



5^e JOURNÉES DE L'HYDRODYNAMIQUE

22, 23, 24 mars 1995 – ROUEN

**IDENTIFICATION DE LA FONCTION DE GREEN DE
L'HYDRODYNAMIQUE TRANSITOIRE PAR DES MODÈLES CONTINUS**

A.CLEMENT

**ECOLE CENTRALE DE NANTES
Laboratoire de Mécanique des Fluides (URA CNRS 1217)
Division Hydrodynamique Navale
1, Rue de la Noë - 44300**

Résumé

La fonction de Green de l'hydrodynamique transitoire est considérée comme un système à une entrée (débit de la source) et une sortie (potentiel au point champ), linéaire par construction, et invariant en temps. Dans le travail présenté, nous décrivons deux approches de l'identification de ce système par des modèles paramétriques continus. La première, utilisant une méthode de Prony améliorée et des modèles stationnaires, donne d'excellents résultats quand les points sont assez proches, mais conduit, dans certaines configurations géométriques, à des systèmes d'ordre trop élevé pour être pratiquement utilisables. La seconde, fondée sur le choix de modèles non-stationnaires, permet l'identification de la fonction de Green dans toutes les configurations sans dépasser l'ordre 4. Ce résultat permet le calcul de la fonction par intégration d'équations différentielles ordinaires. Par contre, la non-stationnarité ne nous a pas encore permis de faire disparaître totalement les intégrales de convolution du second membre des équations différentielles, ce qui reste l'objectif final de ces travaux.

Summary

The transient hydrodynamics Kelvin Green's function is considered as a single input (source strength) - single output (potential at field point) system which is time invariant and linear by nature. In this paper we describe two attempts of identifying this system by continuous parametric models. The former, based on time invariant models and using an improved Prony's method, gives pretty good results when source and field points are not too horizontally distant from each other, but leads to unreasonable model orders in other geometric configurations. The latter using time-varying models, allows to identify the function by a fourth order model in the whole domain of the geometric parameter. This result constitutes an alternative method for the computation of the transient Green function by integrating ordinary differential equations. Nevertheless, the time-varying character of these models do not permit the cancellation of all the convolution integrals in the RHS of the ODEs, as it would be the case with time invariant models.

1 - INTRODUCTION

La résolution du problème de la tenue à la mer dans le cadre de la théorie des écoulements de fluides parfaits à surface libre est traditionnellement menée dans le domaine des fréquences, c'est à dire en supposant que l'écoulement est établi depuis un temps infini et que son potentiel est harmonique en temps et monochromatique. Cette modélisation requiert la linéarisation des conditions aux limites de l'écoulement: conditions de surface libre et condition de glissement sur la carène. Sous ces conditions, on recherche un potentiel scalaire à laplacien nul dans le domaine fluide, satisfaisant des conditions aux limites de Neumann sur la carène, une condition de Robin-Fourier sur le plan moyen de la surface libre, et des conditions de radiation à l'infini.

Depuis le début des années 80 (Adashi & Ohmatsu - 1980, Jami - 1981), la résolution numérique de ce problème est également abordée dans le domaine du temps, soit par des méthodes de singularités de Rankine avec pour objectif la résolution du problème non-linéaire, soit par des méthodes de singularités de Kelvin. Dans ce dernier cas, après discrétisation des équations intégrales en potentiel, on est amené à résoudre numériquement un système linéaire dont le premier membre est invariant en temps (grâce à l'invariance de la géométrie du domaine), et dont le second membre est donné, à chaque pas de temps, par des intégrales de convolution de la forme (3) ci-dessous faisant intervenir toute l'histoire de l'écoulement depuis le repos initial. Dans le bilan des temps de calcul, l'évaluation de ces intégrales par des méthodes classiques représente de 80% à 95% du temps total dans une application sur un cas réaliste (Magee 1991). Ceci est dû à la complexité de la fonction de Green du problème instationnaire qui intervient dans le noyau de ces intégrales et qui doit être évaluée par des développements asymptotiques ou des séries (Jami -1981, Newman 1985, Liapis 1986, King 1987).

Un premier gain important a été obtenu par l'introduction de la technique de tabulation-interpolation (Ferrant 1988, Beck & Magee 1989) qui évite le calcul en ligne de la fonction en le remplaçant par une lecture dans une table à double entrée. Une seconde méthode (Clément & Foulhoux 1991, Clément 1992), encore plus prometteuse sur le plan du temps de calcul, consisterait à remplacer le calcul des convolutions par la simulation d'un jeu d'équations différentielles représentant la dynamique de chaque élément du second membre. On éviterait ainsi à la fois le calcul des fonction de Green et le calcul des intégrales elles-mêmes.

Les formulations de la fonction de Green du problème instationnaire en profondeur infinie, définie ici comme le potentiel des vitesses créé à l'instant T au point $M(X, Y, Z)$ du domaine fluide ($Z \leq 0$) par une source de débit impulsif à l'instant T' au point M' appartenant lui aussi à ce domaine, sont établies depuis longtemps (Brard 1948, Finkelstein 1957, Wehausen 1960). On a:

$$G(M', T', M, T) = \delta(T - T')G_0(M', M) + H(T - T')F(M', T', M, T) \quad (1, a)$$

avec:
$$G_0(M', M) = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \right) \quad (1, b)$$

et:
$$F(M', T', M, T) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty J_0(Kr) e^{K(Z+Z')} \sqrt{K} \sin[\sqrt{K}(T - T')] dK \quad (1, c)$$

où H est l'échelon de Heaviside, et J_0 , la fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéro.

