

5^e JOURNÉES DE L'HYDRODYNAMIQUE

22, 23, 24 mars 1995 – ROUEN

A propos des méthodes semi-analytiques pour les différents problèmes de diffraction-radiation par un cylindre tronqué

Šime MALENICA - Stéphane ETIENNE[†]

Institut Français du Pétrole, BP 311

92506 Reuil-Malmaison, France

Résumé

On développe ici une méthode semi-analytique générale pour les problèmes de diffraction-radiation par un cylindre tronqué dont la condition de la surface libre peut être écrite sous la forme $-\alpha\phi + \partial\phi/\partial z = Q(r, \theta)$. Le cas particulier de la diffraction avec petite vitesse d'avance a été traité puisqu'il contient une multitude des problèmes de ce type. La méthode du calcul du potentiel est inspirée, d'une part du travail de Garrett [5], qui avait traité le problème de diffraction du premier ordre sans vitesse d'avance [$Q(r, \theta) = 0$] et d'autre part des méthodes d'équations intégrales [1,7,8] qui traitent les différents problèmes de la diffraction pour un cylindre complet.

Summary

We develop here a general semi-analytical method for diffraction-radiation problems, for a truncated cylinder, when the free surface condition can be written in the form $-\alpha\phi + \partial\phi/\partial z = Q(r, \theta)$. The particular case of diffraction with small forward speed is considered because it contains several problems of this type. The method of calculation of the potentials is inspired by the work of Garrett [5], who treated the problem of first order diffraction without forward speed [$Q(r, \theta) = 0$], and by the methods of integral equations [1,7,8] which has been applied to different problems of diffraction for bottom mounted vertical cylinders.

[†] Elève de 3^{ème} année à l'Ecole Centrale de Nantes

Introduction

L'intérêt premier de cette étude découle de la nécessité pour les chercheurs d'avoir des résultats les plus exacts possibles pour les problèmes les plus compliqués possibles, afin de pouvoir au mieux valider les codes numériques. Par ailleurs, bien qu'en premier abord le problème d'un cylindre tronqué paraisse plutôt un cas académique sans intérêt pratique, nombreuses sont les constructions offshore dont les composantes principales sont les cylindres tronqués (TLP, plateforme semi-submersible,...). Dans ces cas-là les résultats semi-analytiques combinés avec certaines méthodes approchées, permettant de prendre en compte le reste de la construction, peuvent constituer une bonne base de résultats préliminaires nécessaires dans la phase de l'avant-projet d'une construction offshore. C'est là le deuxième intérêt de cette étude. Le troisième intérêt de l'étude est un peu particulier et concerne la formule simple de calcul de l'amortissement de dérive [3]. En effet, cette formule semble être valable pour le cas d'un cylindre complet fixe et non pas pour un cylindre flottant. Dans le but d'identifier la cause de la non validité de cette formule pour un cylindre flottant, il est intéressant de résoudre le problème d'un cylindre tronqué fixe, ce qui permet de mettre en évidence le rôle des modes évanescents qui sont absents dans le cas d'un cylindre complet fixe et présents dans celui d'un cylindre complet flottant ainsi que dans celui d'un cylindre tronqué fixe.

C'est donc le problème d'un cylindre tronqué fixe soumis à une houle régulière sinusoïdale et à un faible courant, qui est traité ici. Ce problème regroupe différentes classes de problèmes aux limites, ainsi les méthodes de résolution employées pourront être utilisées pour traiter d'autres problèmes comme par exemple celui de radiation pour le même cas ou les problèmes de diffraction-radiation au deuxième ou troisième ordre sans courant.

Diffraction avec petite vitesse d'avance

Le problème de la diffraction avec petite vitesse d'avance a fait objet de nombreuses études [4,6,8,10] et ici on va seulement rappeler brièvement la mise en équations dans le domaine fréquentiel.

Après la linéarisation du problème aux limites pour le potentiel, par rapport au paramètre de cambrure de la houle $\varepsilon = k_0 A$ (k_0 - nombre d'onde, A - amplitude de la houle) et en supposant la périodicité du problème au premier ordre :

$$\varepsilon \phi^{(1)}(x, y, z, t) = \Re\{\phi(x, y, z)e^{-i\omega_e t}\}$$

la condition de la surface libre, qui est la difficulté principale du problème, se présente sous la forme (dans le repère lié au corps):

$$-\omega_e^2 \phi + 2i\omega_e U \frac{\partial \phi}{\partial x} - 2i\omega_e U \nabla_0 \bar{\phi} \nabla_0 \phi + g \frac{\partial \phi}{\partial z} + i\omega_e U \phi \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

où ω_e est la fréquence de rencontre $\omega_e = \omega_0 - k_0 U \cos \beta$ avec : ω_0 - fréquence de la houle incidente dans un repère fixe, β - l'angle entre la direction de propagation de la houle

incidente et l'axe $+x$. Le potentiel $\bar{\phi}$ est le potentiel stationnaire dû à l'interaction du courant avec le corps.

Le potentiel ϕ doit satisfaire également l'équation de Laplace dans le fluide, la condition de glissement sur les frontières rigides et la condition de radiation pour la partie de diffraction $\phi_D = \phi - \phi_I$. Le potentiel incident ϕ_I est celui d'une houle plane progressive et peut être écrit sous la forme :

$$\phi_I = -\frac{igA \cosh k_0(z+H)}{\omega_0 \cosh k_0 H} e^{ik_0 r \cos(\theta-\beta)} \quad (2)$$

où (r, θ, z) sont les coordonnées d'un point dans le repère lié au corps et le nombre d'onde k_0 peut être déduit de l'équation de dispersion $\nu = \omega_0^2/g = k_0 \tanh k_0 H$.

