

LES EFFORTS DE TROISIEME ORDRE SUR UNE CARENE RECTANGULAIRE

P.J. Clark
Heriot-Watt University,
Edinburgh, U.K.

Résumé

La découverte, dans l'été 1992 du phénomène de 'ringing' aux structures destinées à la mer du Nord profonde, a stimulé la recherche sur les harmoniques des efforts de hautes fréquences. Dans le domaine fréquentiel, la théorie de Stokes a été utilisée par Molin et Malenica pour résoudre le problème dans le cas des cylindres verticaux. On étudie ici les efforts de troisième ordre d'une houle régulière, incidente sur une carène rectangulaire fixe, reposant sur une mer de profondeur faible. On utilise une solution basée sur les fonctions propres, suivant la méthode proposée par Sulisz pour le problème de second ordre. Les progrès vers une solution complète sont bloqués par des problèmes de convergence des séries pour le champ de vitesses au deuxième ordre, apparemment à cause des singularités dans le problème aux limites de deuxième ordre.

Summary

Interest in the calculation of the high-frequency harmonics of the wave forces on fixed and floating structures was stimulated by the discovery, in the summer of 1992, of 'ringing' excitation on deep-water structures intended for the North Sea. In the frequency domain, Stokes' diffraction theory has been extended by Molin and Malenica to determine the ringing excitation suffered by vertical cylinders. A similar approach is taken in this work, which concerns a restrained rectangular barge. A regular sea is incident onto the beam, and the barge floats in finite depth water. The solution is found in terms of an eigenfunction expansion, similar to that used by Sulisz to obtain the complete solution to the second-order diffraction problem. Progress towards a solution is hampered by poor convergence of the second-order velocity field, caused apparently by singularities in the boundary value problem.

1.0 INTRODUCTION

Les études des effets de diffraction non-linéaire sur les structures offshore ont une longue histoire, inspirée durant les années 1980 par le développement et l'installation de plateformes de production en mer profonde, comme les plateformes à lignes tendues (P.L.T). En particulier, les efforts de haute fréquence qui se produisent dans les mers irrégulières, qui sont responsables des mouvements de 'springing' d'une P.L.T, ont posé le problème de la longévité des lignes. Un autre phénomène d'onde non-linéaire, le 'ringing' (folle-cloche), est apparu pendant l'été 1992 à la suite de tests sur les 'monotower' de Draugen. Ce sont des plateformes à base de gravité, prévues pour les zones de mer profonde en Mer du Nord, formées d'un pont principal supporté par une longue colonne verticale, qui est approximativement un cylindre circulaire. Le 'ringing' est associé au mode fondamental de vibration en flexion, causé par des vagues incidentes très cambrées, et attribué à des fréquences plusieurs fois plus grandes que les fréquences contenues dans le spectre de la mer. Une solution pour le champ de diffraction de troisième ordre d'un cylindre circulaire vertical a été présentée par Malenica et Molin¹(et avec un traitement plus détaillé, par Malenica²). Les efforts de troisième ordre peuvent être obtenus en utilisant une méthode créée par Molin pour résoudre le problème de deuxième ordre correspondant³. Cette méthode, parfois appelée la méthode étendue de Haskind, implique l'évaluation d'une intégrale oscillatoire compliquée sur la totalité de la surface libre; cependant, les difficultés de calcul ne doivent pas être sous-estimées. Conjointement aux recherches théoriques sur le 'ringing', des programmes d'essais expérimentaux sont en cours, mais le déficit actuel réside dans le perfectionnement des instruments de mesure des efforts de haute-fréquence.

Ces considérations ont inspirés le travail présenté ici. Nous proposons de revenir à une configuration plus simple, et de calculer les efforts de troisième ordre sur une carène rectangulaire de longueur infinie, dans une mer de profondeur moyenne. Les vagues sont incidentes au côté gauche, et la carène est contrainte à l'immobilité. Tous les effets visqueux ont été ignorés et le fluide est supposé parfait de façon à ce que le comportement du fluide puisse être décrit en utilisant un potentiel des vitesses. Sous ces hypothèses, la méthode des fonctions propres introduite par Takano⁴ peut être appliquée à ce problème. La démonstration par Sulisz et Johansson^{5,6} que le problème de second ordre peut être complètement résolu analytiquement en utilisant les mêmes fonctions propres rend cette méthode particulièrement attractive. Drimer et Agnon⁷ ont étudié les efforts basse fréquence de second ordre sur une carène, à l'aide du développement de Sulisz. La même méthode peut être appliquée au troisième ordre. Donc il devrait être possible d'étudier deux points en détail. D'abord, les efforts de troisième ordre peuvent être obtenus par une méthode analytique, par intégration directe de la pression sur une surface mouillée, et ceci peut être comparé aux prédictions des efforts de la méthode étendue de Haskind, qui est une méthode numérique de calibration. Ensuite, les mesures des efforts sur une carène rectangulaire dans un canal sont bien moins chères que des tests complets sur des corps tri-dimensionnels. De tels tests peuvent être utilisés en conjonction avec les prédictions théoriques des efforts, pour vérifier les mesures des efforts du spectre.

Le problème de carène rectangulaire, étudié par Takano, a reçu une grande attention dans la littérature. La méthode des fonctions propres converge lentement, à cause des singularités aux régions immergées de la carène, et parce qu'il y a parfois une forte différence de l'ampleur du champ de vagues de chaque côté de la carène. La méthode de Takano a été améliorée par Mei et Black⁸, en utilisant la méthode variationnelle de Swinger. Ceci implique la décomposition du potentiel en parties symétrique et anti-symétrique, qui sont découplées et résolues séparément. L'approche variationnelle a été réinterprétée de façon élégante par McIver⁹ dans une étude sur des ponts flottants, sur le lac Washington aux Etats-Unis. Une formulation équivalente a été mise en place par Molin et Betous¹⁰, au moyen d'ingénieuses manipulations de matrices. La méthode de McIver a été utilisée dans le présent travail.

Deux objections peuvent être faites sur le programme suggéré ici. Il y a une petite mais non négligeable couverture de vortex sur les coins immergés de la carène, mais son influence a été ignorée. En second lieu, le problème des ondes de troisième ordre de Stokes est une perturbation singulière, qui ne peut être correctement résolu qu'en perturbant le nombre d'onde associé aux ondes linéaires. Dans une étude initiale, il est nécessaire de mettre ces considérations de côté, mais il sera possible de faire des améliorations dans le futur.

2.0 THEORIE

La configuration consiste en une carène flottante de section transversale rectangulaire, contrainte à l'immobilité, les vagues étant incidentes au côté gauche. Ainsi, le problème des valeurs limites réside dans un domaine fluide de deux dimensions, bordé par le plan d'eau à $z = 0$, un fond marin imperméable et horizontal à $z = -d$, et une coque rectangulaire imperméable. La carène a un tirant d'eau h et une largeur $2a$. L'origine est fixée à la ligne centrale de la carène, voir la figure 1.

