dans le problème considéré ici l'analyse montre que cette idéalisation est d'autant plus appropriée que le paramètre  $U/\sqrt{g(H-Ut)}$  est grand, donc que l'objet arrive en phase finale d'approche de surface libre.

Une idéalisation encore plus radicale consiste à supposer le domaine fluide illimité, la surface libre n'intervenant plus que comme référence pour la composante hydrostatique de la pression.

On a ici suivi les deux méthodes ( $\Phi = 0$  en  $x = H - U t$ , et fluide illimité).

Le profil étant symétrique, le potentiel complexe (avec  $z = x + i y$ ) de l'écoulement peut être représenté par une distribution de sources sur son axe :

$$f(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l q(\zeta, t) \left[ \text{Log}(z - \zeta) - \text{Log}[2(H - Ut) - z - \zeta] \right] d\zeta \quad (1)$$

où le deuxième logarithme représente la contribution de l'anti-image à travers la surface libre et assure la nullité de  $\Phi = \Re\{f\}$  sur celle-ci.

La résolution du problème se simplifie considérablement si l'on suppose **minces** le profil et la poche de cavitation, comme dans les théories linéarisées de profils portants (voir par exemple Newman, 1977, pp 164-172). On écrit alors les conditions aux limites (cinématique et dynamique), non plus sur le bord du profil (ou de la poche), mais sur son axe.

Sur l'axe réel le potentiel de l'écoulement est donné par :

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l q(\zeta, t) \left[ \text{Log}|x - \zeta| - \text{Log}|2(H - Ut) - x - \zeta| \right] d\zeta \quad (2)$$

la composante suivant  $x$  de la vitesse :

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l q(\zeta, t) \left[ \frac{1}{\zeta - x} + \frac{1}{\zeta + x - 2(H - Ut)} \right] d\zeta \quad (3)$$

l'intégrale étant prise en valeur principale ;

et la composante suivant  $y$  :

$$v(x, \pm 0, t) = \pm \frac{1}{2} q(x, t) \quad (4)$$

La pression est donnée par la relation de Bernoulli :

$$p = p_{\text{atm}} + \rho g (H - U t - x) - \rho \Phi_t + \rho U u - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad (5)$$

Soit  $e(x, t)$  l'épaisseur de la poche de cavitation. La condition de glissement s'écrit :

$$e_t = v + (U - u) (\eta_x + e_x) \quad (6)$$

Comme dans les théories linéarisées de profil portant on simplifie cette équation en négligeant  $u$  devant  $U$ , et en prenant pour  $v$  sa valeur en  $y = \pm 0$ . En dehors de la poche on a alors :

$$v(x, \pm 0, t) = \mp U \eta_x$$

On en déduit la densité de source :

$$q(x, t) = q_0(x) = -2 U \eta_x \quad (7)$$

Sur la partie du profil occupée par la poche la condition de glissement linéarisée donne :

$$e_t = \frac{1}{2} q + U (\eta_x + e_x) \quad (8)$$

cependant que l'on doit aussi y satisfaire la condition dynamique  $p = p_{\text{cav}}$  où  $p_{\text{cav}}$  est la pression de vapeur. Les transferts de masse entre fluide et poche sont négligés, ce qui est une idéalisation acceptable. Sont aussi négligés les phénomènes liés à la tension superficielle, a priori faibles aux échelles considérées.

En l'absence de poche de cavitation le problème est résolu puisque la densité de sources est donnée par la condition de glissement (7). On peut alors quantifier les effets liés à la représentation de la surface libre. Pour cela on considère un profil parabolique de longueur  $2l = 10$  m et de largeur  $2b = 2$  m, évoluant à une vitesse de 25 m/s. La figure 1 présente la valeur du minimum de la pression à la paroi (exprimé en mètres d'eau), en fonction de la cote  $-H + Ut$  du milieu du profil. La courbe en trait plein inclut l'effet de la surface libre, la droite en tirets correspond à un domaine fluide illimité. Il apparaît que la présence de la surface libre fait chuter plus rapidement la pression, mais les différences entre les deux courbes sont faibles. Pour un profil mince comme celui considéré ici, la prise en compte rigoureuse des conditions de surface libre ne semble pas une nécessité.

Comme on le voit sur la figure, lorsque le profil dépasse la cote  $-9$  m, la pression descend sous la pression de vapeur saturante (prise ici égale à 0.23 m d'eau). Il se forme une poche de cavitation qui s'étend de  $x_1(t)$  à  $x_2(t)$ . Sur cette partie du profil la condition de Bernoulli donne :

$$\Phi_t = \frac{1}{\rho} (p_{\text{atm}} - p_{\text{cav}}) + g (H - U t - x) + U u - \frac{1}{2} (u^2 + v^2)$$

L'évolution en temps de la densité de source  $q$  y est donc régie par l'équation intégrale :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} q_t(\zeta, t) \left[ \text{Log}|x - \zeta| - \text{Log}|2(H - Ut) - x - \zeta| \right] d\zeta \\ &= \frac{U}{\pi} \int_{-l}^l \frac{q(\zeta, t) d\zeta}{\zeta + x - 2(H - Ut)} + \frac{1}{\rho} (p_{\text{atm}} - p_{\text{cav}}) + g (H - U t - x) + U u - \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \end{aligned} \quad (9)$$

En dehors de la poche la condition de glissement sur la paroi solide continue à s'appliquer et  $q(x, t) = q_0(x) = -2 U \eta_x$ .

Avec l'hypothèse de fluide illimité l'équation intégrale (9) se réduit à :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} q_t(\zeta, t) \text{Log}|x - \zeta| d\zeta = \frac{1}{\rho} (p_{\text{atm}} - p_{\text{cav}}) + g (H - U t - x) + U u - \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \quad (10)$$

Une autre simplification, qui sera utilisée par la suite, consiste à supposer que la poche modifie peu les vitesses  $u$  et  $v$ , et à les remplacer, dans les équations (9) et (10) par leurs valeurs  $u_0$  et  $v_0$  en l'absence de poche. L'équation (10), par exemple, devient alors :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} q_t(\zeta, t) \text{Log}|x - \zeta| d\zeta = \frac{1}{\rho} (p_{\text{atm}} - p_{\text{cav}}) + g (H - U t - x) + U u_0 - \frac{1}{2} (u_0^2 + v_0^2) = \frac{p_0(x)}{\rho} - g U t \quad (11)$$

### Résolution numérique

L'axe  $[-l, l]$  du profil est découpé en  $N$  segments  $[x_{en}, x_{en+1}]$  sur lesquels la densité de source est supposée constante par morceaux :

$$q(x, t) = \sum_{n=1}^N A_n(t) P_n(x)$$

où  $P_n$  vaut 1 sur le segment  $[x_{en}, x_{en+1}]$  et 0 ailleurs.