En introduisant, dans le problème aux limites, une nouvelle perturbation par rapport au paramètre de vitesse d'avance $\phi_D = \varphi_D + \tau\psi$, $\tau = U\omega_0/g$, on obtient au différents ordres en τ :

$O(1)$

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_D &= 0 & \begin{cases} 0 \geq z \geq -H, \tau > a \\ -D \geq z \geq -H, \tau < a \end{cases} \\ -\nu\varphi_D + \frac{\partial\varphi_D}{\partial z} &= 0 & z = 0 \\ \frac{\partial\varphi_D}{\partial\tau} &= -\frac{\partial\phi_I}{\partial\tau} & \tau = a, 0 \geq z \geq -D \\ \frac{\partial\varphi_D}{\partial z} &= 0 & z = -H \\ \lim\left[\sqrt{k_0\tau}\left(\frac{\partial\varphi_D}{\partial\tau} - ik_0\varphi_D\right)\right] &= 0 & \tau \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3)$$

$O(\tau)$

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= 0 & \begin{cases} 0 \geq z \geq -H, \tau > a \\ -D \geq z \geq -H, \tau < a \end{cases} \\ -\nu\psi + \frac{\partial\psi}{\partial z} &= -2i\frac{\partial\varphi_D}{\partial z} - 2k_0 \cos\beta\varphi_D + 2i\nabla_0\bar{\phi}\nabla_0\varphi - i\varphi\frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial z^2} & z = 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial n} &= 0 & \tau = a, 0 \geq z \geq -D \\ \frac{\partial\psi}{\partial z} &= 0 & z = -H \\ \text{cond. de radiation} & & \tau \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4)$$

où on a tenu compte du fait que le potentiel incident n'est pas sensible à la perturbation par τ et on a adopté les notations $\phi_I = \varphi_I$ et $\varphi = \varphi_I + \varphi_D$.

Le premier problème est le problème classique de diffraction de premier ordre sans vitesse d'avance avec une condition homogène sur la surface libre et une condition de radiation classique. Il peut être résolu par l'application directe de la méthode de Garrett. Il n'en est pas de même pour le problème ψ qui nécessite quelques développements

supplémentaires. Pour cela on divise d'abord ce potentiel en deux parties ¹ $\psi = \psi_1 + \psi_3$ qui satisfont les conditions suivantes sur la surface libre :

$$-\nu\psi_1 + \frac{\partial\psi_1}{\partial z} = -2i\frac{\partial\varphi_D}{\partial x} - 2k_0 \cos\beta\varphi_D \quad (5)$$

$$-\nu\psi_3 + \frac{\partial\psi_3}{\partial z} = 2i\nabla_0\bar{\phi}\nabla_0\varphi - i\varphi\frac{\partial^2\bar{\phi}}{\partial z^2} \quad (6)$$

La solution pour chacun des deux potentiels sera également divisée en deux parties : la première qui est la solution particulière (ψ_1^P et ψ_3^P) satisfaisant la condition sur la surface libre non homogène sans satisfaire la condition sur le corps et sur la surface de raccordement, et la deuxième (ψ_1^{**} et ψ_3^{**}) qui satisfera la condition sur le corps, les conditions de raccordement, une condition homogène sur la surface libre et une condition de radiation classique (3).

Les efforts

On s'intéresse ici aux efforts périodiques de premier ordre et aux efforts constants de deuxième ordre. Les efforts de premier ordre sont trouvés par intégration de la pression sur la surface mouillée du corps, jusqu'au premier ordre, et l'expression finale est :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(1)} &= -\rho \int \int_{S_{B_0}} [-i\omega_e\phi + U(\nabla\bar{\phi}\nabla\phi - \frac{\partial\phi}{\partial x})]ndS \\ &= \rho i\omega_0 \int \int_{S_{B_0}} \{\varphi + \tau[\psi_D + \frac{1}{\nu}(i\nabla\bar{\phi}\nabla\varphi - i\frac{\partial\varphi}{\partial x} - k_0 \cos\beta\varphi)]\}ndS \end{aligned} \quad (7)$$

Concernant les efforts constants de deuxième ordre on s'intéresse seulement à ceux dans la direction x . On introduit la notation habituelle :

$$\bar{F}_x = D_x - UB_{xx} \quad (8)$$

où \bar{F}_x est l'effort constant de deuxième ordre du problème avec vitesse d'avance, D_x est l'effort de dérive sans vitesse d'avance (appelé d'habitude l'effort de dérive) B_{xx} est l'amortissement de dérive et U est la vitesse d'avance. En utilisant la loi de conservation de la quantité de mouvement, les expressions pour D_x et B_{xx} peuvent être écrites sous forme des intégrales sur une surface de contrôle à l'infini [4] :

$$D_x(\omega_0) = -\frac{\rho}{2}\Re\left\{\int \int_{S_\infty} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi^*}{\partial n} - \frac{1}{2}\nabla\varphi\nabla\varphi^*n_x\right)dS + \frac{\nu}{2}\int_{C_\infty} \varphi\varphi^*n_x dC\right\} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} B_{xx}(\omega_0) &= \frac{\rho\omega_0}{2g}\Re\left\{\int \int_{S_\infty} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi^*}{\partial n} + \frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{\partial\psi^*}{\partial x} - \nabla\varphi\nabla\psi^*n_x\right)dS \right. \\ &\quad \left. + \int_{C_\infty} (\nu\varphi\psi^* - k_0 \cos\beta\varphi\varphi^*)n_x dC\right\} \end{aligned} \quad (10)$$

avec $n_x = \cos\theta$.