Les ondes incidentes sont monochromatiques, avec une fréquence ω et une amplitude d'onde A ; l'accélération

due à la gravité est notée g . Prenons $\nu = \omega^2/g$, et définissons un paramètre de perturbation non-dimensionnel $\varepsilon = \nu A$. La condition frontière est non-linéaire et est résolue en développant le potentiel dans une série de perturbation de Stokes:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon \Phi^{(1)}(t) + \varepsilon^2 \Phi^{(2)}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon^3 \Phi^{(3)}(\mathbf{r}, t), \\ &= \text{Re} \left\{ \varepsilon \bar{A} \phi^{(1)} e^{-i\omega t} + \varepsilon^2 (|\bar{A}| \phi^{(2,0)} + \bar{A} \phi^{(2)} e^{-i2\omega t}) + \varepsilon^3 \bar{A} (\phi^{(3,1)} e^{-i\omega t} + \phi^{(3)} e^{-i3\omega t}) \right\},\end{aligned}$$

où la valeur complexe du potentiel $\phi^{(n)}(\mathbf{r})$ à chaque ordre n est normalisée avec $\bar{A} = -i\omega/\nu^2$.

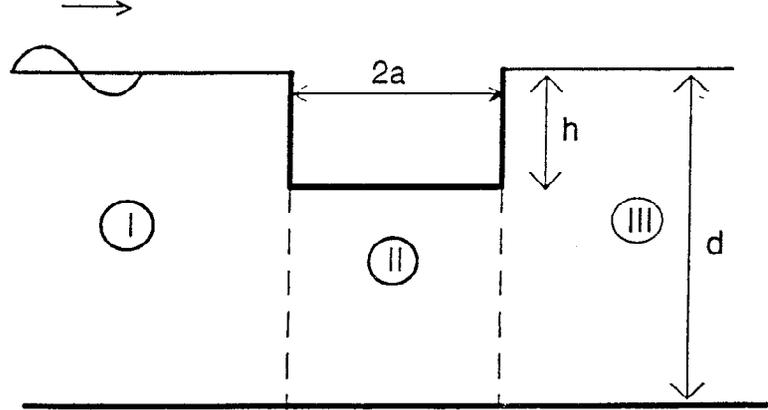


Figure 1. Configuration de la carène.

2.2 Problème aux limites

Les potentiels satisfont l'équation de Laplace, $\nabla^2 \Phi^{(n)} = 0$, avec les conditions cinématiques sur les surfaces contenant le fluide. Sur la surface libre, l'expansion de la perturbation de Stokes donne un ensemble équivalent de conditions limites sur le plan d'eau S_0 à $z = 0$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z} &= -2 \nabla \Phi^{(1)} \cdot \nabla \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} + \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} \left(\frac{\partial^3 \Phi^{(1)}}{\partial z \partial t^2} + g \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \Phi^{(3)}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi^{(3)}}{\partial z} &= -2 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi^{(1)} \cdot \nabla \Phi^{(2)}) - \frac{1}{2} (\nabla \Phi^{(1)} \cdot \nabla) (\nabla \Phi^{(1)})^2 \\ &\quad + \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} \left(\frac{\partial^3 \Phi^{(2)}}{\partial z \partial t^2} + g \frac{\partial^2 \Phi^{(2)}}{\partial z^2} + 2 \nabla \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z} \cdot \nabla \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} + 2 \nabla \Phi^{(1)} \cdot \nabla \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z \partial t} \right) \\ &\quad + \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial t} + \frac{(\nabla \Phi^{(1)})^2}{2} - \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z \partial t} \right) \left(\frac{\partial^3 \Phi^{(1)}}{\partial z \partial t^2} + g \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial z^2} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2g^2} \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} \right)^2 \left(\frac{\partial^4 \Phi^{(1)}}{\partial z^2 \partial t^2} + g \frac{\partial^3 \Phi^{(1)}}{\partial z^3} \right).\end{aligned}$$

Le domaine fluide est décomposé en trois régions: (I) la région gauche de la carène exposée aux intempéries; (II) la région verticalement en-dessous de la carène; (III) la région abritée à droite de la

carène. L'onde incidente en (I) est notée ϕ_I et l'onde réfléchie correspondante ϕ_R ; le potentiel gouvernant l'agitation du fluide en région (II) est noté φ ; et enfin, le potentiel de l'onde transmise en région (III) est noté ϕ_T . Les ondes réfléchie et transmise ont l'ensemble nombre d'onde $\{\kappa_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ satisfaisant:

$$\nu = \frac{\omega^2}{g} = -\kappa_n \tan \kappa_n d,$$

avec le nombre d'onde incident $k = i\kappa_0$. Les potentiels dans les régions (I) et (III) peuvent être écrits:

$$\begin{aligned} (I) \quad \phi_I + \phi_R &= \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} e^{ikx} + \sum_{\ell=0}^{\infty} R_{\ell} \frac{\cos \kappa_{\ell}(z+d)}{\cos \kappa_{\ell}d} e^{\kappa_{\ell}(x+a)} \\ &= \sum_{\ell=-1}^{\infty} R_{\ell} \frac{\cos \kappa_{\ell}(z+d)}{\cos \kappa_{\ell}d} e^{\kappa_{\ell}(x+a)}, \\ (III) \quad \phi_T &= \sum_{\ell=0}^{\infty} T_{\ell} \frac{\cos \kappa_{\ell}(z+d)}{\cos \kappa_{\ell}d} e^{-\kappa_{\ell}(x-a)}, \end{aligned}$$

où l'onde incidente est absorbée dans la somme des coefficients de réflexion, en définissant $R_{-1} = e^{-ik a}$, et $\kappa_{-1} = ik$. Les conditions cinématiques de non-flux sur les côtés de la coque $-h < z < 0$ sont exprimées:

$$\begin{aligned} \text{at } x = -a, \quad \frac{\partial \phi_R}{\partial x} &= -\frac{\partial \phi_I}{\partial x}, \\ \text{at } x = a, \quad \frac{\partial \phi_T}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Les conditions de compatibilité en $-d < z < -h$ entre les régions (I) et (II), et (II) et (III) sont respectivement:

$$\begin{aligned} \text{at } x = -a, \quad \phi_I + \phi_R &= \varphi, \quad \frac{\partial}{\partial x}(\phi_I + \phi_R) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \text{at } x = a, \quad \varphi &= \phi_T, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \phi_T}{\partial x}. \end{aligned}$$

Les ondes transmise et réfléchie satisfont les conditions de radiation:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\partial \phi_R}{\partial x} + ik\phi_R = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial \phi_T}{\partial x} - ik\phi_T = 0.$$

Des conditions similaires sont satisfaites par les ondes libres de deuxième et troisième ordre.

La méthode pour trouver les coefficients de réflexion et de transmission (R_{ℓ}, T_{ℓ}) est expliquée en détail dans la section 3.