Potentiel  $\Phi$  et composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse sont évalués aux points milieux  $x_m$  des segments, via les matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  qui se déduisent directement des relations (2) et (3) :

$$\begin{aligned} \Phi_m(t) = \Phi(x_m, 0, t) &= \sum_{n=1}^N B_{mn}(t) A_n(t) \\ u_m(t) = u(x_m, 0, t) &= \sum_{n=1}^N C_{mn}(t) A_n(t) \\ v_m(t) = v(x_m, 0^+, t) &= \frac{1}{2} A_m(t) \end{aligned}$$

Dans le cas où la condition  $\Phi = 0$  est imposée à la surface libre, les éléments des matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  dépendent du temps. Sinon ce sont des constantes.

On repère par  $N_1$  et  $N_2$  les segments supportant les extrémités  $x_1$  et  $x_2$  de la poche. La condition dynamique s'écrit :

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} B_{mn} \frac{dA_n}{dt} = - \sum_{n=1}^N \frac{dB_{mn}}{dt} A_n + f_m(t) \quad (12)$$

où :

$$f_m = \frac{1}{\rho} (p_{\text{atm}} - p_{\text{cav}}) + g (H - U t - x_m) + U u_m - \frac{1}{2} (u_m^2 + v_m^2)$$

La résolution, à l'instant  $t$ , du système linéaire (12) donne  $dA_m/dt$  pour  $m = N_1, \dots, N_2$ . Pour les autres valeurs de  $m$  on a  $dA_m/dt = 0$ . Il suffit alors d'intégrer en temps ces équations.

Pratiquement cette opération se heurte à deux difficultés :

- les extrémités  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  de la poche sont des inconnues du problème et doivent être déterminées, à chaque pas de temps, par la coïncidence de la courbe de pression avec  $p_{cav}$ .
- les extrémités  $x_1$  et  $x_2$  correspondent à des segments mixtes où les deux conditions dynamique et cinématique s'appliquent partiellement.

Ces problèmes sont semblables à ceux rencontrés dans les modèles numériques comme SINDBAD (Cointe, 1989) ou ANSWAVE (Ferrant, 1994). Ici différentes approches numériques ont été suivies, inspirées de celles utilisées dans ces modèles.

La première consiste à avancer séquentiellement les densités  $A_n(t)$  et la géométrie. Celle-ci étant fixée on avance en temps les coefficients  $A_n(t)$  (par une méthode prédicteur-correcteur), puis on en déduit la nouvelle géométrie, etc. Des problèmes d'origine supposée numérique ayant été rencontrés, une autre méthode a été mise en œuvre, basée sur un schéma implicite d'ordre 2, la géométrie et les nouvelles valeurs  $A_n$  étant déterminées conjointement par itérations à chaque pas de temps. Cette méthode a produit les mêmes résultats numériques, et les mêmes instabilités aux mêmes moments.

En ce qui concerne les segments mixtes, le premier problème consiste à suivre précisément les extrémités de la poche, soit les points où la courbe de pression  $p(x, t)$  vient se confondre avec la droite  $p = p_{cav}$ . Pour cela on s'appuie sur les valeurs de la pression aux points immédiatement voisins, par exemple en faisant passer un arc de parabole par les trois premiers couples  $(x_m, p_m)$  et en déterminant son intersection avec  $p = p_{cav}$ . Le deuxième problème a trait à la façon de marier les conditions cinématique et dynamique. Là aussi on a testé différentes procédures, consistant par exemple à pondérer au pro rata des portions poche et non-poche, ou à affecter le segment à la catégorie majoritaire. Les résultats numériques obtenus diffèrent peu.

Il est rapidement apparu que le modèle numérique fonctionnait correctement dans certains cas, ou lorsque l'équation intégrale était modifiée sous la forme (11), et faisait apparaître des instabilités dans d'autres. Ces problèmes sont apparemment liés à un mauvais suivi du point bas  $x_1$  de la poche, et à la singularité qui s'y développe lorsque sa vitesse de descente le long du profil est inférieure à la vitesse  $U$ . Le responsable est le terme  $U u$  qui tend à convecter la zone de cavitation vers le bas.

Faute de temps on n'a pas pu mettre en œuvre de méthode numérique permettant un meilleur suivi, par exemple avec un maillage mobile lié à la poche. On s'est cependant livré à quelques investigations sur une résolution explicite de l'équation intégrale (10), le terme  $u^2 + v^2$ , qui contribue peu, étant négligé. Faute de place on ne donne que le résultat final, la densité de source  $q(x, t)$  étant mise sous la forme  $q_0(x) + \tilde{q}(x, t)$ . On obtient alors, pour la dérivée en temps de  $\tilde{q}(x, t)$ , l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{q} &= \frac{2(p_{atm} - p_{cav}) + \rho g(2H - 2Ut - x_1 - x_2)}{\rho \operatorname{Log} \frac{x_2 - x_1}{4} \sqrt{(x_2 - x)(x - x_1)}} + \frac{g(2x - x_1 - x_2)}{\sqrt{(x_2 - x)(x - x_1)}} + U \frac{\partial}{\partial x} (q_0(x) + \tilde{q}(x, t)) \\ &+ \frac{U}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sqrt{\frac{x - x_1}{x_2 - x}} \int_{C^P} \frac{q_0(\zeta)}{\zeta - x} \sqrt{\frac{x_2 - \zeta}{x_1 - \zeta}} d\zeta \right\} \\ &- \frac{U}{\pi} \left[ \frac{1}{\operatorname{Log} \frac{x_2 - x_1}{4} \sqrt{(x_2 - x)(x - x_1)}} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \sqrt{\frac{x - x_1}{x_2 - x}} \right\} \right] \int_{C^P} \frac{q_0(\zeta)}{\sqrt{(x_2 - \zeta)(x_1 - \zeta)}} d\zeta \end{aligned}$$

où  $C^P$  désigne le complémentaire de la poche :  $C^P = [-l \ x_1] \cup [x_2 \ l]$ .

Un intérêt de cette expression est de faire explicitement apparaître le terme convectif  $U \tilde{q}_x$ . Elle évite aussi d'avoir à résoudre numériquement (à chaque pas de temps) une équation de Fredholm de première espèce et devrait donc conduire à des résultats plus précis pour un coût moindre. La mise en œuvre reste à faire.