Le point M'_1 est le symétrique de la source par rapport au plan de la surface libre moyenne ($Z=0$) (cf. Fig.1), et r la distance horizontale entre la source et le point influencé. On a noté:

$$r = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2} ; R = \sqrt{r^2 + (Z - Z')^2} ; R_1 = \sqrt{r^2 + (Z + Z')^2} ; \cos \theta = -\frac{Z + Z'}{R_1} \quad (2)$$

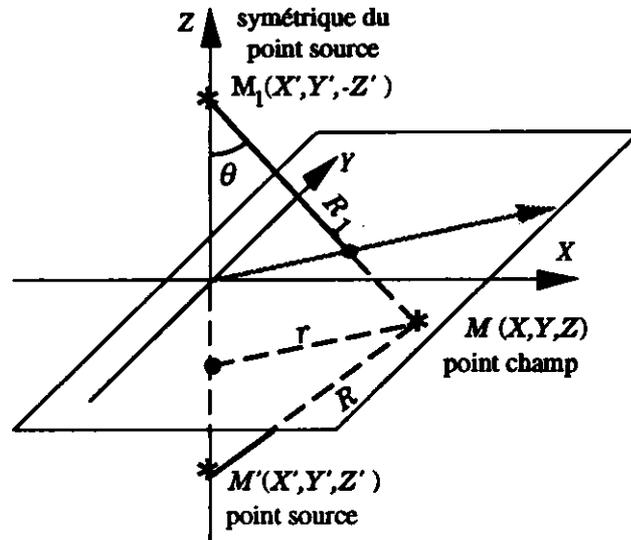
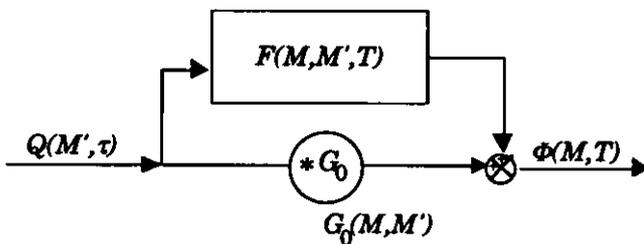


Fig.1: Fonction de Green - notations

Le calcul du potentiel au point $M(X, Y, Z)$, quand le débit n'est plus impulsionnel, mais une fonction $Q(\tau, z \geq 0)$, s'obtient alors selon la règle de Duhamel, par l'intégrale de convolution:

$$\Phi(M, T) = Q(T)G_0(M, M') + \int_0^T Q(\tau)F(M, M', T - \tau)d\tau \quad (3)$$

Dans la mise en œuvre d'une méthode intégrale pour la résolution dans le domaine du temps d'un problème de tenue à la mer, on aura également besoin du gradient de cette fonction. Dans la présente communication, nous ne nous intéresserons qu'à la fonction de Green, sachant que les méthodes présentées s'appliqueront de la même manière au gradient de F . Le calcul du premier terme du membre de droite de (3), réponse "instantanée" correspondant au terme impulsionnel de (1,a), ne pose pas de problème particulier et ne sera pas étudié ici plus avant. On ne s'intéressera qu'à la partie "mémoire" représentée par l'intégrale de convolution.



En fait, le transfert entre le signal : débit en M' en fonction du temps, et le signal : potentiel en M en fonction du temps, est un système linéaire¹ invariant en temps dont on connaît un modèle dit: *non paramétrique* exact par (3) et (1), et que l'on peut représenter par le schéma-blocs Fig.2 ci-contre.

Fig.2: représentation par schéma-blocs du système à identifier

L'identification de la fonction de Green consiste à rechercher un modèle paramétrique (*i.e.*: une équation différentielle ordinaire en temps) ayant les mêmes caractéristiques dynamiques que la branche supérieure F du schéma bloc, c'est à dire donnant la même réponse ("*sortie*") $\Phi(T)$ pour la même excitation ("*entrée*") $Q(T)$ pour deux points M et M' donnés. On se fixera a priori pour l'identification : un critère de précision, et un domaine de fréquence ou de temps selon que l'on travaillera dans l'un ou l'autre de ces deux espaces qui se correspondent par transformation de Fourier. Nous travaillerons ici dans le domaine du temps.

On dira d'un modèle paramétrique qu'il est stationnaire si les équations différentielles qui le caractérisent sont à coefficients constants (en temps), et non-stationnaires dans le cas

¹ au sens de la théorie des systèmes, et non de l'analyse numérique.

contraire. Le système à identifier ici est invariant en temps en ce sens que le potentiel au point champ ne dépend que de l'âge de la perturbation au point source et non pas de la date à laquelle on l'observe. Il n'empêche qu'il peut être décrit soit par un modèle stationnaire, soit par un modèle non-stationnaire. Prenons l'exemple élémentaire d'un système dont la réponse impulsionnelle serait donnée par: $h(T) = T \exp(-T)$. On vérifie très aisément qu'il vérifie à la fois l'équation différentielle ordinaire (ODE) à coefficients constants: $\ddot{h} + 2\dot{h} + h = 0$ (modèle stationnaire), et l'ODE à coefficients variables: $T\dot{h} + (T-1)h = 0$ (modèle non-stationnaire).

Enfin, on parlera de modèle discret si on se place en aval de la discrétisation des dérivées temporelles par des schémas aux différences, ou de modèles continus si l'on conserve les dérivées formelles. L'approche par modèle continu, si elle est possible, est plus forte en ce sens qu'on pourra déduire d'un modèle continu autant de modèles discrets que de schémas de discrétisation des dérivées temporelles, et qu'au point de vue de la simulation qui est le nôtre, elle permettra d'adopter éventuellement un algorithme à pas de temps variable, ce que ne permet pas, par définition, un modèle discret qui repose a priori sur un échantillonnage à pas de temps constant.

Une première étude (Clément 1992) nous avait permis de tester un modèle discret stationnaire (ARX) pour cette fonction de Green. Nous nous sommes orientés depuis vers les modèles continus, profitant du fait que nous avons la connaissance exacte (*i.e.*: non-bruitée) du système par l'intermédiaire d'une formulation analytique (1c) dont nous avons pu tirer profit par des études asymptotiques.

2 _ UN MODÈLE CONTINU STATIONNAIRE

2 - 1: Les deux variables de la partie mémoire de G .

Il est aisé de montrer que la partie mémoire F (1c) de la fonction de Green en profondeur infinie se ramène, par un changement de variable à:

$$F(X', Y', Z', T', X, Y, Z, T) = -\frac{R_1^{-3/2}}{2\pi} \tilde{F}(\mu, \tau) \quad (4)$$

, avec :

$$\tilde{F}(\mu, \tau) = \int_0^{\infty} J_0(\lambda \sqrt{1-\mu^2}) e^{-\lambda \mu} \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} \tau) d\lambda \quad (5)$$

où on a posé :

$$\begin{aligned} \mu &= \cos \theta & \Rightarrow & 0 \leq \mu \leq 1 \\ \tau &= \frac{T - T'}{\sqrt{R_1}} \end{aligned} \quad (6)$$

La variable géométrique μ étant égale au cosinus de l'angle θ (cf Fig.1), elle évoluera dans un intervalle borné : $0 \leq \mu \leq 1$ avec $\mu=0$ dans le cas limite où le point source et le point champ sont simultanément sur la surface libre, et $\mu=1$ quand le point champ est à la verticale du point source. La variable temporelle τ est dans $[0, +\infty[$. Néanmoins, les simulations numériques de réponses impulsionnelles dans des cas concrets tels qu'une plate-forme offshore (Ferrant 1988)) ont montré que ce paramètre adimensionnel ne dépassait que très rarement la valeur 30 que nous avons choisie comme borne supérieure dans la présente étude.