¹On évite ici la notation ψ_2 pour être en accord avec les notations habituelles en littérature [4,6].

On peut montrer [4] que ces expressions ont une forme conservative et qu'elles peuvent être appliquées sur une surface quelconque à l'extérieur du cylindre du moment que seulement les parties propagatives des potentiels φ et ψ sont considérées. Cela veut dire qu'on peut intégrer directement sur le cylindre défini par $r = a$, $z \in [-H, 0]$, ce qui facilite le calcul.

On rappelle encore la formule simple de calcul de l'amortissement de dérive [7] :

$$B_{zz}(\omega_0) = \left\{ \left[\left(\frac{\partial D_z(\omega_0)}{\partial \omega_0} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \omega_0} D_z(\omega_0) \right) \omega_0 + \frac{2}{\alpha} D_z(\omega_0) \right] \cos \beta - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial D_z(\omega_0)}{\partial \beta} \sin \beta \right\} \frac{k_0}{\omega_0} \quad (11)$$

où α est le rapport entre la vitesse de groupe et la vitesse de phase :

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{k_0 H}{\sinh 2k_0 H} \quad (12)$$

Solution pour les potentiels

Les méthodes de calcul de chacun des potentiels se ressemblent et sont basées sur le travail de Garrett [4] qui a étudié le problème de la diffraction de premier ordre pour un cylindre tronqué sans vitesse d'avance [problème aux limites (3)]. L'idée est relativement simple et consiste à diviser le domaine fluide en deux parties comme le montre la figure 1, après quoi les solutions dans chacun des domaines sont développées sur des bases de fonctions propres. En tenant compte des conditions aux limites et des conditions de raccordement, entre la solution intérieure et la solution extérieure, et en exploitant l'orthogonalité des fonctions propres en z , on obtient ensuite les valeurs des coefficients inconnus sous forme d'un système d'équations linéaires.

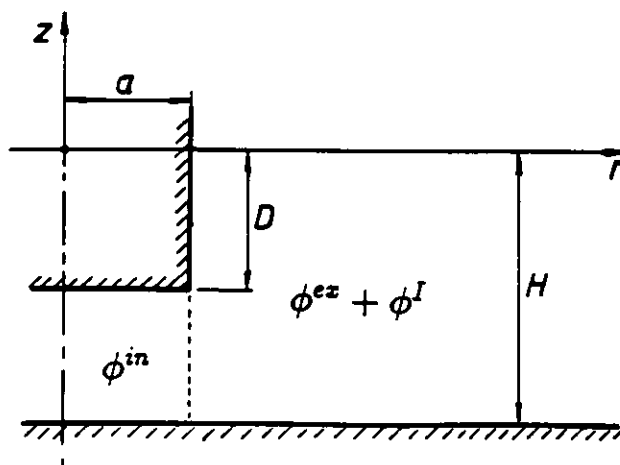


FIGURE 1. Les différents domaines de calcul.

La décomposition du potentiel en somme de fonctions propres dans un des domaines dépend du problème aux limites que ce potentiel doit satisfaire. Comme le domaine intérieur est fini et possède des frontières fixes, la base de fonctions propres sera la même pour tous les potentiels $(\bar{\phi}^{in}, \varphi_D^{in}, \psi_1^{in}, \psi_3^{in})$:

$$\phi^{in} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [b_{m0}^{\phi} (\frac{r}{a})^{|m|} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}^{\phi} \cos \lambda_n(z+H) I_m(\lambda_n r)] e^{im\theta} \quad (13)$$

avec $\lambda_n = n\pi/(H-D)$.

La base de fonctions propres dans le domaine extérieur dépendra de la condition sur la surface libre et de celle à l'infini. Pour le cas du potentiel $\bar{\phi}$ qui satisfait la condition de dérivée normale nulle sur la surface libre $\partial\bar{\phi}/\partial z = 0$ et disparaît à l'infini, l'expression sera :

$$\bar{\phi}^{ex} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [c_{m0}^{\bar{\phi}} (\frac{a}{r})^{|m|} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}^{\bar{\phi}} \cos \mu_n(z+H) K_m(\mu_n r)] e^{im\theta} \quad (14)$$

avec $\mu_n = n\pi/H$.

Par ailleurs, puisqu'ils satisfont les mêmes conditions sur la surface libre et à l'infini, les potentiels φ_D^{ex} , ψ_1^{ex} et ψ_3^{ex} seront développés sous la même forme :

$$\phi^{ex} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [c_{m0}^{\phi} f_0(z) H_m(k_0 r) + \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}^{\phi} f_n(z) K_m(k_n r)] e^{im\theta} \quad (15)$$

avec :

$$f_0(z) = \frac{\cosh k_0(z+H)}{\cosh k_0 H}, \quad f_n(z) = \frac{\cos k_n(z+H)}{\cos k_n H} \quad (16)$$

et $\nu = k_0 \tanh k_0 H = -k_n \tan k_n H$.