On note que, dans notre problème, la convection apparaît doublement, ici au niveau de la condition dynamique, et au niveau de la condition cinématique (8).

## Résultats numériques

On considère tout d'abord le profil de forme parabolique, toujours avec  $l = 5$  m et  $b = 1$  m.

On présente successivement les résultats obtenus avec l'hypothèse de fluide illimité, puis avec celle consistant à afficher  $\Phi = 0$  à la surface libre (équations (10) et (9)). Dans les deux cas la vitesse du profil est de 25 m/s. La pression atmosphérique est prise égale à 100 000 Pascals, et la pression de cavitation à 2337 Pascals. L'axe du profil est découpé en 200 segments, et le pas de temps est de l'ordre de  $2 \cdot 10^{-5}$  seconde.

En fluide illimité la cavitation démarre lorsque le milieu du profil atteint la cote  $-8.67$  m sous la surface libre fictive. La figure 2 montre, en fonction du temps, l'évolution des points  $x_1$  et  $x_2$  extrémités de la poche de cavitation. Sa croissance, dans le sens vertical, est extrêmement rapide : au bout de 0.05 seconde, sa longueur est de 3.35 m environ, soit une vitesse moyenne de croissance de 67 m/s (le point bas  $x_1$  descend donc plus vite que le fluide). Sur la figure sont également portées les deux courbes obtenues en l'absence de cavitation, et correspondant aux points d'intersection de la courbe de pression avec  $p = p_{cav}$ . A l'instant  $t = 0.052$  s le schéma numérique diverge : la figure montre, avant cet instant, une forte accélération de la croissance longitudinale de la zone cavitante. Comme on l'a dit plus haut nous n'avons pas trouvé de remède numérique à ce problème, que ce soit en changeant le pas de temps ou le schéma d'intégration. Nous ignorons s'il est de nature physique ou numérique.

La figure 3 montre, aux instants  $t = 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05$  s, l'épaisseur de la poche. Elle est extrêmement réduite puisqu'elle n'atteint pas le centimètre en fin de simulation. Sur le dernier profil on voit apparaître des instabilités en partie haute. Enfin la figure 4 montre, aux instants 0.03 et 0.04 s, la pression totale à la paroi et la composante  $-\rho \Phi_t / (\rho g)$ , exprimées en mètres d'eau. On constate que la constance de la pression totale sur la partie poche est bien assurée. L'asymétrie haut-bas de la composante  $-\Phi_t / g$  n'est pas tellement due à la compensation de la pression hydrostatique, mais plutôt à l'effet convectif. Les figures 5 et 6 montrent les profils de poche et pressions obtenus lorsque on remplace  $u$  et  $v$ , dans le deuxième membre de l'équation intégrale, par  $u_0$  et  $v_0$  (équation (11)). Les épaisseurs de poche sont similaires, mais leurs profils sont moins déformés vers le bas.

Les figures 7, 8, 9 présentent les résultats homologues lorsque la condition  $\Phi = 0$  est affichée sur le plan moyen de surface libre. La cavitation démarre alors plus tôt, à la cote  $-9.05$  m. La figure 7 montre que la vitesse de croissance longitudinale de la poche est environ deux fois plus faible, le point bas ne descendant qu'à environ 15 m/s. Il en résulte que le potentiel devient singulier en ce point, ce que le schéma numérique traduit par des oscillations (figure 9). Les épaisseurs de poches sont toujours très faibles, mais elles se referment encore au point bas, contrairement à ce qu'on va obtenir avec l'autre profil.

On considère maintenant le profil en ogive, formé d'un tronc rectangulaire de 2 m de large et 5 m de long, terminé par des arcs de cercles de rayon 3.625 m, sans discontinuité de pente, de telle façon que la longueur totale est toujours 10 m. La vitesse verticale est prise égale à 20 m/s. Par rapport au profil parabolique, la différence principale tient à ce que la zone en dépression est beaucoup plus localisée.

Les calculs sont d'abord faits avec l'hypothèse de fluide illimité. La cavitation démarre alors lorsque le milieu du profil atteint la cote  $-11.62$  m, à environ 1.5 m sous la coiffe.

Les premières simulations ont révélé un comportement explosif, le schéma numérique divergeant rapidement. Si l'on résout l'équation (11) plutôt que l'équation (10), donc si on supprime la convection, le problème disparaît et on obtient pour les points  $x_1$  et  $x_2$  les trajectoires portées sur la figure 10. La vitesse de descente du point bas chute très rapidement pour se stabiliser à environ 3.5 m/s. La figure 11 montre les profils de poche obtenus à des instants distants de 0.025 s depuis le début de la cavitation. Les épaisseurs sont devenues appréciables, et les profils ne se referment plus ! La figure 12 montre les profils de pression aux mêmes instants.

Enfin les figures 13, 14 et 15 montrent les résultats homologues, lorsque la condition  $\Phi = 0$  est affichée à la surface libre. Comme dans le cas du profil parabolique, on constate que la croissance de la poche est ralentie. Une interprétation est que le soulèvement de la surface libre au dessus du profil a pour effet de faire chuter moins vite la pression ambiante.

## II. METHODE VOF

Les équations décrivant l'écoulement sont les équations d'Euler en fluide incompressible. Elles s'écrivent, si l'on considère un maillage fixe défini par un système de coordonnées curvilignes  $(\zeta, \eta)$ , de la façon suivante :

$$\frac{1}{J} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial \bar{G}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial \eta} = \frac{1}{J} R$$

avec :

$$W = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{bmatrix} \quad \bar{G} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho \tilde{u} \\ \rho \tilde{u} u + \zeta_x p \\ \rho \tilde{u} v + \zeta_y p \end{bmatrix} \quad \bar{H} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho \tilde{v} \\ \rho \tilde{v} u + \eta_x p \\ \rho \tilde{v} v + \eta_y p \end{bmatrix}$$

$$\tilde{u} = \zeta_x u + \zeta_y v \quad \tilde{v} = \eta_x u + \eta_y v$$

où  $u$  et  $v$  sont les composantes cartésiennes de la vitesse,  $\tilde{u}$  et  $\tilde{v}$  les composantes contravariantes,  $p$  la pression,  $g$  l'accélération de la pesanteur,  $\rho$  la masse volumique du liquide et  $J$  le jacobien de la transformation de coordonnées.