La figure 3 ci-dessous, montre la fonction \tilde{F} dans le plan de ces deux variables (μ, τ) . La ligne noire indique le lieu des zéros de la fonction. On s'aperçoit que, sauf pour μ strictement nul, \tilde{F} a toujours un nombre fini de zéros. quand τ augmente à μ fixé. On voit de plus que la fonction tend vers 0 pour $\tau \rightarrow \infty$, sauf pour μ strictement nul, puisqu'au voisinage de cette valeur, le développement asymptotique présente un facteur en $\exp(-\mu\tau^2/4)$ qui assurera la régularité.

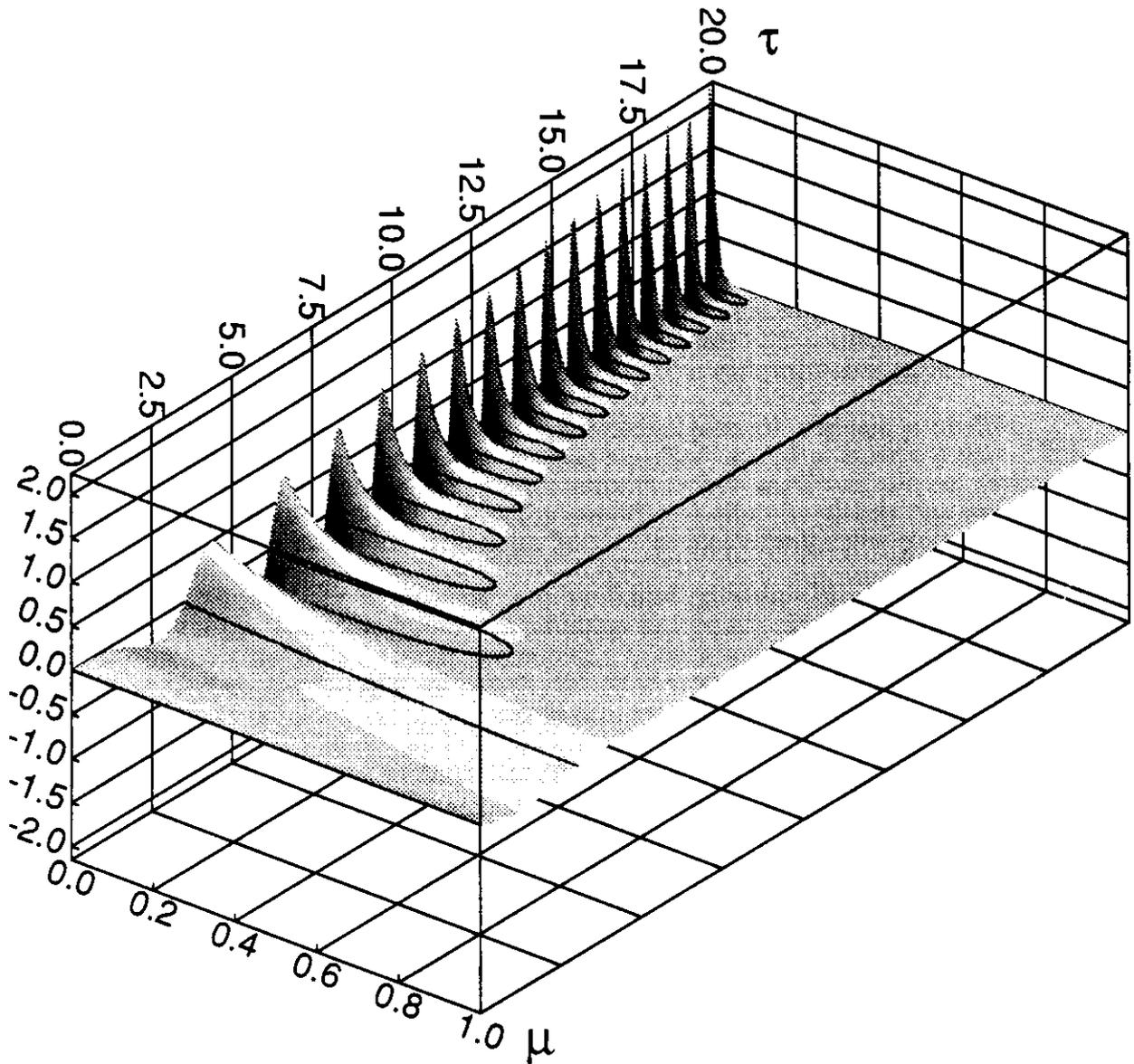


Fig 4. la fonction \tilde{F} dans le plan de ces deux variables (μ, τ)

2 - 2: Identification par la méthode de Prony.

Pour chaque couple de points fixes (M, M') donné, ce qui sera le cas dans les applications envisagées, la variable géométrique μ est constante. C'est la courbe $\tilde{F}(\mu, \tau)$ ainsi définie qui représente la réponse impulsionnelle que l'on doit identifier. Ce travail devra donc être fait pour toutes les valeurs de μ entre 0 et 1; mais une fois seulement, au même titre que la méthode de tabulation citée plus haut.

Pour identifier $\tilde{F}(\mu, \tau)$ à μ constant, nous allons utiliser une vieille méthode (Prony 1795!) qui consiste à approcher une fonction $y(\tau)$ sur un intervalle donné, par une somme d'exponentielles à coefficients complexes : $\hat{y}(\tau)$ sous la forme:

$$\hat{y}(\tau) = \sum_{m=1}^M (r_m + is_m) \exp[(p_m + iq_m)\tau] \quad (7)$$

La fonction à approximer étant réelle, cette somme sera nécessairement composée de paires de fonctions exponentielles conjuguées, ou de fonctions exponentielles réelles ($s_m = q_m = 0$) que nous appellerons respectivement : *raies* complexes ou *raies* réelles. Si une telle décomposition (7) est possible pour $\tilde{F}(\mu, \tau)$ à μ constant sur l'intervalle d'étude choisi $0 < \tau < 30$, alors le problème de l'identification est résolu puisque chaque raie est solution d'une équation différentielle élémentaire du second ordre (raie complexe), ou du premier ordre (raie réelle) à coefficients constants.