On écrit maintenant les différentes conditions sur le cylindre et sur la surface de raccordement. Dans tous les cas elles seront de la forme :

$$r = a, z \in [-D, 0] ; \quad \frac{\partial \phi^{ex}}{\partial r} = -\frac{\partial \phi^I}{\partial r} \quad (17)$$

$$r = a, z \in [-H, -D] ; \quad \phi^{in} = \phi^{ex} + \phi^I \quad (18)$$

$$r = a, z \in [-H, -D] ; \quad \frac{\partial \phi^{in}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} (\phi^{ex} + \phi^I) \quad (19)$$

On tire ensuite parti de l'orthogonalité des fonctions propres en z . Pour le cas du potentiel $\bar{\phi}$ on écrit :

$$\int_{-H}^{-D} (\bar{\phi}^{ex} + \bar{\phi}^I) dz = \int_{-H}^{-D} \bar{\phi}^{in} dz \quad (20)$$

$$\int_{-H}^{-D} (\bar{\phi}^{ex} + \bar{\phi}^I) \cos \lambda_n(z+H) dz = \int_{-H}^{-D} \bar{\phi}^{in} \cos \lambda_n(z+H) dz \quad n = 1, \infty \quad (21)$$

$$\int_{-H}^0 \frac{\partial}{\partial r} (\bar{\phi}^{ex} + \bar{\phi}^I) dz = \int_{-H}^{-D} \frac{\partial \bar{\phi}^{in}}{\partial r} dz \quad (22)$$

$$\int_{-H}^0 \frac{\partial}{\partial r} (\bar{\phi}^{ex} + \bar{\phi}^I) \cos \mu_n(z+H) dz = \int_{-H}^{-D} \frac{\partial \bar{\phi}^{in}}{\partial r} \cos \mu_n(z+H) dz \quad n = 1, \infty \quad (23)$$

et dans les autres cas ($\varphi_D, \psi_1, \psi_3$) :

$$\int_{-H}^{-D} (\phi^{ex} + \phi^I) dz = \int_{-H}^{-D} \phi^{in} dz \quad (24)$$

$$\int_{-H}^{-D} (\phi^{ex} + \phi^I) \cos \lambda_n(z + H) dz = \int_{-H}^{-D} \phi^{in} \cos \lambda_n(z + H) dz \quad n = 1, \infty \quad (25)$$

$$\int_{-H}^0 \frac{\partial}{\partial r} (\phi^{ex} + \phi^I) f_0(z) dz = \int_{-H}^{-D} \frac{\partial \phi^{in}}{\partial r} f_0(z) dz \quad (26)$$

$$\int_{-H}^0 \frac{\partial}{\partial r} (\phi^{ex} + \phi^I) f_n(z) dz = \int_{-H}^{-D} \frac{\partial \phi^{in}}{\partial r} f_n(z) dz \quad n = 1, \infty \quad (27)$$

Ce qui nous permet d'obtenir un système d'équations linéaires du type [pour chaque mode de Fourier $m = (-\infty, \infty)$] :

$$b_{m0}^\phi = c_{m0}^\phi D_{00}^{m\phi} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}^\phi D_{0n}^{m\phi} + F_0^{m\phi} \quad (28)$$

$$b_{ml}^\phi = c_{m0}^\phi D_{l0}^{m\phi} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}^\phi D_{ln}^{m\phi} + F_l^{m\phi} \quad l = 1, \infty \quad (29)$$

$$c_{m0}^\phi = b_{m0}^\phi E_{00}^{m\phi} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}^\phi E_{0n}^{m\phi} + G_0^{m\phi} \quad (30)$$

$$c_{ml}^\phi = b_{m0}^\phi E_{l0}^{m\phi} + \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn}^\phi E_{ln}^{m\phi} + G_l^{m\phi} \quad l = 1, \infty \quad (31)$$

ce qui peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{D}^{m\phi} \\ -\mathbf{E}^{m\phi} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_m^\phi \\ \mathbf{C}_m^\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{m\phi} \\ \mathbf{G}^{m\phi} \end{pmatrix} \quad (32)$$

avec :

$$\mathbf{D}^{m\phi} = \begin{pmatrix} D_{00}^{m\phi} & \dots & D_{0n}^{m\phi} \\ \dots & \dots & \dots \\ D_{l0}^{m\phi} & \dots & D_{ln}^{m\phi} \end{pmatrix} \quad \mathbf{E}^{m\phi} = \begin{pmatrix} E_{00}^{m\phi} & \dots & E_{0n}^{m\phi} \\ \dots & \dots & \dots \\ E_{l0}^{m\phi} & \dots & E_{ln}^{m\phi} \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$\mathbf{B}_m^\phi = [b_{m0}^\phi, b_{m1}^\phi, \dots, b_{mn}^\phi]^T \quad \mathbf{C}_m^\phi = [c_{m0}^\phi, c_{m1}^\phi, \dots, c_{mn}^\phi]^T \quad (34)$$

$$\mathbf{F}^{m\phi} = [F_0^{m\phi}, F_1^{m\phi}, \dots, F_n^{m\phi}]^T \quad \mathbf{G}^{m\phi} = [G_0^{m\phi}, G_1^{m\phi}, \dots, G_n^{m\phi}]^T \quad (35)$$

et la matrice \mathbf{I} désignant la matrice unité.