2.3 Le problème de la diffraction de deuxième-ordre

Le potentiel de deuxième-ordre peut être interprété, selon Molin³, comme étant fait de composantes *phase liée* et *phase libre*, respectivement $\phi_L^{(2)}$ et $\phi_F^{(2)}$. L'onde de phase libre satisfait la condition limite de surface libre homogène et dépend du nombre d'onde μ_j donné par

$$\mu_j \tan \mu_j d + 4\nu = 0.$$

Les composantes des ondes phase-liée et phase-libre dans les régions (I) et (III) sont donnés par

$$\begin{aligned}
\text{For } x \leq -a, \quad \phi_L^{(2)} &= \sum_{j=-1}^{\infty} \sum_{\ell=-1}^j \varepsilon_{j-\ell} L_{j\ell}^{(2)} R_j R_\ell \frac{\cos(\kappa_j + \kappa_\ell)(z+d)}{\cos(\kappa_j + \kappa_\ell)d} e^{(\kappa_j + \kappa_\ell)(x-a)}, \\
\phi_F^{(2)} &= \sum_{j=0}^{\infty} R_j^{(2)} \frac{\cos \mu_j(z+d)}{\cos \mu_j d} e^{\mu_j(x-a)}, \\
\text{for } x \geq a, \quad \phi_L^{(2)} &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^j \varepsilon_{j-\ell} L_{j\ell}^{(2)} T_j T_\ell \frac{\cos(\kappa_j + \kappa_\ell)(z+d)}{\cos(\kappa_j + \kappa_\ell)d} e^{-(\kappa_j + \kappa_\ell)(x-b)}, \\
\phi_F^{(2)} &= \sum_{j=0}^{\infty} T_j^{(2)} \frac{\cos \mu_j(z+d)}{\cos \mu_j d} e^{-\mu_j(x-b)}.
\end{aligned}$$

Comme expliqué par Sulisz^{5,6}, les coefficients $L_{j\ell}^{(2)}$ sont obtenus comme des solutions particulières des conditions de surface libre

$$\frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial z} - 4\nu \phi^{(2)} = \frac{1}{2\nu} \left[3\nu^2 (\phi^{(1)})^2 - \phi^{(1)} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} + 2 \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 \right].$$

En substituant dans les expressions pour les potentiels de premier-ordre, nous obtenons

$$L_{j\ell}^{(2)} = \frac{(\kappa_j \kappa_\ell - \nu^2) (6\nu^2 + \kappa_j^2 + \kappa_\ell^2 + 4\kappa_j \kappa_\ell)}{4\nu^2 [(\kappa_j - \kappa_\ell)^2 + 4\nu^2]}.$$

Les coefficients $R_j^{(2)}$ et $T_j^{(2)}$ sont trouvés d'une façon très proche de celle de leur contreparties de premier-ordre, en se rappelant que les conditions frontières sur les côtés de la coque et les conditions de compatibilité en-dessous de la coque incluent des contributions d'ondes de phase-liée.

2.4 Problème de diffraction de troisième-ordre: contribution des hautes fréquences

Le problème de troisième-ordre comprend deux parties. Une composante haute-fréquence, qui bat à la fréquence 3ω , et une composante basse-fréquence qui bat à la fréquence ω . Ce dernier est lié de façon harmonique aux ondes de premier-ordre. Pour éviter un problème de sécularité dans la solution complète, il est nécessaire d'absorber les termes de troisième-ordre de basse fréquence dans une solution perturbée de premier-ordre. Cela a certaines conséquences, par exemple la célérité de vague devient faiblement dépendante de l'amplitude de la vague. Cependant, l'intérêt est dans la composante de troisième-ordre de haute fréquence, et l'approche pratique de Molin et Malenica est utilisée ici: ils déclarent que la composante haute-fréquence n'est pas beaucoup influencée par la perturbation de la solution de premier-ordre, ce qui signifie que le problème de troisième ordre peut être résolu sans cette perturbation du nombre d'onde.

Décomposons le potentiel de troisième-ordre haute-fréquence $\phi^{(3)}$ en composantes phase-liée, phase-libre comme précédemment. Les ondes de phase-libre satisfont une condition limite homogène de surface libre, et dépendent du nombre d'onde ϖ_j donné par

$$\varpi_j \tan \varpi_j d + 9\nu = 0.$$

Les ondes de phase-liée sont les solutions particulières, satisfaisant la condition non-homogène de surface libre, qui peut être aussi divisée en trois parties:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi^{(3)}}{\partial z} - 9\nu \phi^{(3)} &= \alpha_1^{(3)} + \alpha_2^{(3)} + \alpha_3^{(3)}, \\
\alpha_1^{(3)} &= \frac{1}{2\nu} \left[42\nu^2 \phi^{(1)} \phi_F^{(2)} - 2\phi_F^{(2)} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} - \phi^{(1)} \frac{\partial^2 \phi_F^{(2)}}{\partial z^2} + 6 \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \phi_F^{(2)}}{\partial x} \right], \\
\alpha_2^{(3)} &= \frac{1}{2\nu} \left[42\nu^2 \phi^{(1)} \phi_L^{(2)} - 2\phi_L^{(2)} \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} - \phi^{(1)} \frac{\partial^2 \phi_L^{(2)}}{\partial z^2} + 6 \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \phi_L^{(2)}}{\partial x} \right], \\
\alpha_3^{(3)} &= \frac{1}{8\nu^3} \left[63\nu^4 (\phi^{(1)})^3 - 13\nu^2 (\phi^{(1)})^2 \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial x} \right)^2 \left(53\nu^2 \phi^{(1)} - \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial x^2} \right) \right],
\end{aligned}$$

Ainsi, décomposons les ondes phase-liées de troisième-ordre en $\phi_{L1}^{(3)}$, $\phi_{L2}^{(3)}$ et $\phi_{L3}^{(3)}$, dépendant des fonctions $\alpha_1^{(3)}$, $\alpha_2^{(3)}$, $\alpha_3^{(3)}$. Les solutions particulières prennent la forme:

$$\begin{aligned}
\phi_{L1}^{(3)} &= \sum_{j=-1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} L_{1j\ell}^{(3)} R_j R_\ell^{(2)} \frac{\cos(\kappa_j + \mu_\ell)(z+d)}{\cos(\kappa_j + \mu_\ell)d} e^{(\kappa_j + \mu_\ell)(x+a)}, \\
\phi_{L2}^{(3)} &= \sum_{j=-1}^{\infty} \sum_{k=-1}^j \sum_{\ell=-1}^k \varepsilon_{j-k} \varepsilon_{k-\ell} L_{2j k \ell}^{(3)} R_j R_k R_\ell \frac{\cos(\kappa_j + \kappa_k + \kappa_\ell)(z+d)}{\cos(\kappa_j + \kappa_k + \kappa_\ell)d} e^{(\kappa_j + \kappa_k + \kappa_\ell)(x+a)}, \\
\phi_{L3}^{(3)} &= \sum_{j=-1}^{\infty} \sum_{k=-1}^j \sum_{\ell=-1}^k \varepsilon_{j-k} \varepsilon_{k-\ell} L_{3j k \ell}^{(3)} R_j R_k R_\ell \frac{\cos(\kappa_j + \kappa_k + \kappa_\ell)(z+d)}{\cos(\kappa_j + \kappa_k + \kappa_\ell)d} e^{(\kappa_j + \kappa_k + \kappa_\ell)(x+a)},
\end{aligned}$$