La discrétisation instationnaire est réalisée à l'aide d'un schéma totalement implicite du second ordre. La résolution du système non-linéaire pour les inconnues au pas de temps  $n + 1$  repose sur une technique de pseudo-compressibilité (de Jouëtte et al., 1991). Dans les équations discrétisées à l'instant  $n + 1$ , on introduit des dérivées par rapport à une variable  $\tau$ , dite pseudo-temps, qui font intervenir une nouvelle inconnue  $\bar{\rho}$  dite pseudo-masse volumique et assujettie à rester positive :

$$\frac{1}{J} \frac{\partial \bar{W}^{n+1}}{\partial \tau} + \frac{1}{J} \frac{3W^{n+1} - 4W^n + W^{n-1}}{2\Delta t} + \left( \frac{\partial \bar{G}}{\partial \zeta} \right)^{n+1} + \left( \frac{\partial \bar{H}}{\partial \eta} \right)^{n+1} = \frac{1}{J} R$$

avec  $\bar{W}^{n+1} = \bar{\rho} / \rho W^{n+1}$ .

L'introduction de la variable  $\bar{\rho}$  nécessite une équation supplémentaire qui s'identifie à une pseudo-loi d'état permettant de calculer la pression en fonction de  $\bar{\rho}$ . Cette relation peut être choisie de diverses façons (de Jouëtte et al., 1991).

On a mis en œuvre, pour la résolution du système, une adaptation de la méthode de volumes finis, avec viscosité artificielle, développée à l'origine par Jameson et al. (1981) pour les écoulements de fluides compressibles. La discrétisation en espace est de type centré sur un maillage structuré.

La résolution en pseudo-temps est basée sur le schéma de Runge-Kutta à 5 étapes, avec utilisation d'un pas de temps local en pseudo-temps et un lissage implicite des résidus. Le schéma de base de Runge-Kutta est explicite, mais on introduit un traitement implicite du terme source instationnaire  $\partial W / \partial t$ . La valeur maximale du pas en pseudo-temps  $\Delta \tau$  est fixée par un critère de stabilité local du type Courant-Friedrichs-Lewy. On utilise pour chaque maille la valeur maximale locale du pseudo pas de temps. La méthode est inconditionnellement stable en temps physique et est précise au second ordre.

### Traitement des interfaces liquide-gaz

Les interfaces liquide-gaz sont des frontières libres dont les positions sont des inconnues du problème. Dans la méthode VOF, le problème est discrétisé dans un maillage fixe, et la surface libre n'est connue que par une variable scalaire  $F$  définie dans chaque maille et qui est la fraction de volume de la maille

occupée par le fluide. Cette variable  $F$  prend donc des valeurs comprises entre 0 et 1, bornes incluses, et la surface libre est localisée dans les cellules où l'on a  $0 < F < 1$ .

L'évolution de la variable  $F$  dans une maille est gouvernée par l'équation de bilan de masse de cette maille que l'on peut écrire :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \text{div}(F\overline{U}) = 0$$

Le flux de masse à travers l'interface de deux cellules adjacentes est déterminé selon l'approche de Hirt et Nichols (1981) basée sur un algorithme assez complexe qui distingue un certain nombre de situations possibles en fonction de la valeur de  $F$  et de l'orientation de la surface libre dans la cellule donneur (qui cède du fluide) et dans la cellule accepteur (qui reçoit du fluide). On restreint l'orientation de la surface libre dans la cellule de bilan à ne pouvoir prendre que deux valeurs, à savoir parallèle à l'une des faces de la cellule.

L'algorithme de calcul de  $F$  est explicite en temps. La stabilité de cet algorithme limite le pas de temps à une valeur qui correspond à un déplacement de la surface libre d'une maille au plus.

Les conditions aux limites sur l'interface concernent les cellules partielles c'est-à-dire les cellules dont la valeur de  $F$  est comprise entre 0 et 1. Pour ces cellules, on extrapole les deux composantes de la vitesse à partir des valeurs de la vitesse sur les huit cellules voisines. Cette extrapolation repose sur une moyenne pondérée par une puissance de  $F$  des vitesses dans les huit cellules voisines. La pression imposée dans ces mailles frontières correspond à la pression de vapeur régnant dans le domaine gazeux.

L'initialisation de la poche est réalisée à partir d'un test sur la valeur de la pression dans chacune des cellules du maillage. Dès que la pression d'une cellule devient inférieure à la pression de vapeur, elle est considérée comme étant gazeuse, donc de VOF  $F = 0$ , et à la pression de vapeur saturante. La vitesse de déplacement de l'interface est ensuite égale à la vitesse normale de la phase liquide à laquelle s'ajoute une vitesse due au transfert de masse entre les phases. Cette dernière peut être habituellement négligée et on calcule l'évolution de l'interface par la méthode VOF qui fait intervenir le champ de vitesse local. En outre, à chaque pas de temps du calcul, un test sur le critère de cavitation permet de localiser d'éventuelles nouvelles cellules liquides de pression inférieure à la pression de vapeur, qui sont alors imposées comme étant gazeuses. Ce test, qui consiste finalement à prendre en compte de manière semi-empirique le transfert de masse à l'interface liquide-gaz, gère ainsi de manière automatique une possible réalimentation de la poche gazeuse en fonction des conditions dynamiques locales de l'écoulement.

## Résultats numériques

Ils ont été obtenus pour le cas du profil en ogive, la surface libre étant modélisée. Le domaine fluide est limité latéralement à 20 mètres de l'axe du profil. Les mailles les plus petites, près de la paroi, ont des dimensions de l'ordre de  $2.5 \times 10$  cm.

Les figures 16, 17 et 18 montrent la forme de la poche, le champ de vitesses, et la carte de pression, à l'instant "initial", c'est à dire à l'instant où l'on a vidé un certain nombre de mailles de leur fluide, à partir du test sur la pression. On constate que la taille de la poche (de contour défini par  $F = 0.5$ ) est déjà fort imposante, sans commune mesure avec ce qu'on obtient par la théorie potentielle. On constate aussi sur la figure 17 que le champ de vitesse n'est pas affecté par la présence de la poche.

La figure 19 montre l'évolution ultérieure de la poche ainsi formée, jusqu'à l'approche de la surface libre. On peut noter son fort épaississement en phase finale, et le soulèvement local de la surface libre. La formation d'un jet rentrant n'apparaît pas clairement, mais le maillage n'est sans doute pas suffisamment fin pour le capter.