Le système à identifier (Fig.2) peut donc, si c'est le cas, être considéré comme un ensemble de sous-systèmes du premier ou du deuxième ordre mis en parallèle, et on en déduira alors immédiatement un modèle continu stationnaire, c'est à dire un système d'équations différentielles permettant de simuler le potentiel $\Phi(M, T)$ à partir de l'entrée $Q(M', T)$ sans calculer l'intégrale de convolution de (3).

Cette approche a été développée pour le traitement du signal dans les années 80. Dès 1975, Van Blaricum et Mitra l'utilisent pour identifier des systèmes électroniques à partir de réponses transitoires. Pour l'identification de signaux bruités, Kumaresan et Tufts (1982) proposent une amélioration de la méthode utilisant la décomposition en valeurs singulières (SVD) afin de pouvoir discriminer les "vraies" raies, de celles induites par le bruit.

Pour l'approximation de fonctions (*i.e.*: de signaux non bruités), Daubisse (1981) développe un algorithme utilisant la méthode de Householder et l'applique aux calculs de fonctions de Green de l'hydrodynamique en domaine fréquentiel. Il introduit ensuite (Daubisse 1984) la décomposition en valeur singulières dans les algorithmes de lissage basés sur la méthode de Prony qui se décompose en trois étapes:

La fonction à identifier $y=f(\tau)$ est connue en $N+1$ points équidistants (τ_n, y_n) $n=0, \dots, N$; $\tau_n = \tau_0 + nh$ sur l'intervalle d'analyse $[\tau_0, \tau_N]$. en posant :

$$\begin{aligned} \lambda_m &= (p_m + iq_m) & a_m &= (r_m + is_m) \\ u_m &= \exp(\lambda_m h) & v_m &= a_m \exp(\lambda_m \tau_0) \end{aligned} \quad (8)$$

, on montre que les coefficients b_m du polynôme défini par :

$$P(u) = \prod_{m=1}^M (u - u_m) = \sum_{m=0}^M b_m u^{M-m} \quad \text{avec } b_0 = 1 \quad (9)$$

, sont les solutions du système linéaire:

$$\sum_{m=1}^M y_{i+M-m} b_m = -y_{i+M} \quad 1 < i < N - M + 1 \quad (10)$$

Le nombre M d'exponentielles et le nombre N de points d'appui doivent satisfaire la condition:

$$M \leq \frac{N+1}{2} \quad (11)$$

La première étape de la méthode consiste donc à construire ce système à partir des points d'appui y_n , et à le résoudre pour obtenir les coefficients b_m du polynôme $P(u)$. On utilise ici la méthode SVD (Press & al. 1989) qui à l'avantage de nous fournir le conditionnement du système, et donc un ordre de grandeur de la précision du résultat.

La seconde étape consiste à déterminer les racines u_m de $P(u)$ qui, à leur tour, nous donnent par (8) les exposants λ_m de l'approximation (7). Cette recherche des racines se fait en recherchant par la méthode QR les valeurs propres d'une matrice de Hessenberg ayant $P(u)$ comme polynôme caractéristique.

La troisième étape consiste à rechercher les amplitudes complexes a_m de la décomposition (7), connaissant les λ_m et l'ensemble des points d'appui, en résolvant par la même méthode SVD le système linéaire surdimensionné suivant :

$$y_n = \sum_{m=1}^{M'} a_m \exp(\lambda'_m x_n) \quad (12)$$

On remarque que l'on a introduit des λ'_m , $m = 1, \dots, M'$, à la place des λ_m initiaux. Cela signifie seulement que l'on peut très bien choisir un sous ensemble λ'_m de la "base" des λ_m (i.e: $M' < M$) pour recomposer la fonction. On parle ici improprement de base car les fonctions génératrices ne sont pas orthogonales; l'unicité de la solution n'est donc pas assurée, même pour un nombre M d'exponentielles donné. Considérons par exemple l'identification de la fonction $\tilde{F}(\mu, \tau)$ pour $\mu=0.4$ sur l'intervalle $0 < \tau < 10$ avec un nombre croissant M d'exponentielles.