En substituant les potentiels de premier et deuxième ordre dans les expressions ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned}
L_{1j\ell}^{(3)} &= \frac{(\kappa_j \mu_\ell - 4\nu^2)(42\nu^2 + 2\kappa_j^2 + \mu_\ell^2 + 6\kappa_j \mu_\ell)}{2\nu^2[(2\kappa_j - \mu_\ell)^2 + 36\nu^2]}, \\
L_{2j k \ell}^{(3)} &= \frac{K_{j k \ell}}{6\nu^2} \{ 126\nu^2 + L_{k\ell}^{(2)} \{ 2\kappa_j^2 + (\kappa_k + \kappa_\ell)(6\kappa_j + \kappa_k + \kappa_\ell) \} \\
&\quad + L_{\ell j}^{(2)} \{ 2\kappa_k^2 + (\kappa_\ell + \kappa_j)(6\kappa_k + \kappa_\ell + \kappa_j) \} \\
&\quad + L_{jk}^{(2)} \{ 2\kappa_\ell^2 + (\kappa_j + \kappa_k)(6\kappa_\ell + \kappa_j + \kappa_k) \} \} \\
L_{3j k \ell}^{(3)} &= \frac{K_{j k \ell}}{24\nu^4} (189\nu^4 + 13\nu^2(\kappa_j^2 + \kappa_k^2 + \kappa_\ell^2) + 53\nu^2(\kappa_j \kappa_k + \kappa_k \kappa_\ell + \kappa_\ell \kappa_j) \\
&\quad + 3\kappa_j \kappa_k \kappa_\ell (\kappa_j + \kappa_k + \kappa_\ell)), \\
K_{j k \ell} &= \frac{(\kappa_j \kappa_k \kappa_\ell - \nu^2(\kappa_j + \kappa_k + \kappa_\ell))}{\kappa_j(\kappa_k - \kappa_\ell)^2 + \kappa_k(\kappa_\ell - \kappa_j)^2 + \kappa_\ell(\kappa_j - \kappa_k)^2 + 8\nu^2(\kappa_j + \kappa_k + \kappa_\ell)}
\end{aligned}$$

Les composantes de phase-libre prennent la forme, pour $x < -a$

$$\phi_F^{(3)} = \sum_{j=0}^{\infty} R_j^{(3)} \frac{\cos \varpi_j(z+d)}{\cos \varpi_j d} e^{\varpi_j(x+a)},$$

avec des expressions similaires pour $x > a$.

3.0 METHODE DE MCIVER

Nous adoptons ici la formulation de la méthode variationnelle par McIver. La méthode de McIver commence par séparer le problème des valeurs limites en ses parties symétrique et anti-symétrique, par

rapport à la ligne centrale de la carène. Ceci est obtenu en plaçant une image du potentiel d'onde transmise dans le domaine fluide occupé par les ondes incidentes et réfléchies en mettant les coordonnées $(x, z) \rightarrow (-x, z), \forall x > 0$. Ainsi, notant le potentiel symétrique par l'indice S et le potentiel anti-symétrique par l'indice A , le potentiel dans une mer ouverte $|x| > a$ est donné par:

$$\begin{aligned}\phi_S(x, z) &= \frac{\phi_R(x, z) + \phi_I(x, z) + \phi_T(-x, z)}{2}, \\ \phi_A(x, z) &= \frac{\phi_R(x, z) + \phi_I(x, z) - \phi_T(-x, z)}{2}.\end{aligned}$$

Donc, les conditions limites sur le plan de la mer S_0 et les conditions de radiation ne sont pas affectées par la transformation. Les potentiels ϕ_S et ϕ_A dans la mer ouverte sont donnés par

$$\phi_{S,A} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (C_{\ell}^{(S,A)} e^{\kappa_{\ell}(x+a)} + \delta_{0\ell} C_{\ell} e^{-\kappa_{\ell}(x+a)}) \frac{\cos \kappa_{\ell}(z+d)}{\cos \kappa_{\ell} d},$$

où $C_I = e^{-ika}/2$ est le coefficient de l'onde incidente, et δ_{mn} est le delta de Kronecker, $\delta_{mm} = 1$, et $\delta_{mn} = 0, m \neq n$.

Les potentiels sous la coque, $|x| < a$, peuvent être décomposés en parties symétrique et anti-symétrique. Le potentiel symétrique φ_S a une vitesse horizontale de zéro à la ligne centrale, tandis que le potentiel φ_A est à zéro tout au long de la ligne:

$$\frac{\partial \varphi^{(S)}}{\partial x} = 0, \quad \varphi^{(A)} = 0 \quad \text{at } x = 0, \quad -d < z < -h.$$

Ainsi, ces potentiels peuvent être écrits:

$$\begin{aligned}\varphi_S(x, z) &= B_0^{(S)} + \sum_{j=1}^{\infty} B_j^{(S)} \frac{\cosh \lambda_j x}{\cosh \lambda_j a} \cos \lambda_j (z+d), \\ \varphi_A(x, z) &= B_0^{(A)} \left(\frac{x}{a} \right) + \sum_{j=1}^{\infty} B_j^{(A)} \frac{\sinh \lambda_j x}{\sinh \lambda_j a} \cos \lambda_j (z+d),\end{aligned}$$

où les fonctions propres λ_j ne changent pas entre les différents ordres aux problèmes limites, et sont définis comme:

$$\lambda_j = \frac{j\pi}{d-h}.$$

Les conditions de compatibilité à $x = -a$ donnent les relations suivantes, liant ϕ_S et ϕ_A , à φ_S et φ_A :

$$\begin{aligned}\phi_{S,A}(-a, z) &= \varphi_{S,A}, \quad \text{over } -d \leq z \leq -h, \\ \frac{\partial \phi_{S,A}}{\partial x}(-a, z) &= \frac{\partial \varphi_{S,A}}{\partial x}, \quad \text{over } -d \leq z \leq -h, \\ \frac{\partial \phi_{S,A}}{\partial x}(-a, z) &= 0, \quad \text{over } -h < z \leq 0.\end{aligned}$$

La méthode sera expliquée en détail pour le potentiel symétrique de premier ordre et les modifications nécessaires pour les autres cas seront indiquées.