### III. DISCUSSION

Les résultats numériques obtenus via l'approche potentielle ne sont pas vraiment concluants, essentiellement parce que la méthode de résolution choisie est par trop rudimentaire pour bien rendre de compte de la singularité qui apparaît au point bas lorsque la convection est trop forte. Avant de mettre en œuvre une méthode numérique plus performante, il convient de se livrer à des réflexions sur la signification physique de cette singularité, et sur la légitimité de l'approche potentielle. Il est plausible que l'interprétation physique de ce phénomène de choc est qu'il apparaît un jet rentrant. En ce cas la solution potentielle obtenue représenterait l'écoulement "extérieur".

Tant que le point bas descend suffisamment rapidement, l'approche potentielle est licite. Si l'on se base sur la carte initiale de pression  $p_0(x)$ , un critère grossier est que le gradient  $\partial p_0/\partial x$  au point bas soit, en valeur absolue, inférieur à  $\rho g$ . Ce critère est toujours satisfait au démarrage puisque la poche apparaît au minimum de  $p_0$ .

En ce qui concerne la méthode VOF, il semble que le maillage réalisé ne soit pas suffisamment fin, la poche initiale étant manifestement trop grosse. Des raffinements locaux du maillage sont possibles.

Le principe d'initialisation de la poche n'en reste pas moins discutable : il ne conserve pas la masse, et les champs de vitesse et de pression "initiaux" sont ceux du fluide en l'absence de poche. L'approche potentielle fait clairement ressortir que le moteur du développement de la poche est le terme  $-\rho \Phi_t$  de la pression, qui devrait donc être aussi "initialisé".

### CONCLUSIONS

Une première conclusion, pressentie dès le départ, est que les approches potentielle et VOF sont plus complémentaires que concurrentes. On conçoit assez bien un modèle numérique qui démarrerait en potentiel, puis embrayerait sur le VOF en transférant les formes de poche, champs de vitesse et de pression du module potentiel au module VOF. Des développements en ce sens sont envisagés, l'hypothèse de poche mince étant conservée dans le module potentiel, mais les singularités étant placées à la paroi (de façon à se soustraire de l'hypothèse de profil mince, et à pouvoir passer à des géométries tridimensionnelles). Le cas du cercle (autre géométrie pour laquelle le problème potentiel admet une résolution quasi analytique) a aussi été abordé, et des résultats seront prochainement présentés.

Une autre information intéressante qui ressort de cette investigation est que la présence de la surface libre joue un rôle important puisqu'elle semble ralentir, par rapport au cas du fluide illimité, la vitesse de développement de la poche. La légitimité de l'idéalisation par  $\Phi = 0$ , dans le modèle potentiel, des conditions de surface libre, demande à être confirmée.

### REFERENCES :

- R. COINTE (1989). "Quelques aspects de la simulation numérique d'un canal à houle", thèse ENPC.  
 L. DIÉVAL, R. MARCER et M. ARNAUD (1996). "Modélisation de poches de cavitation par une méthode de suivi d'interfaces de type VOF", Troisièmes Journées de la Cavitation, Grenoble.  
 P. FERRANT (1994). "Radiation and diffraction of nonlinear waves in three dimensions", BOSS'94.  
 C.W. HIRT et B.D. NICHOLS (1981). "Volume Of Fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries", J. Comp. Physics, Vol 39, pp 201-255.  
 A. JAMESON, W. SCHMIDT et E. TURKEL (1981). "Numerical solutions for the Euler equations by finite volumes methods using Runge-Kutta time-marching schemes". AIAA-81-1259, AIAA 14th Fluid and Plasma Dyn. Conf., Palo Alto, California.  
 CH. DE JOUËTTE, H. VIVIAND, S. WORNOM et J-M. LE GOUEZ (1991). "Pseudo compressibility method for incompressible flow calculation", 4th International Symposium on Comp. Fluid Dyn.  
 J.N. NEWMAN (1977). *Marine Hydrodynamics*, MIT Press.

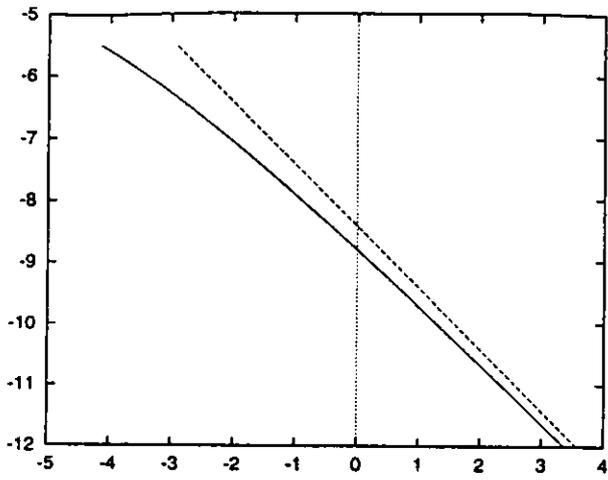


Figure 1. Profil parabolique non cavitant. Minimum de pression à la paroi en fonction de la cote verticale. Avec (trait continu) et sans (tirets) surface libre.

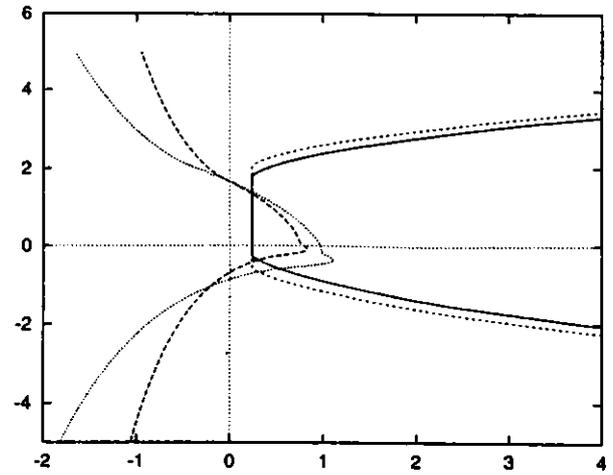


Figure 4. Profil parabolique en profondeur illimitée. Pression totale à la paroi et composante  $-\Phi_t/g$  à deux instants.