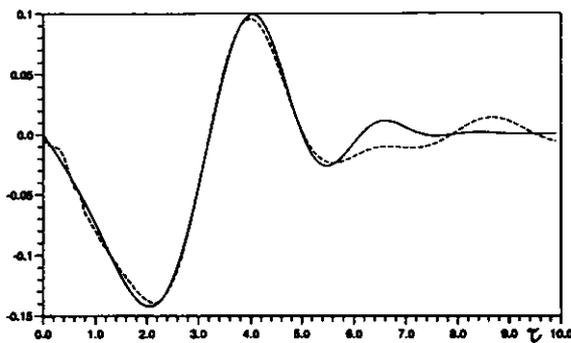


Fig.5a: $\tilde{F}(0.4, \tau)$ approximation Prony $M=10$, $M'=10$

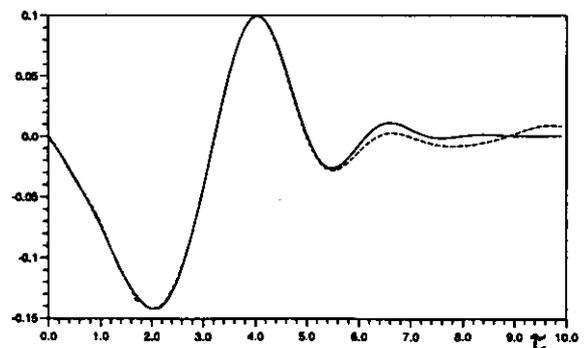


Fig.5b: $\tilde{F}(0.4, \tau)$ approximation Prony $M=20$, $M'=20$

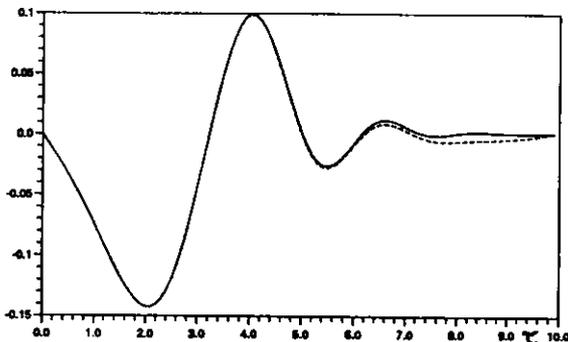


Fig.5c: $\tilde{F}(0.4, \tau)$ approximation Prony $M=30$, $M'=30$

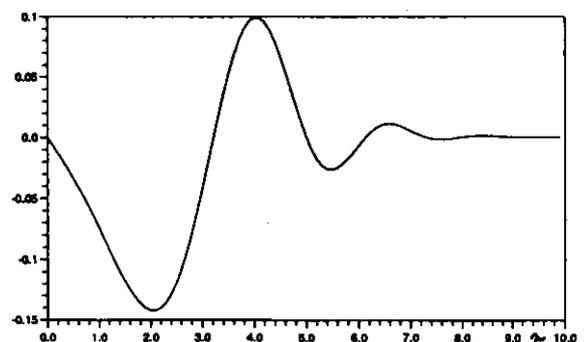


Fig.5d: $\tilde{F}(0.4, \tau)$ approximation Prony $M=37$, $M'=37$

Les figures 5a,b,c,d ci-dessus illustrent bien la convergence de l'approximation quand on augmente, toutes choses égales par ailleurs, le nombre d'exponentielles M de la base. La courbe en trait plein est la fonction de Green, la courbe en pointillé l'approximation par somme d'exponentielles. Par contre, le "prix à payer" semble très élevé puisqu'il faut jusqu'à 37 exponentielles pour obtenir une approximation meilleure que le % sur tout l'intervalle (Fig.5d). Or, l'intérêt de la méthode d'identification de la fonction de Green est de minimiser l'ordre du modèle, c'est à dire le nombre de raies nécessaires pour obtenir une précision donnée.

2 - 3: Une méthode de Prony régressive.

Cela nous a amenés à développer une amélioration de la méthode, dite *méthode de Prony régressive* qui consiste à reprendre la troisième étape en:

- ① triant les raies par ordre décroissant d'énergie,

- ② éliminant une à une les raies les moins énergétiques.

On procède ainsi itérativement à la troisième étape de la méthode sur les bases réduites successivement définies jusqu'à atteindre le seuil de précision souhaité. La première étape définissant la base initiale est toujours faite avec un nombre très grand d'exponentielles dont la borne maximale est définie par (11); Toutefois, pour le choix de cette valeur maximale, nous avons également considéré un seuil limite pour le conditionnement du premier système linéaire (10).

Pour l'exemple ci-dessus (Fig.5), on peut ainsi extraire une sous base de 10 exponentielles parmi les 37 initiales et obtenir le résultat suivant (Fig.6).

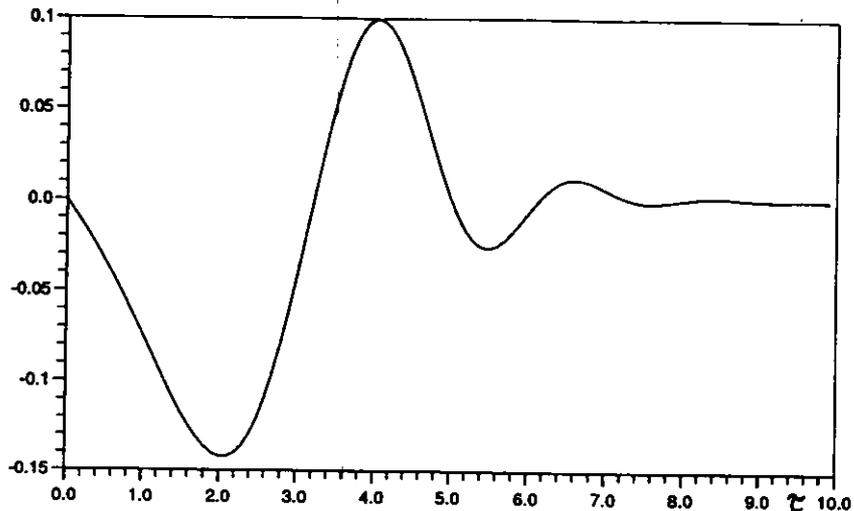


Fig.6: $\tilde{F}(0.4, \tau)$ approximation Prony $M=37$, $M'=10$

En rapprochant la figure 6 de la figure 5a, on s'aperçoit de l'avantage évident de cette technique de surdétermination de l'ordre M du modèle, puisque dans les deux cas l'approximation finale est obtenue avec le même nombre d'exponentielles $M'=10$.

Pour l'identification des systèmes à partir de réponses instationnaires bruitées, les avantages de la surdétermination de l'ordre M sont discutés dans Braun & Ram (1987). Mais on voit ici que cette technique est également très efficace même sur des réponses impulsionnelles parfaites, puisque connues analytiquement.

Nous avons appliqué cette méthode à l'identification de la fonction de Green $\tilde{F}(\mu, \tau)$ par des modèles continus stationnaires en balayant le domaine $[0,1]$ du paramètre μ à partir de sa borne supérieure où la fonction ne présente qu'un maximum en fonction du paramètre temporel, et en descendant vers les valeurs de μ pour lesquelles la fonction est de plus en plus oscillante (cf: Fig.4).

Sur la figure 8 nous avons reporté l'erreur maximale relative obtenue pour μ variant de 0.2 à 1. Ce critère d'erreur est défini comme:

$$E(\mu) = \frac{\max|\hat{y}(\tau) - y(\tau)|}{\max|y(\tau)|} \quad 0 < \tau < 30 \quad (13)$$

Il faut noter que ce critère est beaucoup plus sévère qu'un critère d'erreur quadratique sur l'intervalle, mais qu'il s'est avéré nécessaire car la méthode de Prony a parfois tendance à converger localement sur le domaine d'analyse (cf: Fig.5a,b,c,d).

Sur la figure 7 on observe qu'un nombre très réduit de raies (3, soit une réelle et deux complexes, puis 4, puis 5) suffit à représenter la réponse impulsionnelle pour $0.4 < \mu < 1$; Par contre, l'ordre minimum des modèles stationnaires croit très vite dès que l'on descend en

dessous de cette limite. Nous avons stoppé le balayage à $\mu=0.2$ pour lequel le nombre minimal d'exponentielles est de l'ordre de 50. Sur la figure 8, on voit que l'erreur maximale relative reste autour de 1% sur presque toute cette gamme, sauf au voisinage immédiat de $\mu=0.2$ où elle atteint 2%.