Un ensemble d'équations linéaires pour les coefficients $C_{\ell}^{(S)}$ est dérivé par la procédure suivante en deux étapes, à $x = -a$. De la première condition de compatibilité

$$\frac{1}{d-h} \int_{-d}^{-h} \varphi_S \cos \lambda_m(z+d) dz = \frac{1}{d-h} \int_{-d}^{-h} \phi_S \cos \lambda_m(z+d) dz, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

cela donne

$$B_m^{(S)} = \epsilon_m \sum_{\ell=0}^{\infty} (C_\ell^{(S)} + \delta_{0\ell} C_I) J(\lambda_m, \kappa_\ell),$$

où ϵ_m est le symbole de Neumann, égal à 1 pour $m = 0$, et à 2 dans les autres cas, et les coefficients $J(\lambda_j, \kappa_\ell)$ sont les intégrands

$$\begin{aligned} J(\lambda_m, \kappa_\ell) &= \frac{1}{d-h} \int_{-d}^{-h} \frac{\cos \kappa_\ell(z+d)}{\cos \kappa_\ell d} \cos \lambda_m(z+d) dz \\ &= \frac{(-1)^m \kappa_\ell \sin \kappa_\ell(d-h)}{\kappa_\ell^2 - \lambda_m^2 (d-h) \cos \kappa_\ell d}, \end{aligned}$$

En faisant l'égalité des vitesses horizontales à $x = -a$, on obtient le second ensemble d'équations

$$\frac{1}{d-h} \int_{-d}^0 \frac{\partial \phi_S}{\partial x} \frac{\cos \kappa_j(z+d)}{\cos \kappa_j d} dz = \frac{1}{d-h} \int_{-d}^{-h} \frac{\partial \varphi_S}{\partial x} \frac{\cos \kappa_j(z+d)}{\cos \kappa_j d} dz \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

qui donne

$$\kappa_j I(\kappa_j) (C_j^{(S)} - \delta_{0j} C_I) = - \sum_{m=1}^{\infty} B_m^{(S)} \lambda_m \tanh(\lambda_m a) J(\lambda_m, \kappa_j)$$

où $I(\kappa_j)$ est l'intégrand

$$\begin{aligned} I(\kappa_j) &= \frac{1}{d-h} \int_{-d}^0 \frac{\cos \kappa_\ell(z+d)}{\cos \kappa_\ell d} \frac{\cos \kappa_j(z+d)}{\cos \kappa_j d} dz \\ &= \frac{\tan \kappa_j d}{2\kappa_j(d-h)} \left[1 + \frac{2\kappa_j d}{\sin 2\kappa_j d} \right]. \end{aligned}$$

enfin, une équation matricielle pour $C_\ell^{(S)}$ est obtenue en substituant pour $B_m^{(S)}$

$$\kappa_j I(\kappa_j) C_j^{(S)} + \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell^{(S)} A^{(S)}(\kappa_j, \kappa_\ell) = -(\kappa_j I(\kappa_j) \delta_{j0} + A^{(S)}(\kappa_j, \kappa_0)) C_I,$$

et les coefficients de matrice sont

$$A^{(S)}(\kappa_j, \kappa_\ell) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \tanh(\lambda_m a) J(\lambda_m, \kappa_j) J(\lambda_m, \kappa_\ell).$$

Une équation matricielle similaire est trouvée pour les coefficients $C_\ell^{(A)}$ dans laquelle les coefficients de matrice sont:

$$A^{(A)}(\kappa_j, \kappa_\ell) = \frac{J(0, \kappa_j) J(0, \kappa_\ell)}{a} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \coth(\lambda_m a) J(\lambda_m, \kappa_j) J(\lambda_m, \kappa_\ell).$$

La partie antisymétrique du potentiel sous la coque est obtenue en utilisant

$$B_m^{(A)} = -\epsilon_m \sum_{\ell=0}^{\infty} (C_{\ell}^{(A)} + \delta_{0\ell} C_I) J(\lambda_m, \kappa_{\ell}).$$

Une fois que le problèmes aux limites pour ϕ_S et ϕ_A a été résolu, les potentiels d'onde libres sont obtenus d'après

$$\begin{aligned} \phi_R(x, z) &= \frac{\phi_S(x, z) + \phi_A(x, z)}{2} - \phi_I(x, z), \\ \phi_T(x, z) &= \frac{\phi_S(-x, z) - \phi_A(-x, z)}{2}. \end{aligned}$$

Les coefficients de réflexion et transmission sont

$$R_{\ell} = C_{\ell}^{(S)} + C_{\ell}^{(A)}, \quad T_{\ell} = C_{\ell}^{(S)} - C_{\ell}^{(A)}.$$

La même approche est utilisée pour résoudre les problèmes au deuxième et troisième ordre, la principale différence étant que le traitement du vecteur de droite inclut l'effet des ondes liées. Le potentiel d'onde incidente est considéré comme une onde liée et il n'y a pas de composantes d'onde libre appartenant à l'onde incidente de deuxième et troisième ordre. Ainsi C_I est ignoré dans les développements suivants. Pour que l'onde transmise prenne la même tranche de sommation, on définit $T_{-1} = 0$.

3.1 Deuxième ordre

On comprend que l'onde libre, à chaque ordre dans l'expansion de perturbation, est associée à un ensemble unique de coefficients $B_m^{(S,A)}$ et $C_{\ell}^{(S,A)}$, mais pour simplifier la présentation, l'exposant indiquant l'ordre d'approximation est ignoré. Donc, l'équation matricielle de second ordre pour les coefficients $C_n^{(S)}$ est:

$$\mu_n I(\mu_n) C_n^{(S)} + \sum_{\ell=0}^{\infty} C_{\ell}^{(S)} A^{(S)}(\mu_n, \mu_{\ell}) = b_n^{(S)}$$

où les coefficients matriciels $A^{(S)}(\mu_n, \mu_{\ell})$ sont définis comme pour le problème de premier-ordre, mais avec le nombre d'onde de deuxième ordre μ_n , remplaçant le κ_n du premier-ordre. Le vecteur du côté droit est

$$b_n^{(S)} = - \sum_{\ell=-1}^{\infty} \sum_{j=-1}^{\ell} \epsilon_{j-\ell} L_j^{(2)} \left(\frac{R_j R_{\ell} + T_j T_{\ell}}{2} \right) \left[(\kappa_j + \kappa_{\ell}) G(\mu_n, \kappa_j + \kappa_{\ell}) + A^{(S)}(\mu_n, \kappa_j + \kappa_{\ell}) \right],$$

où $G(\mu, \kappa)$ est l'intégrand

$$\begin{aligned} G(\mu, \kappa) &= \frac{1}{d-h} \int_{-d}^0 \frac{\cos \mu(z+d)}{\cos \mu d} \frac{\cos \kappa(z+d)}{\cos \kappa d} dz, \\ &= \frac{\mu \tan \mu d - \kappa \tan \kappa d}{(\mu^2 - \kappa^2)(d-h)}. \end{aligned}$$

Les coefficients $B_m^{(S)}$ sont obtenus de

$$B_m^{(S)} = \epsilon_m \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell^{(S)} J(\lambda_m, \mu_\ell) + \epsilon_m \sum_{\ell=-1}^{\infty} \sum_{j=-1}^{\ell} \epsilon_{j-\ell} L_{j\ell}^{(2)} \left(\frac{R_j R_\ell + T_j T_\ell}{2} \right) J(\lambda_m, \kappa_j + \kappa_\ell).$$

Les expressions correspondantes pour les parties anti-symétriques sont

$$b_n^{(A)} = - \sum_{\ell=-1}^{\infty} \sum_{j=-1}^{\ell} \epsilon_{j-\ell} L_{j\ell}^{(2)} \left(\frac{R_j R_\ell - T_j T_\ell}{2} \right) \left[(\kappa_j + \kappa_\ell) G(\mu_n, \kappa_j + \kappa_\ell) + A^{(A)}(\mu_n, \kappa_j + \kappa_\ell) \right],$$

et

$$B_m^{(A)} = -\epsilon_m \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell^{(A)} J(\lambda_m, \mu_\ell) - \epsilon_m \sum_{\ell=-1}^{\infty} \sum_{j=-1}^{\ell} \epsilon_{j-\ell} L_{j\ell}^{(2)} \left(\frac{R_j R_\ell - T_j T_\ell}{2} \right) J(\lambda_m, \kappa_j + \kappa_\ell).$$

Au troisième ordre les équations sont similaires, avec les vecteurs $\{b_n^{(3)}\}$ un peu plus compliqués.