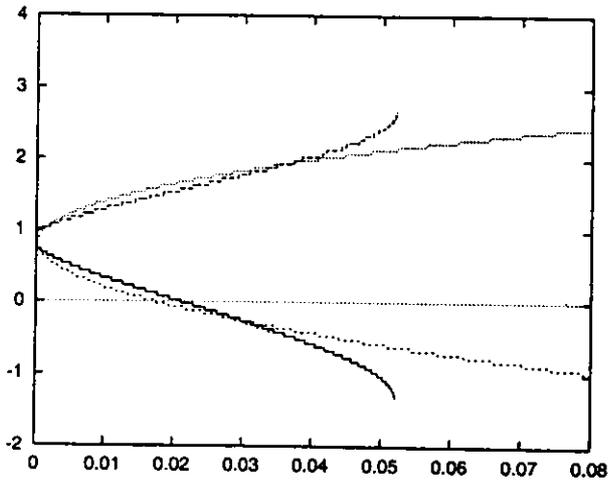


Figure 2. Profil parabolique en fluide illimité. Evolution des points  $x_1$  et  $x_2$  avec le temps.

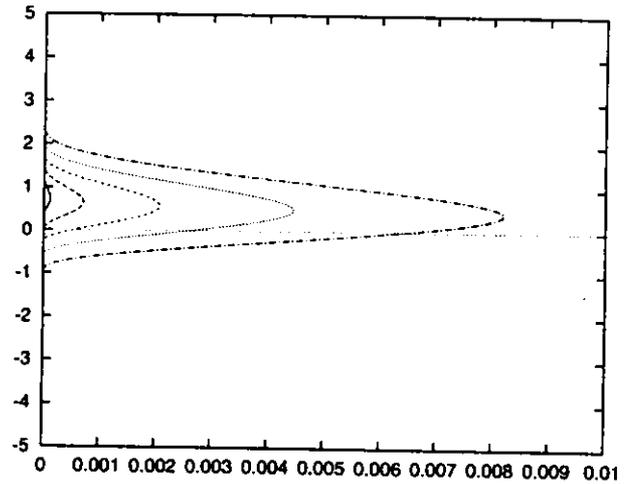


Figure 5. Même chose que figure 3 avec  $u_0$  et  $v_0$  au lieu de  $u$  et  $v$ .

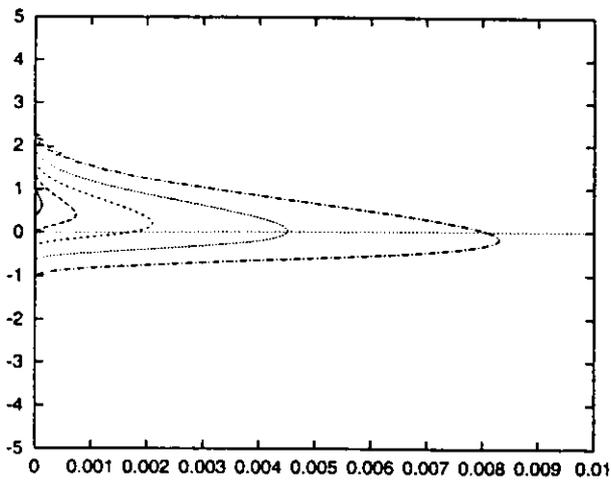


Figure 3. Profil parabolique en profondeur illimitée. Epaisseur de la poche à différents instants.

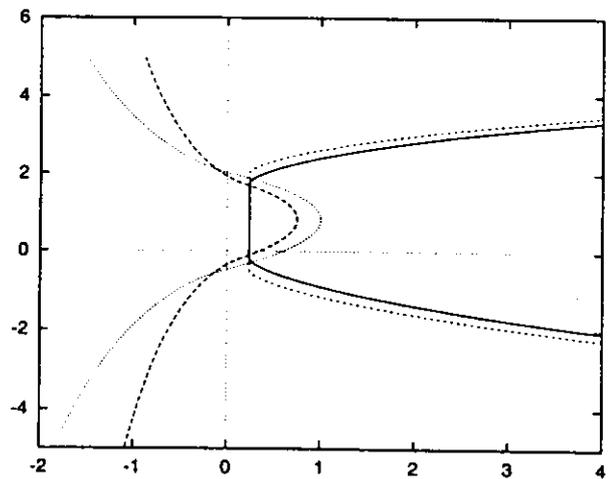


Figure 6. Même chose que figure 4 avec  $u_0$  et  $v_0$  au lieu de  $u$  et  $v$ .

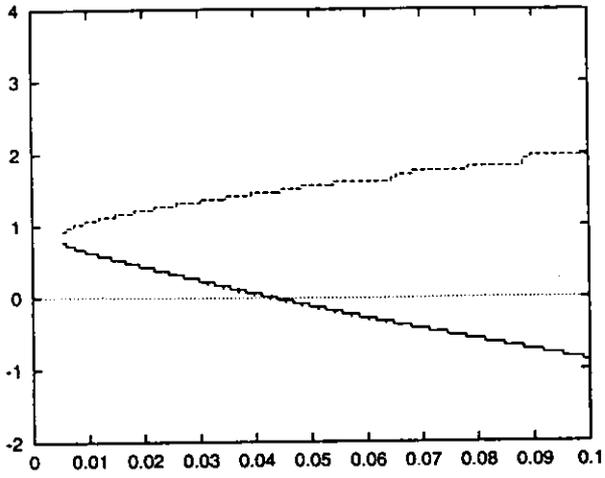


Figure 7. Profil parabolique avec surface libre.  
Evolution des points  $x_1$  et  $x_2$  avec le temps.

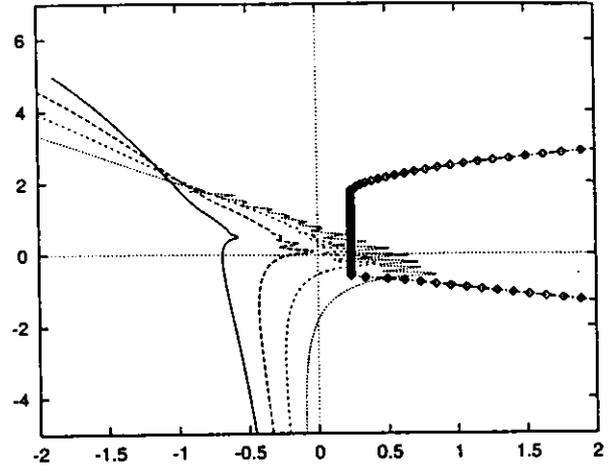


Figure 9. Profil parabolique avec surface libre.  
Pression totale à la paroi et composante  $-\Phi_t/g$  à différents instants.