Les coefficients des matrices $\mathbf{D}^{m\phi}$ et $\mathbf{E}^{m\phi}$ dépendent essentiellement des expressions pour ϕ^{ex} et ils peuvent aisément être déduits des équations (20) à (23). Ils seront donc les mêmes pour le cas des potentiels φ_D, ψ_1 et ψ_3 mais différents pour le potentiel $\bar{\phi}$. Les vecteurs sources $\mathbf{F}^{m\phi}$ et $\mathbf{G}^{m\phi}$, eux dépendent de l'excitation c.à.d. du potentiel ϕ^I et de ce fait, ils seront différents dans tous les cas.

La solution de système (32) donne les coefficients b_{mn}^ϕ et c_{mn}^ϕ ce qui termine le calcul

des potentiels.

Il reste encore à définir et à calculer les différents potentiels "incidents" $\bar{\phi}^I$.

Dans le cas du potentiel stationnaire $\bar{\phi}$ c'est le potentiel du courant unitaire uniforme suivant l'axe $-x$:

$$\bar{\phi}^I = -r \cos \theta$$

Dans le cas du potentiel φ_D c'est le potentiel incident de premier ordre φ_I (2) :

$$\varphi_I = -\frac{igA}{\omega_0} f_0(z) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\pi/2-\beta)} J_m(k_0 r) e^{im\theta}$$

Pour les potentiels ψ_1 et ψ_3 ce sont les solutions particulières ψ_1^P et ψ_3^P qui jouent le rôle des potentiels incidents. Pour le potentiel ψ_1 cette solution peut être trouvée sous une forme explicite [4,7] et ici on rappelle seulement la solution finale :

$$\psi_1^P = -2\left(i\frac{\partial}{\partial x} + k_0 \cos \beta\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k_n} \frac{\partial k_n}{\partial \nu} \left[z \frac{\partial \varphi_{Dn}^{ez}}{\partial z} + r \frac{\partial \varphi_{Dn}^{ez}}{\partial r} + H(-\nu \varphi_{Dn}^{ez} + \frac{\partial \varphi_{Dn}^{ez}}{\partial z}) \right] \quad (36)$$

où φ_{Dn}^{ez} peut être tiré de l'expression (15) :

$$\varphi_{Dn}^{ez} = \begin{cases} f_0(z) \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{m0}^{\varphi_D} H_m(k_0 r) e^{im\theta} & n = 0 \\ f_n(z) \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{mn}^{\varphi_D} K_m(k_n r) e^{im\theta} & n > 0 \end{cases}$$

Dans le cas du potentiel ψ_3 la solution particulière est trouvée par la méthode des équations intégrales en utilisant la fonction de Green du problème linéaire sans vitesse d'avance (3). On rappelle ici la solution finale pour ψ_3^P qui satisfait donc la condition sur la surface libre non homogène (6) et la condition de la vitesse normale nulle pour $r = a$ et $z \in [-H, 0]$:

$$\begin{aligned} \psi_3^P = & \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \pi i C_0 f_0(z) H_m(k_0 r) \int_a^r [J_m(k_0 \rho) - Z_{m0} H_m(k_0 \rho)] Q_m(\rho) \rho d\rho \right. \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n f_n(z) K_m(k_n r) \int_a^r [I_m(k_n \rho) - Z_{mn} K_m(k_n \rho)] Q_m(\rho) \rho d\rho \\ & + \pi i C_0 f_0(z) [J_m(k_0 r) - Z_{m0} H_m(k_0 r)] \int_r^{\infty} H_m(k_0 \rho) Q_m(\rho) \rho d\rho \\ & \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} C_n f_n(z) [I_m(k_n r) - Z_{mn} K_m(k_n r)] \int_r^{\infty} K_m(k_n \rho) Q_m(\rho) \rho d\rho \right\} e^{im\theta} \quad (37) \end{aligned}$$

où le terme $Q_m(\rho)$ est obtenu après la transformation du Fourier du terme non homogène dans la condition de la surface libre (6) :

$$Q(r, \theta) = 2i \nabla_0 \bar{\phi} \nabla_0 \varphi - i \varphi \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Q_m(r) e^{im\theta} \quad (38)$$

Le cas de ψ_3 est particulièrement intéressant parce qu'il est très similaire aux problèmes de diffraction aux ordres supérieurs sans vitesse d'avance [7] et la même méthode peut

être utilisée.

Comme on l'a déjà précisé auparavant, dans le calcul des efforts constants de deuxième ordre on utilise seulement les parties propagatives des potentiels dans les expressions (9) et (10). Dans le cas des potentiels φ_D^{ex} , ψ_1^P , ψ_1^{ex} et ψ_3^{ex} ces parties propagatives sont faciles à identifier car elles sont tout simplement liées aux fonctions de Hankel $H_m(k_0 r)$. Du fait que la solution pour ψ_3^P est donnée sous forme d'intégrales sur la surface libre, il n'en va pas de même pour la partie propagative de ce potentiel et on doit prendre la limite d'expression (37) pour $r \rightarrow \infty$. On obtient :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi_3^P = \pi i C_0 f_0(z) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \{H_m(k_0 R) \int_a^{\infty} [J_m(k_0 \rho) - Z_{m0} H_m(k_0 \rho)] Q_m(\rho) \rho d\rho\} e^{im\theta} \quad (39)$$

et c'est donc cette expression pour ψ_3^P qu'il faut utiliser dans (10).