4.0 DISCUSSION

Le programme présenté dans la section précédente n'a pas donné entière satisfaction et quelques obstacles sont encore à franchir. La solution de 1er ordre a été vérifiée d'après les résultats de Mei et Black⁸. Ensuite, un cas a été sélectionné avec des paramètres $ka = 1$, $h/a = 0.75$ et $d/a = 2$. L'ampleur de la pression de 1er ordre autour de la coque est montrée dans la figure 2, où la pression est normalisée en respect de $\rho g A$. Les ondes sont incidentes de la gauche, et on peut observer qu'un clapotis est établi sur le côté gauche. Une petite onde transmise est aussi observée. Les lignes de pression constantes sous la coque sont presque verticales.

L'équation matricielle est formée en tronquant les sommations d'après la nombre de coefficients N . Les conseils de McIver⁹ sont suivis, et $N = 24$ est suffisant pour résoudre le problème de 1er ordre. Ces solutions satisfont les relations, $|R_0|^2 + |T_0|^2 = 1$ et $R_0 T_0^* + R_0^* T_0 = 0$, où * indique le complexe conjugué. Les résultats ont été trouvés avec un logiciel MATLAB par MathWorks sur un PC, et les calculs ont été limités jusqu'à présent à $N = 50$.

Au deuxième ordre, le potentiel lié $\phi_L^{(2)}$ donne le champ de pression présenté dans la figure 3, avec $N = 36$. Evidemment il y a des problèmes sur les lignes de compatibilités à $x = \pm a$, et en particulier au coin de la carène et sur le fond à $x = -a$. En fait le potentiel sous la carène n'est pas correct. En cherchant les raisons, on commence avec le potentiel lié $\phi_L^{(2)}$ et les vitesses horizontales sur la ligne $x = -a$, $-d \leq z \leq 0$. Les parties réelles sont montrées dans la figure 4 (les parties imaginaires sont similaires). On remarque le comportement du fluide à la surface libre, au coin, et sur le fond. Le champ de vitesse à la surface libre est dominant. En fait il paraît singulier, parce que, avec la condition limite à $z = 0$, on a

$$\frac{\partial^2 \phi^{(2)}}{\partial x \partial z} - 4\nu \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial x} = 0, \quad \text{à } x = \pm a,$$

mais, en substituant l'expression pour $\phi_L^{(2)}$ dans la formule ci-dessus, on n'obtient pas zéro. En plus, on trouve que l'ampleur de la vitesse horizontale augmente avec le nombre de coefficients N utilisés dans le calcul.

Près du coin, le potentiel de premier ordre se comporte comme $O(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_c|^{2/3})$, où \mathbf{r}_c identifie le coin. Donc, il n'est pas surprenant d'y trouver un changement de vitesse important. Cependant, le potentiel lié est la conséquence des effets non-linéaires à la surface libre, et il n'est pas influencé directement par l'action du fluide sur le corps. Quand on augmente le nombre de coefficients N , la vitesse horizontale au coin devient moins significative en comparaison de celle de la surface libre.

Malgré le courant horizontal sous la carène du premier ordre, il est surprenant de trouver un courant fort sur le fond produit par le potentiel lié. Dans les régions éloignées du corps, il n'y a pas un tel courant. On constate que la série de Fourier pour le potentiel lié sous la carène est fortement perturbée par les conditions aux limites à $z = -d$ et $z = -h$.

Les ondes liées de 2me ordre impliquent les produits de paires de coefficients de réflexion et de transmission. L'ampleur de ces coefficients diminue: par exemple $|R_{12}|^2 = 1.11 \times 10^{-5}$, et $|R_{24}|^2 = 6.91 \times 10^{-7}$. Les coefficients de réflexion et de transmission sont présentés par rapport aux fonctions propres κ_j , dans la figure 5, et on remarque l'échelle logarithmique. Les ondes liées dépendent aussi des coefficients $L_{j\ell}^{(2)}$ (et au 3me ordre de $L_{1,jk\ell}^{(3)}$, $L_{2,jk\ell}^{(3)}$ et $L_{3,jk\ell}^{(3)}$), qui augmentent très rapidement. Les coefficients sur la diagonale $L_{jj}^{(2)}$ et $L_{jjj}^{(3)}$ sont illustrés dans la figure 6. Le problème de convergence des séries pour les ondes liées est indiqué dans la figure 7, qui montre les coefficients de réflexion carrés, et l'ampleur des produits des coefficients de réflexions carrés et les coefficients $L_{jj}^{(2)}$. On voit que l'augmentation de $L^{(2)}$ est approximativement contrebalancée par la diminution des coefficients de réflexions, et numériquement les valeurs pour $\phi_L^{(2)}$ sont raisonnables. Mais on doute que la vitesse du fluide correspondante est valable, avec les conséquences graves pour la méthode présentée dans cet article.

Sulisz et Johansson⁵, et Drimer et Agnon⁷ présentent les résultats pour le deuxième ordre, et des comparaisons avec la pression mesurée au fond de la coque. Ils considèrent les cas avec un petit espace entre la carène et le fond. La différence entre les méthodes réside dans la façon de traiter le potentiel sous la carène. Sulisz et Johansson supposent que le potentiel est donné sous la forme $A + Bx$, une supposition soutenue par la figure 2. Drimer et Agnon utilisent la méthode de Rankine avec un interpolation linéaire sur les facettes. Apparemment les deux méthodes ne sont pas sensibles aux effets au coin et au fond. Les calculs de Drimer et Agnon sont faits avec $N \leq 15$, ce qui ne donne pas des vitesses horizontales élevées de $\phi_L^{(2)}$. Cependant, les deux méthodes donnent des résultats satisfaisants.

Sulisz⁶ utilise une méthode plus précise, et similaire à la méthode présentée ci-dessus. Il constate que les efforts de deuxième ordre oscillent avec le nombre de coefficients $N (> 20)$, autour d'une asymptote, ce qui lui permet d'obtenir ses résultats.

Enfin, sans des calculs satisfaisants pour le deuxième ordre il n'est pas possible d'avancer vers le troisième ordre. En conclusion, le travail est en cours.