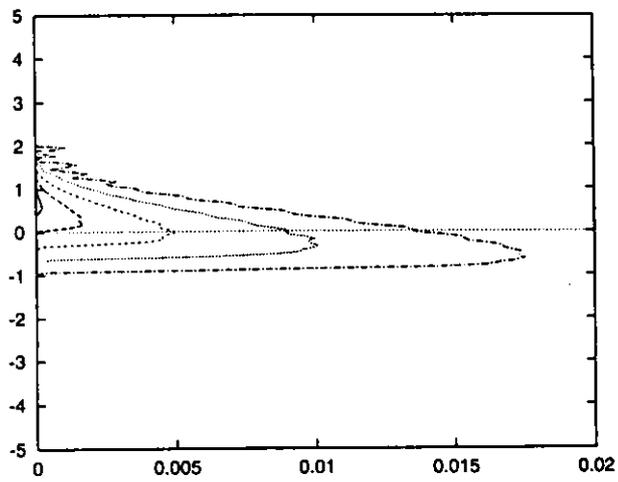


Figure 8. Profil parabolique avec surface libre.  
Epaisseur de la poche à différents instants.

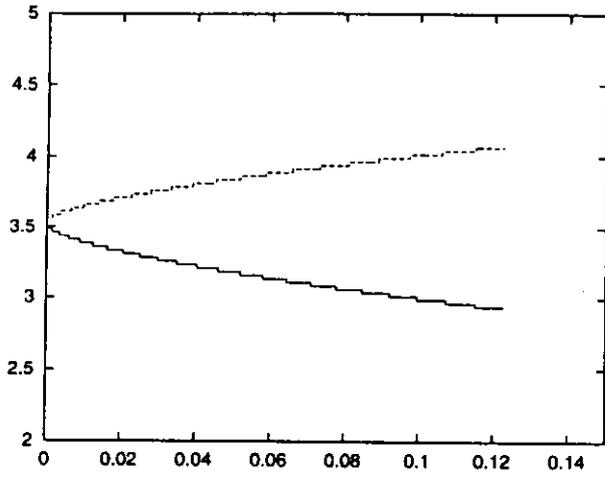


Figure 10. Profil en ogive en profondeur illimitée.  
Evolution des points  $x_1$  et  $x_2$  avec le temps.

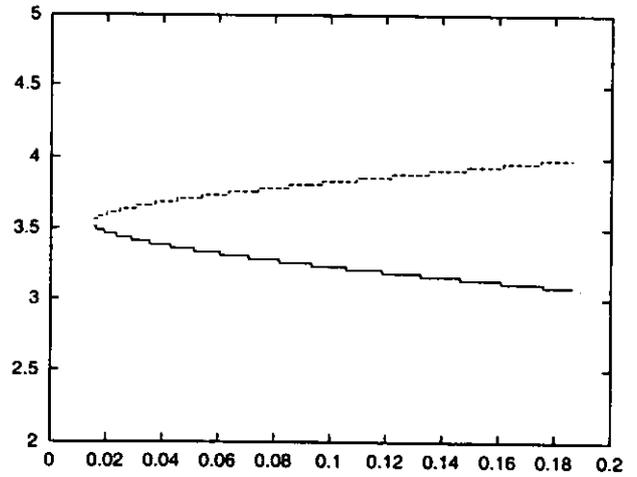


Figure 13. Profil en ogive avec surface libre.  
Evolution des points  $x_1$  et  $x_2$  avec le temps.

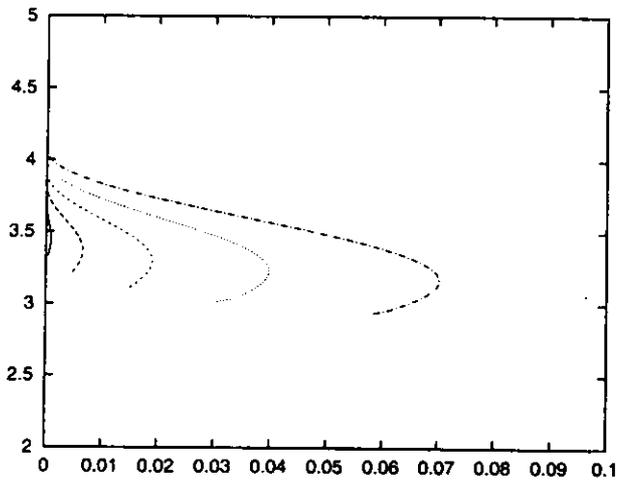


Figure 11. Profil en ogive en profondeur illimitée.  
Forme de poche à différents instants.

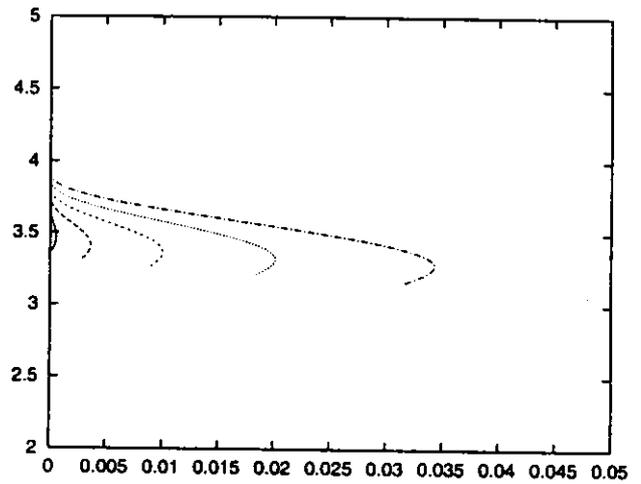


Figure 14. Profil en ogive avec surface libre.  
Forme de poche à différents instants.

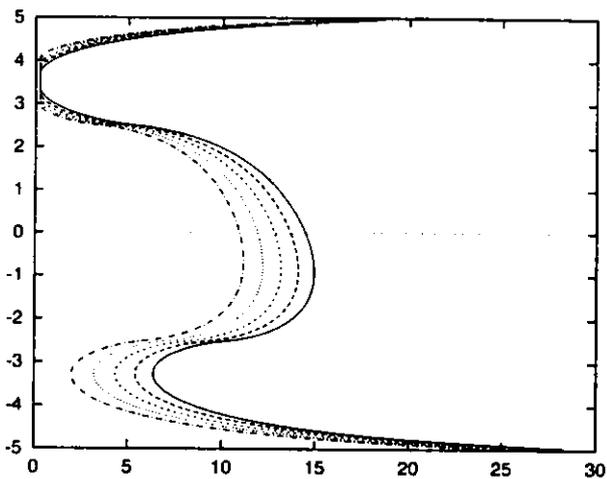


Figure 12. Profil en ogive en profondeur illimitée.  
Pression totale à la paroi à différents instants.