Les résultats numériques et discussions

La méthode de calcul à été validée par rapport aux résultats de Nossen et al. [10] qui avaient traité le même problème par une méthode purement numérique. Sur les figures 2 et 3 sont présentés leurs résultats pour l'effort de dérive et l'amortissement de dérive pour un cylindre tronqué avec un tirant d'eau $D = 3a$ dans une eau de profondeur infinie, et nos résultats pour la profondeur à $H = 10a$ (quelques essais qu'on a faits ont montré que le fait d'augmenter la profondeur au-delà de $H = 10a$ ne changeait pratiquement pas les résultats). Comme on peut le constater l'accord entre les résultats numériques est très bon et c'est seulement la formule simple de calcul de l'amortissement de dérive qui donne les résultats différents.

Dans le but d'étudier plus en détails la validité de la formule simple on choisit maintenant le cas d'une faible profondeur d'eau ce qui permet de réduire le nombre de termes évanescents, dans les expressions pour les potentiels, et d'augmenter ainsi la précision numérique. On choisit donc la profondeur $H = a$ et les résultats qui suivent sont pour ce cas. Sur les figures 4 et 5 on présente d'abord quelques résultats pour les efforts de premier ordre (7), pour différentes valeurs de tirant d'eau et différentes vitesses d'avance ($Fn = U/\sqrt{ga}$). On peut observer une grande influence du tirant d'eau sur les résultats.

On passe ensuite aux efforts constants de deuxième ordre. Sur la figure 6 sont présentés les résultats pour l'effort de dérive pour différentes valeurs de tirant d'eau et encore une fois on remarque grande influence sur les résultats du fait que le cylindre soit tronqué. Les figures 7 à 9 montrent les résultats correspondants pour l'amortissement de dérive qui a été calculé par l'expression (10) et par la formule simple (11). On voit qu'il existe un désaccord important entre les deux séries de résultats et on conclut que la formule simple n'est pas applicable pour le cas d'un cylindre tronqué. C'est un résultat qui confirme un peu la conclusion du travail [6] où le cas d'un cylindre libre en cavalement et embarquée a été traité et où il a été montré que la formule n'est pas valable non plus dans ce cas. Il semble donc que les modes évanescents qui sont présents dans les deux cas (et absents dans le cas de la diffraction par un cylindre complet, où la formule

est valable) ne sont pas pris en compte par la formule (11) et de ce fait la formule (malheureusement) n'est pas applicable pour un cas général.

Conclusions

On peut tirer de ce travail les conclusions suivantes :

1. Une méthode simple pour le problème de la diffraction-radiation avec petite vitesse d'avance pour un cylindre tronqué a été développée. La même méthode peut être utilisée dans le cas de la diffraction-radiation de deuxième ordre sans vitesse d'avance et plus généralement dans tous les cas où la condition de la surface libre est de la forme $-\alpha\phi + \partial\phi/\partial z = Q(r, \theta)$.
2. Plusieurs résultats du premier et du deuxième ordre ont été présentés et peuvent servir pour la validation des codes numériques.
3. Les résultats montrent que la formule simple du calcul de l'amortissement de dérive n'est pas valable dans un cas général de diffraction-radiation par un corps quelconque.

FIGURE 2. L'effort de dérive pour un cylindre de rayon a et de tirant d'eau $D = 3a$ dans l'eau de profondeur $H = 10a$. L'angle d'incidence est $\beta = 0$.

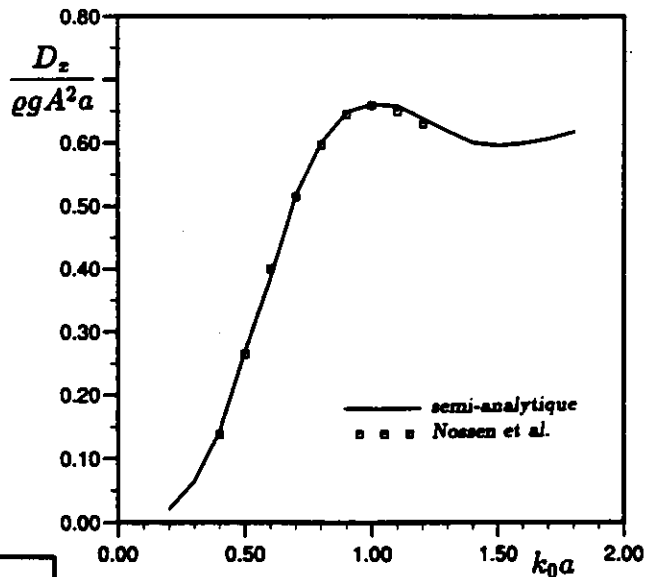
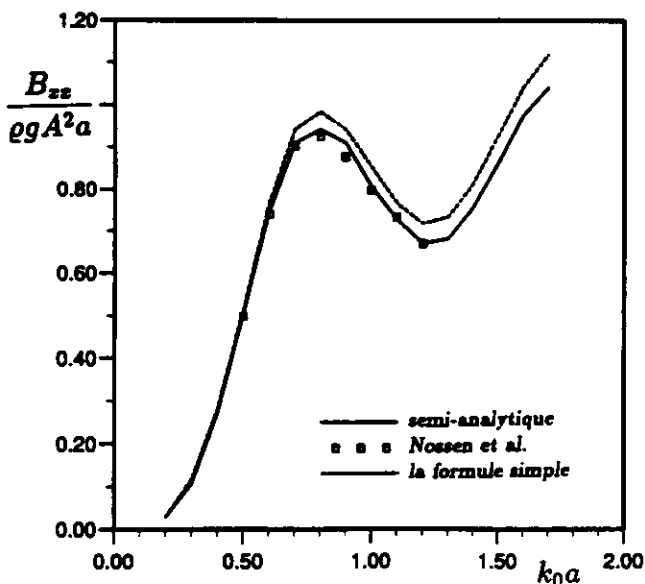


FIGURE 3. L'amortissement de dérive pour le cas de la figure 2.