REFERENCES

- [1] Š. Malenica et B. Molin, 'Third order triple frequency forces on fixed vertical cylinders', *9th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Kyushu, Japon, 1993*.
- [2] Š. Malenica, 'Diffraction de troisième ordre et interaction houle-courant pour un cylindre vertical en profondeur finie', *Doctorat de l'Université Paris VI, 1994*.
- [3] B. Molin, 'Second order diffraction loads upon three dimensional bodies', *Applied Ocean Research*, **1**, 197-202, 1979.
- [4] K. Takano, 'Effets d'un obstacle parallélépipédique sur la propagation de la houle', *La Houille Blanche*, **15**, 247-259, 1960.
- [5] W. Sulisz et M. Johansson, 'Second-order wave loading on a horizontal rectangular cylinder of substantial draft', *Applied Ocean Research*, **14**, 333-340, 1992.
- [6] W. Sulisz, 'Diffraction of second-order surface waves by semi-submerged horizontal rectangular cylinder', *J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, A.S.C.E.*, **119**, 160-171, 1993.
- [7] N. Drimer et Y. Agnon, 'A hybrid boundary element method for second-order wave-body interaction', *Applied Ocean Research*, **16**, 27-45, 1994.
- [8] C.C. Mei et J.L. Black, 'Scattering of surface waves by rectangular obstacles in waters of finite depth', *J. Fluid Mechanics*, **38**, 499-511, 1969.
- [9] P. McIver, 'Wave forces on adjacent floating bridges', *Applied Ocean Research*, **8**, 67-75, 1984.
- [10] B. Molin et P. Betous, 'Atténuation de la houle par une dalle horizontale immergée et perforée', *4e Journées de l'Hydrodynamique, 1,2,3 mars 1993, Nantes*.

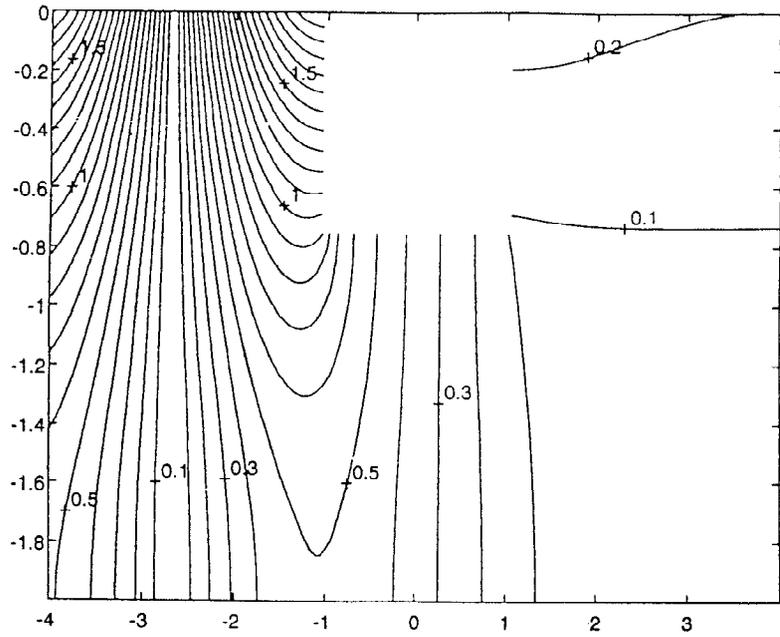


Figure 2. Pression absolue de 1er ordre, $|p^{(1)}|/\rho g A$ autour de la carène, $ka = 1, d/a = 2, h/a = 0.75$, ondes arrivant de la gauche.

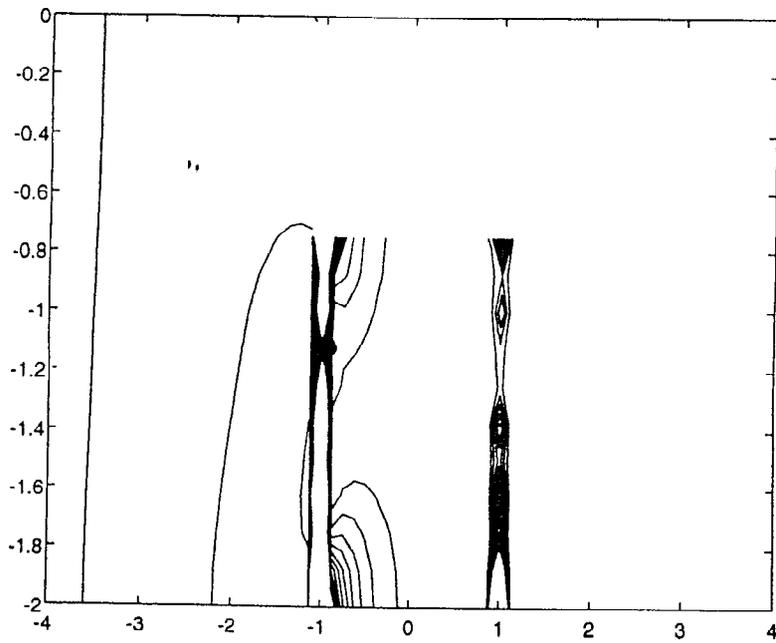


Figure 3. Pression absolue de 2me ordre des ondes liées, $|p_L^{(2)}|/2\rho g \nu A^2$, calculé par la methode originale, $ka = 1, d/a = 2, h/a = 0.75$.

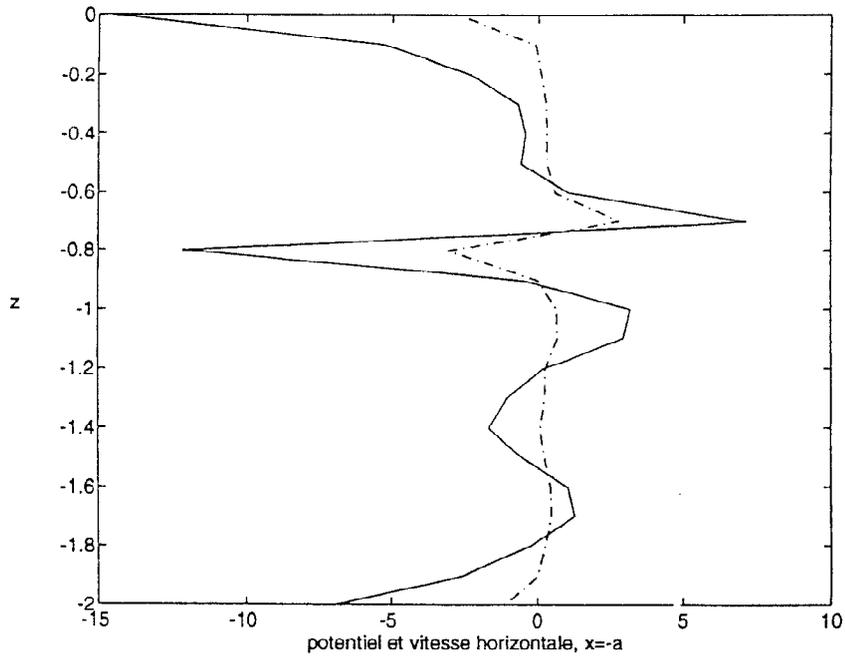


Figure 4. Les parties réelles du potentiel et de la vitesse horizontale (κ_{10}^{-}) des ondes liées de 2^{me} ordre, sur la ligne $x = -a$, $-d \leq z \leq 0$. $N = 24$ et $ka = 1, d/a = 2, h/a = 0.75$.