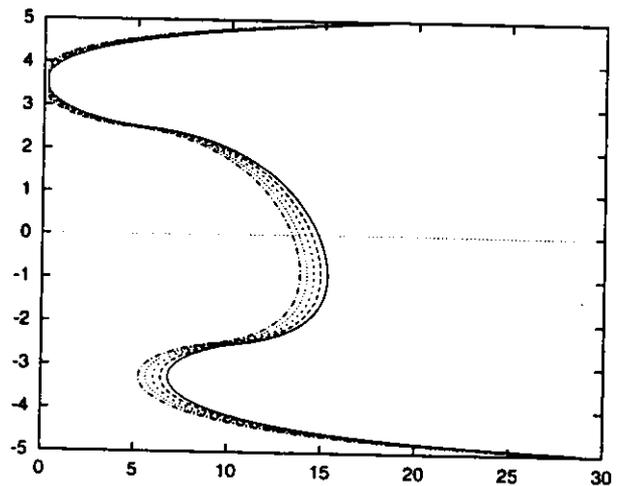
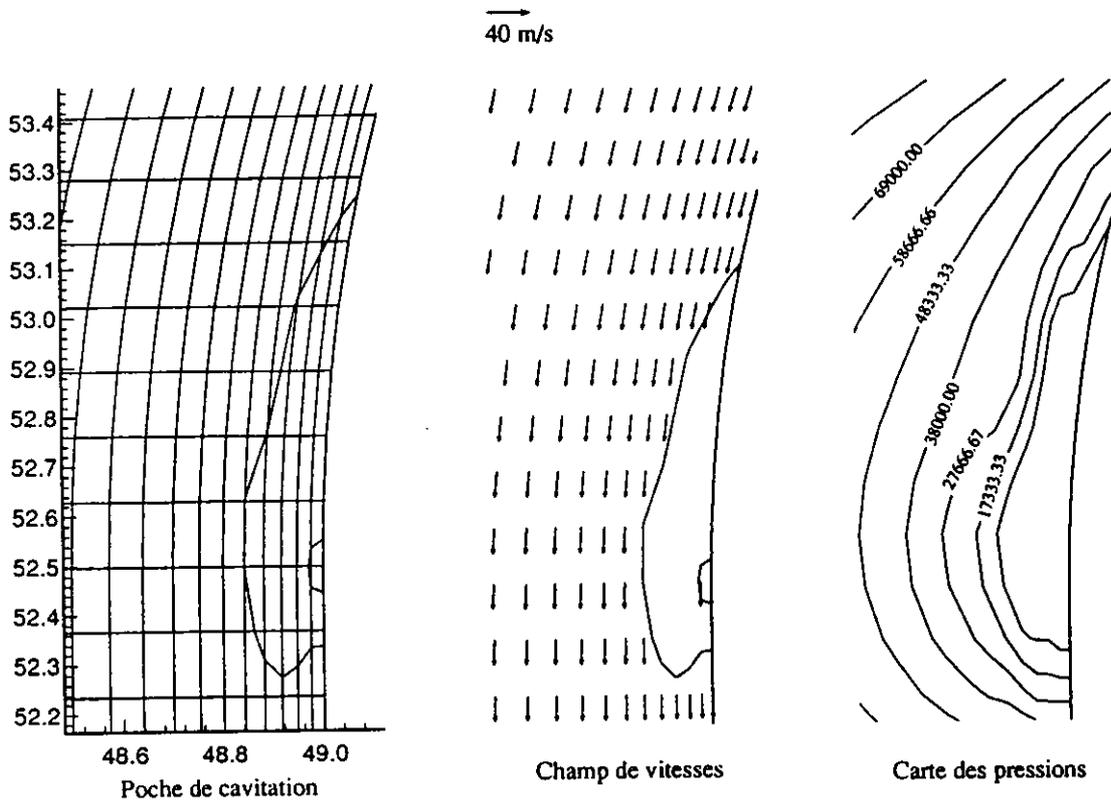


Figure 15. Profil en ogive avec surface libre.  
Pression totale à la paroi à différents instants.



Figures 16, 17, 18. Profil en ogive avec surface libre. Méthode VOF.  
Forme initiale de la poche et champs de vitesse et de pression associés.

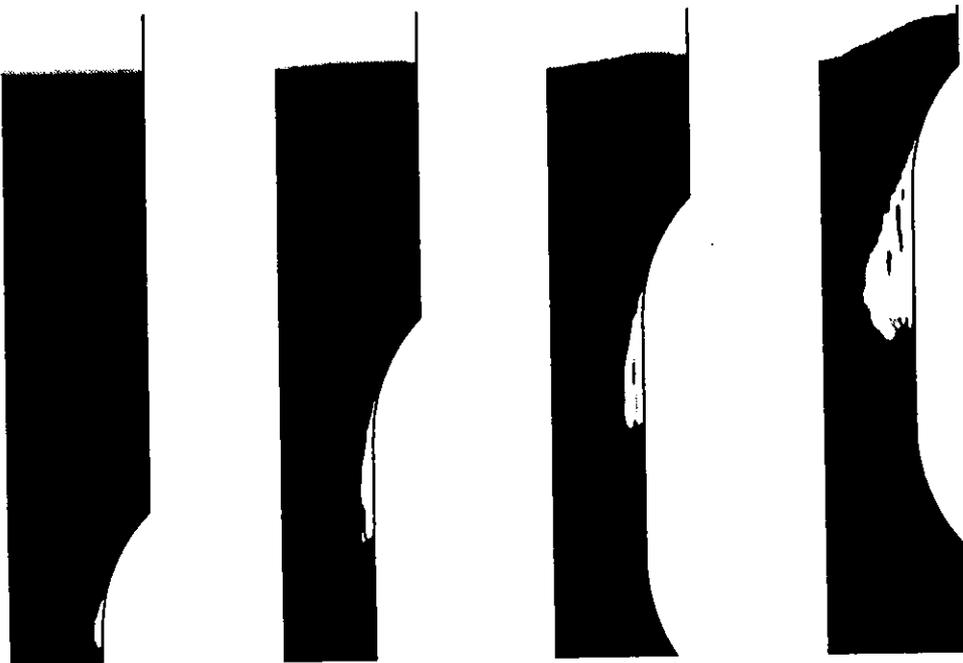


Figure 19. Evolution de la poche à l'approche de la surface libre.