FIGURE 4. L'effort de premier ordre dans la direction z , pour un cylindre de rayon a et de tirant d'eau $D = 0.4a$ dans l'eau de profondeur $H = a$. L'angle d'incidence est $\beta = 0$.

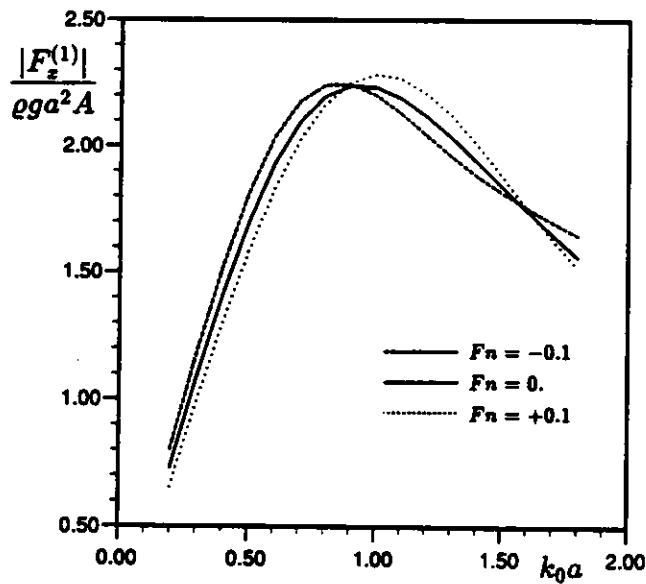
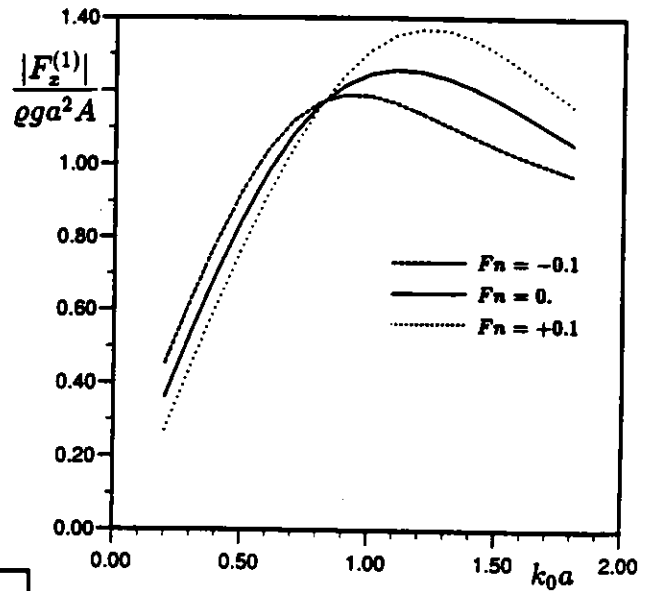


FIGURE 5. Même que la figure 4. pour $D = 0.7a$.

FIGURE 6. L'effort de dérive pour un cylindre de rayon a dans l'eau de profondeur $H = a$ et pour différents tirants d'eau. L'angle d'incidence est $\beta = 0$.

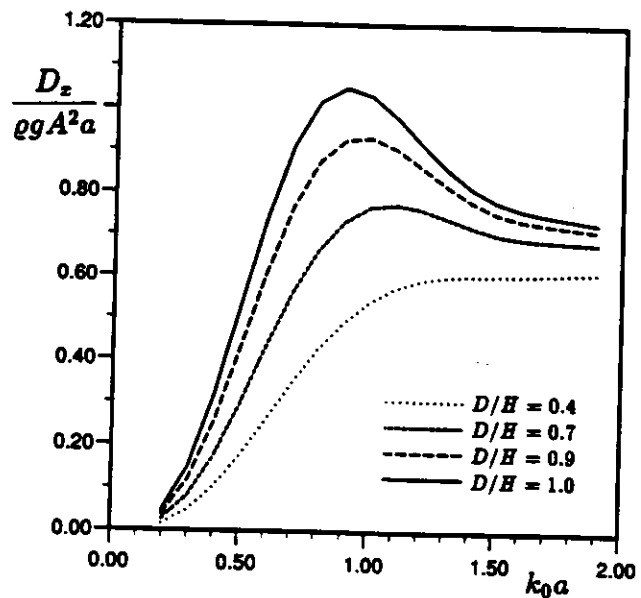


FIGURE 7. L'amortissement de dérive pour un cylindre de rayon a dans l'eau de profondeur $H = a$ et pour un tirant d'eau $D = 0.4a$. L'angle d'incidence est $\beta = 0$.