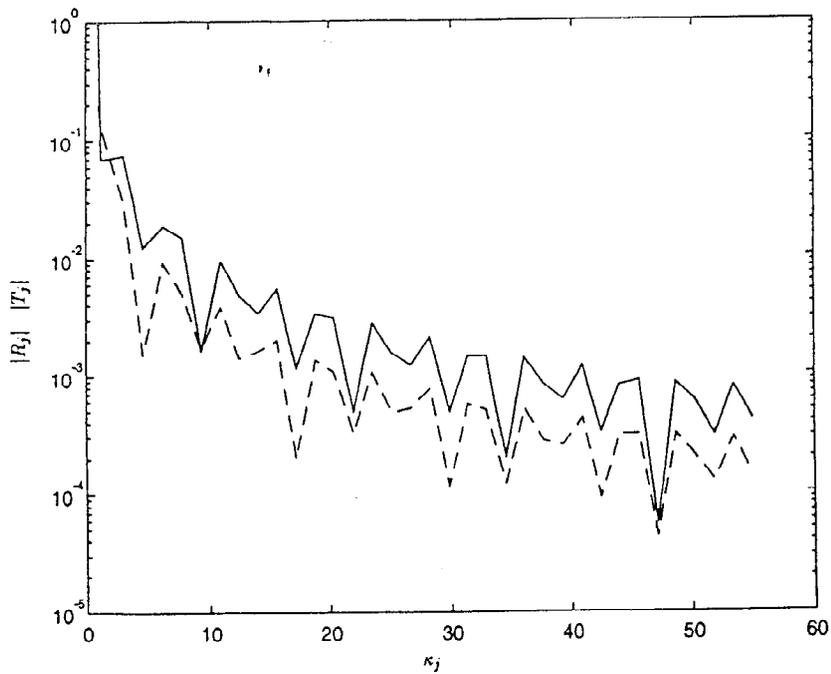


Figure 5. L'amplitude des coefficients de réflexion $|R_j|$, '—', et de transmission $|T_j|$, '- -', par rapport aux fonctions propres κ_j , pour $ka = 1, d/a = 2, h/a = 0.75$.

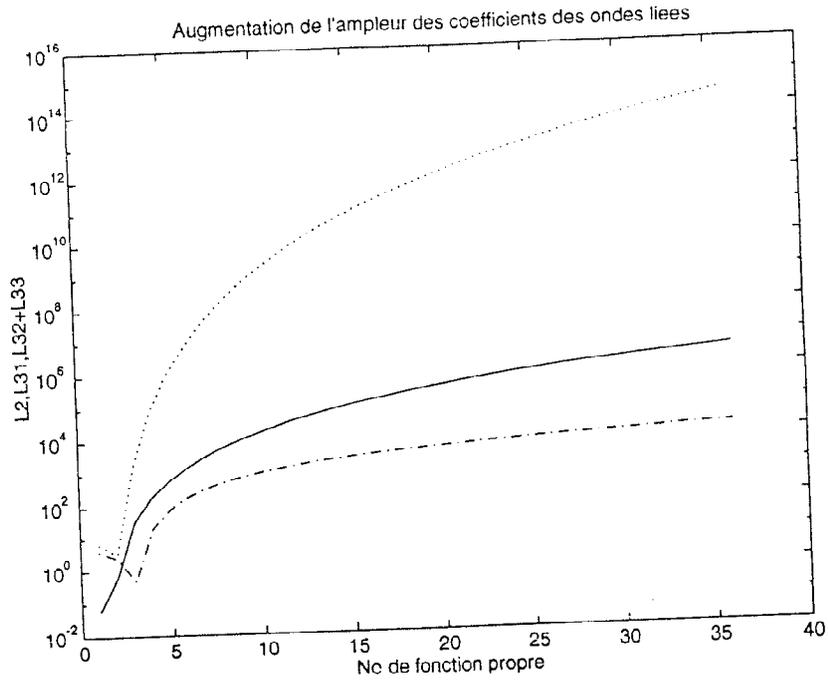


Figure 6. L'ampleur des coefficients des ondes liées $|L_{jj}^{(2)}|$, '—', $|L_{1jj}^{(3)}|$, '---', et $|L_{2jj}^{(3)} + L_{3jj}^{(3)}|$, '· · ·', par rapport à j , pour $ka = 1, d/a = 2, h/a = 0.75$.

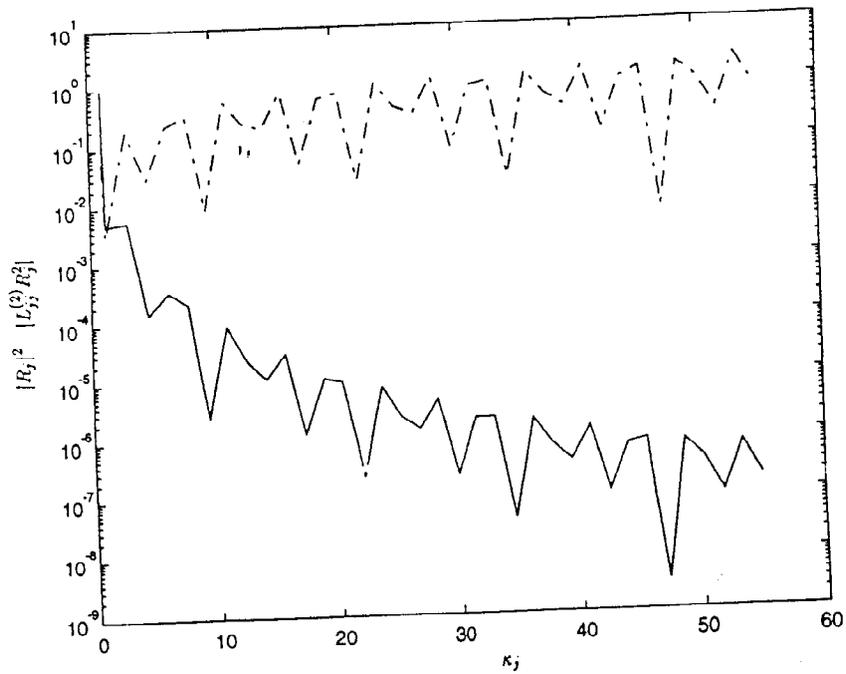


Figure 7. L'ampleur des coefficients de réflexion carré $|R_j^2|$, '—', et $|L_{jj}^{(2)} R_j^2|$, '---', par rapport aux fonctions propres κ_j , pour $ka = 1, d/a = 2, h/a = 0.75$.