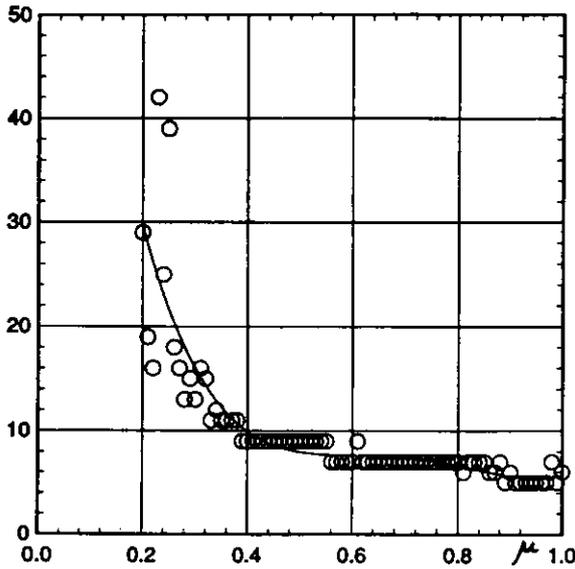


Fig7. Nombre d'exponentielles nécessaire pour obtenir l'erreur maxi donnée Fig.8 en identifiant par la méthode de Prony régressive.

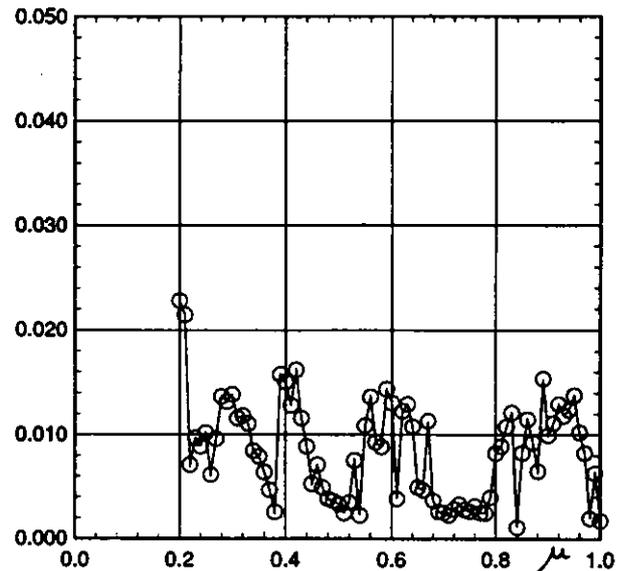


Fig8. Erreur maxi relative pour la solution optimale de l'identification de la fonction de Green par la méthode de Prony régressive, en fonction du paramètre μ .

Les résultats obtenus par cette méthode sur la gamme $0.4 < \mu < 1$ sont donc excellents, et doivent permettre de mettre en œuvre la méthode de calcul des expressions de type (3) par simulation d'équations différentielles en lieu et place du calcul des intégrales de convolution dans cette zone du plan des paramètres. Malheureusement, on voit que l'identification par de tels modèles continus stationnaires ne sera pas possible jusqu'à la borne inférieure $\mu=0$. Or, dans les programmes de calcul de tenue à la mer dans le domaine du temps, cette zone est également utilisée, et il est difficilement envisageable de structurer un code de calcul passant d'une méthode à l'autre selon que l'on serait dans l'une ou l'autre des zones.

Ce problème découle d'une inadaptation du modèle à coefficients constants vis à vis du système à identifier, et nous allons voir que le choix d'un modèle non-stationnaire va nous permettre d'identifier la fonction de Green jusqu'à la borne inférieure sans avoir à augmenter l'ordre.

On peut aisément illustrer le phénomène en imaginant que la réponse impulsionnelle de notre système soit une fonction de Bessel, par exemple $J_0(\tau)$, à la place de $\bar{F}(\mu, \tau)$. D'après Daubisse (1984), il faut 28 exponentielles pour approximer cette fonction avec une bonne précision ($O(10^{-5})$) sur l'intervalle $0 < \tau < 40$, d'où une équation différentielle à coefficients constants d'ordre 28 comme modèle stationnaire, alors que cette fonction est solution d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 2 à coefficients variables!:

$$\tau \ddot{J}_0(\tau) + \dot{J}_0(\tau) + \tau J_0(\tau) = 0 \quad (14)$$

C'est bien le même phénomène qui intervient pour la fonction qui nous occupe. Considérons son développement asymptotique pour les grands temps (Newman 1990):

Nous avons:
$$\bar{F}(\mu, \tau \rightarrow \infty) \equiv f_0 + \Re\{f_2\} \quad (15a)$$

avec:
$$f_0 = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{n!} \tau^{-2n-3} P_n(\mu) \quad (15b)$$

$$f_2 = (1+i) \left(\frac{\mu - i\sqrt{1-\mu^2}}{\sqrt{1-\mu^2}} \right)^{1/2} e^{-\frac{\tau^2}{4}(\mu - i\sqrt{1-\mu^2})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n+1}}{(1-\mu^2)^{n/2}} \sum_{m=0}^{\infty} d_{nm} \frac{(\mu + i\sqrt{1-\mu^2})^{m+2n-1}}{\left(\frac{i\tau}{2}\right)^{2m+2n-1}} \quad (15c)$$

On voit apparaître par l'argument de l'exponentielle complexe des termes de type *chirp* linéaires, c'est à dire des fonctions trigonométriques d'arguments quadratiques, qui seront amorties par l'exposant réel négatif et par le dénominateur des termes de la série. Ainsi, même sans considérer cet amortissement et en isolant un simple terme de type:

$$f(\tau) = \sin(\alpha\tau^2 + \theta) \quad (16)$$

qui satisfait l'équation différentielle:
$$\ddot{f} - \frac{1}{\tau} \dot{f} + 4\alpha^2 \tau^2 f = 0 \quad (17)$$

, on voit qu'un modèle de type instationnaire sera certainement mieux adapté à l'identification de cette fonction de Green.

3 _ UN MODÈLE CONTINU NON-STATIONNAIRE

3 - 1: Un modèle à coefficients polynomiaux.

Au vu des remarques ci dessus, et grâce à des solutions analytiques exactes développées pour les cas limites $\mu=0$ et $\mu=1$ où la formulation (5) dégénère et peut s'exprimer par des fonctions spéciales, le choix s'est orienté vers des équations différentielles à coefficients polynomiaux en temps.