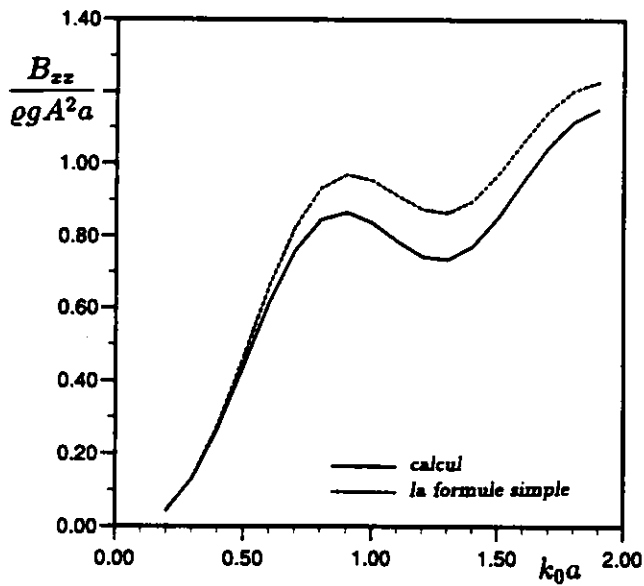
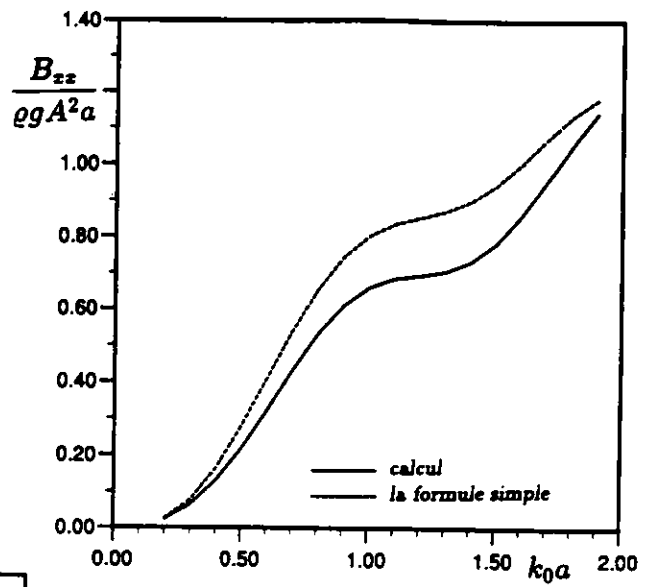
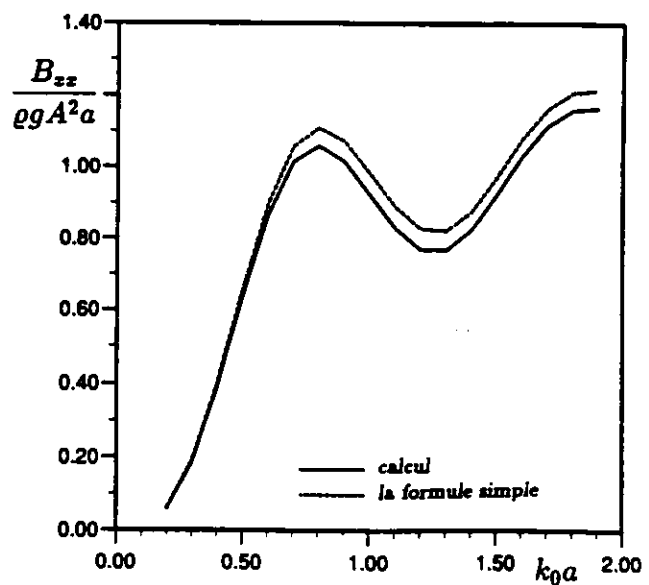


FIGURE 8. Même que la figure 7. pour $D = 0.7a$.

FIGURE 9. Même que la figure 7. pour $D = 0.9a$.



Références

1. CHAU F.P. & EATOCK TAYLOR R., 1992. : "Second order wave diffraction by a vertical cylinder", J.Fluid Mech., Vol.240, pp. 571-599.
2. CHEN X.B. : "Analytic evaluation of the second order loads upon a tension leg platform column", raport IFP 38739. 1991.
3. CLARK P.J., Š.MALENICA & B.MOLIN : "An heuristic approach to wave drift damping", Appl. Ocean Res., Vol.15. 1993.
4. EMMERHOFF O.J. & P.D.SCLAVOUNOS : "The slow drift motion of arrays of vertical cylindres", J. Fluid Mech., Vol.242, pp. 31-50, 1992.
5. GARRETT C.J.R. : "Waves forces on a circular dock", J. Fluid Mech. Vol. 46, pp. 129-139, 1971.
6. MALENICA Š., P.J.CLARK & B.MOLIN, 1994. : "Wave and current forces on a vertical cylinder free to surge and sway", soumis à Appl. Ocean Res.
7. MALENICA Š., 1994. : "Diffraction de troisieme ordre et interaction houle courant pour un cylindre vertical en profondeur finie", Thèse de Doctorat de l'Université Paris VI.
8. MATSUI T., L.S.YEOB & S.KIMITOSHI : "Hydrodynamic forces on a vertical cylinder in current and waves", J.of the Soc. of Naval Arch. of Japan, Vol. 170, pp.277-287, 1991.
9. MOLIN B., 1993. : "Hydrodynamique des Structures Offshore", Scripta des cours de l'Ecole Centrale de Nantes.
10. NOSSEN J., J.GRUE & E.PALM : "Wave forces on three-dimensional floating bodies with small forward speed", J. Fluid Mech., Vol.227, pp. 135-160, 1991.