→ Pour $\mu=0$, on vérifie en effet aisément que la fonction peut s'exprimer par : (Wehausen 1960):

$$\bar{F}(0, \tau) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{\tau^2}{8} \left[J_{1/4}\left(\frac{\tau^2}{8}\right) J_{-1/4}\left(\frac{\tau^2}{8}\right) + J_{3/4}\left(\frac{\tau^2}{8}\right) J_{-3/4}\left(\frac{\tau^2}{8}\right) \right] \quad (18)$$

,et qu'elle vérifie l'équation différentielle (Clément 1995):

$$4\bar{F}^{(4)}(0, \tau) + \tau^2 \ddot{\bar{F}}(0, \tau) + 7\tau \dot{\bar{F}}(0, \tau) + 9\bar{F}(0, \tau) = 0 \quad (19)$$

, où la notation $(^{(n)})$ indique la dérivée $n^{\text{ème}}$ par rapport à τ .

→ Pour $\mu=1$, la fonction s'exprime grâce à la fonction hypergéométrique confluyente Φ .

$$\bar{F}(1, \tau) = \tau \exp\left(-\frac{\tau^2}{4}\right) \Phi\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\tau^2}{4}\right) \quad (20)$$

, et satisfait l'équation différentielle du second ordre:

$$2\ddot{\bar{F}}(1, \tau) + \tau \dot{\bar{F}}(1, \tau) + 3\bar{F}(1, \tau) = 0 \quad (21)$$

On peut constater que pour les deux valeurs extrêmes du paramètre géométrique μ , on retombe sur des équations différentielles à coefficients polynomiaux vis à vis de la variable temporelle. L'équation n'étant que de degré 4 pour la valeur de μ où la fonction est la plus oscillante, on peut mesurer le gain attendu par rapport à l'ordre minimal des modèles stationnaires nécessaires dans cette zone du paramètre (cf : §2-3)

Pour identifier la fonction de Green sur tout le domaine de μ , nous proposons donc un modèle paramétrique à coefficients polynomiaux de la forme générale:

$$\sum_{i=0}^I \tilde{F}^{(i)}(\mu, \tau) \sum_{j=0}^J (a_{ij}(\mu) \tau^j) = 0 \quad (22)$$

, où I est l'ordre du modèle, et J le degré des polynômes coefficients.

3 - 2: Validation de la méthode numérique sur un cas connu (J_0)

Les méthodes d'identification par des modèles paramétriques non-stationnaires sont beaucoup moins nombreuses que pour le cas stationnaire. Nous avons donc choisi une méthode directe qui consiste en :

- ① choisir un ordre I et un degré J (choix du nombre de paramètres du modèle),
- ② choisir les schémas de discrétisation des dérivées temporelles
- ③ remarquant que (22) est linéaire vis à vis des coefficients a_{ij} , former un système linéaire surdéterminé en l'appliquant en un nombre L de points de contrôle tel que $L \geq (I+1)(J+1)$, et résoudre au sens des moindres carrés.

L'équation (22) étant homogène, on peut normer par l'un quelconque des coefficients inconnus, ou rajouter une équation de fermeture. Comme on ne connaît pas a priori l'ordre de grandeur des coefficients, et que certains peuvent être nuls, nous avons choisi la seconde solution en rajoutant une équation de contrainte:

$$\sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J a_{ij} = 1 \quad (23)$$

Nous avons testé la méthode sur la fonction de Bessel d'ordre 0 : $J_0(\tau)$, afin de retrouver numériquement les coefficients de l'équation (14). Les dérivées sont calculées par des schémas centrés d'ordre 2. Pour un modèle d'ordre 2 et de degré 1 (i.e : 6 paramètres), nous obtenons sur l'intervalle $0 < \tau < 10$:

$\tau \in [0, 10]$	100 points	1000 points	10000 points
a1 (=1)	0.9999363	0.9999996	0.9999977
a2 (=0)	-6.55 10 ⁻⁴	-6.65 10 ⁻⁶	4.14 10 ⁻⁶
b1 (=0)	-1.67 10 ⁻⁵	-1.16 10 ⁻⁷	-2.38 10 ⁻⁷
b2 (=1)	1.0	1.0	1.0
c1 (=1)	0.9990619	0.9999910	0.9999979
c2 (=0)	-3.44 10 ⁻⁴	-3.56 10 ⁻⁶	2.53 10 ⁻⁶
Cond.	79.7	83.5	117.3

Tableau 1: Coefficients de l'identification de la fonction de Bessel $J_0(\tau)$; modèle non-stationnaire (2,1); résolution de (22)+(23) par SVD.

On voit qu'on obtient une très bonne précision avec 1000 points sur l'intervalle malgré des schémas de dérivation numérique d'ordre peu élevé.

3 - 3: Application à la fonction de Green.

La méthode a ensuite été utilisée pour l'identification de la fonction de Green elle-même sur tout le domaine de variation du paramètre $0 \leq \mu \leq 1$. Nous avons procédé par une approche systématique en faisant varier indépendamment l'ordre du modèle I et le degré des polynômes J .

Avec le modèle ($I=4$, $J=2$), soit un modèle à (seulement) 15 paramètres, nous avons obtenu une convergence quasi parfaite sur tout l'intervalle $0 \leq \mu \leq 1$. De plus, les paramètres : a_{42} , a_{41} , a_{32} , a_{30} , a_{21} , a_{12} , a_{10} , a_{02} , a_{01} sont partout négligeables vis à vis des six autres paramètres.

Ainsi nous disposons maintenant d'un modèle non-stationnaire d'ordre 4, à 6 paramètres valable partout pour représenter la fonction de Green de l'hydrodynamique instationnaire:

$$a_{40}(\mu)\bar{F}^{(4)} + a_{31}(\mu)\tau\bar{F}^{(3)} + [a_{22}(\mu)\tau^2 + a_{20}(\mu)]\bar{F}^{(2)} + a_{11}(\mu)\tau\bar{F}^{(1)} + a_{00}(\mu)\bar{F} = 0 \quad (24)$$

Rappelons que cette équation est satisfaite par la réponse en potentiel du fluide en un point M à l'instant T , à un débit impulsionnel en M' à l'origine des temps $T=0$ (après les changements de variables explicités en (2) et (6)). On en déduit par simple dérivation par rapport au temps, l'équation différentielle relative à la pression dynamique.

A titre d'exemple, nous avons utilisé cette équation différentielle (24) pour représenter des déformées de surface libre qui seraient dues à des débits impulsionnels apparaissant à des instants et des localisations différents, problème qu'on pourrait assimiler à celui de la représentation de la surface libre d'un étang par temps de pluie !

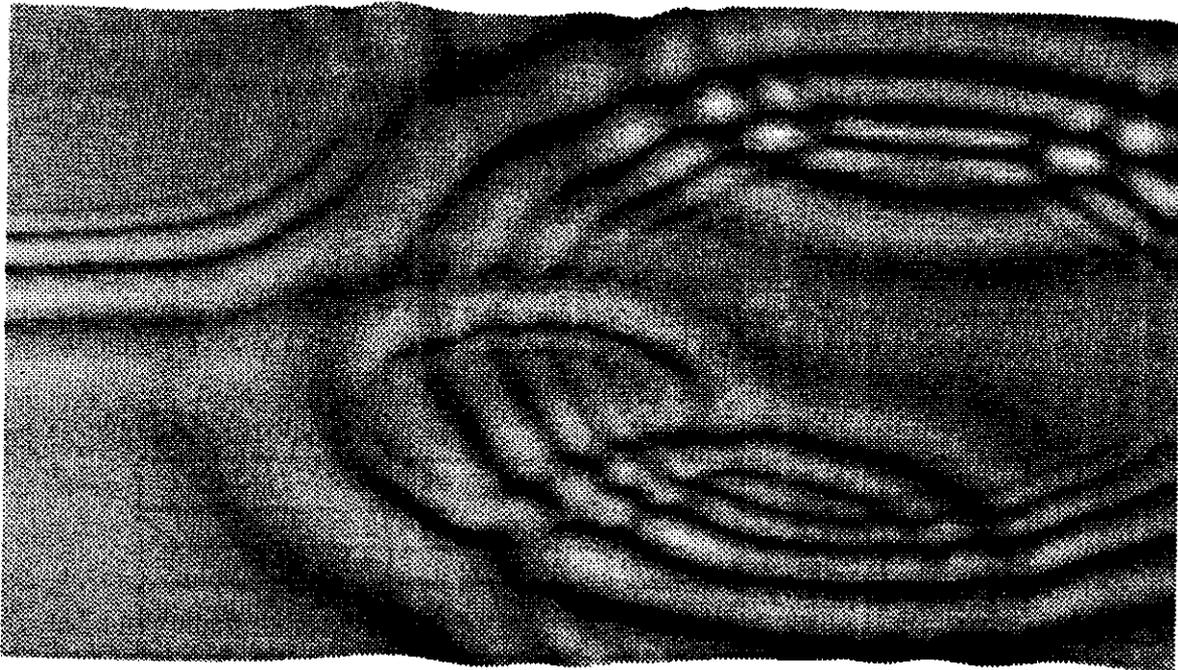


Fig.9 calcul de déformée de surface libre engendrée par plusieurs sources de débit impulsionnel décalées en temps.

A cette étape, on voit que le calcul de la fonction de Green elle-même est possible par intégration de l'équation différentielle (24). Nous avons utilisé ici un algorithme standard de type Runge-Kutta 4ème ordre sans rencontrer de difficulté particulière.

Cette méthode fournit donc une alternative aux approches classiques par développements en séries et/ou asymptotiques (Jami, Newman, King,...) lors de l'évaluation de l'intégrale de (3) par les méthodes habituellement utilisées (trapèzes, Simpson,...).

3 - 4: Le revers de la médaille

L'équation différentielle (24) caractérise la réponse libre du système. Si nous voulons maintenant simuler la réponse forcée, c'est à dire pour un débit $Q(\tau)$ qui ne soit plus une simple impulsion, il nous faut déterminer le second membre de (24).

Dans le cas des modèles stationnaires, on y parvient sans difficultés si l'on connaît les conditions initiales du système, et l'on obtient une équation différentielle ordinaire avec au second membre, des termes linéaires fonction de l'entrée et de ses dérivées.

Par contre dans le cas des systèmes non-stationnaires, réapparaissent au second membre des intégrales de convolution. Ceci est aisé à montrer en reprenant le petit exemple cité en introduction. Soient $u(t)$ et $y(t)$, l'entrée et la sortie du système linéaire invariant ayant $h(t) = te^{-t}$ pour réponse impulsionnelle.

$$y(t) = \int_0^t u(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (25)$$

En dérivant (25), et puisque $h(0) = 0$ et $\dot{h}(0) = 1$, il vient successivement:

$$y(t) = \int_0^t u(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (26a)$$

$$\dot{y}(t) = \int_0^t u(\tau)\dot{h}(t-\tau)d\tau \quad (26b)$$

$$\ddot{y}(t) = \int_0^t u(\tau)\ddot{h}(t-\tau)d\tau + u(t) \quad (26c)$$

1^{er} cas - modèle stationnaire: $h(t)$ vérifie: $\ddot{h} + 2\dot{h} + h = 0$ (27)

On a alors immédiatement, par combinaison linéaire de (26a,b,c): $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = u$ (28)

2^{ème} cas - modèle non-stationnaire: $h(t)$ vérifie également: $t\dot{h} + (t-1)h = 0$ (29)

Le même calcul nous donne maintenant $t\dot{y} + (t-1)y = \int_0^t \tau u(\tau)[h(t-\tau) + \dot{h}(t-\tau)]d\tau$ (30)

La présence des coefficients variables au premier membre de (29) fait apparaître les intégrales de convolution au second membre de (30). Le modèle non-stationnaire (24) ne nous permettra donc pas de faire l'économie du calcul de ces intégrales dans l'évaluation de (3), pour un débit non-impulsionnel comme au §3-3, c'est à dire dans le cas général. Pour ce faire, il faudrait pouvoir déduire de (24) un modèle stationnaire, comme on peut le faire en déduisant (27) de (29) par quelques manipulations algébriques élémentaires.

Malheureusement, il n'existe pas de méthode systématique ni de théorème d'existence de la solution pour le passage de l'un à l'autre dans le cas général. Nous ne désespérons pas néanmoins de trouver une nouvelle équation différentielle pour ce second membre, ce qui nous permettrait de pouvoir finalement appliquer la méthode proposée initialement.

4 _ CONCLUSION

Cette étude nous a permis de développer des modèles continus paramétriques de la fonction de Green transitoire de l'hydrodynamique. Les modèles stationnaires obtenus par une méthode de Prony améliorée fournissent une très bonne approximation sur un large domaine, mais ne peuvent être utilisés dans tous les cas de figure, en particulier quand point source et point champ approchent de la surface libre simultanément, ou encore quand le point champ tend vers l'infini horizontalement.

La partie mémoire de la fonction de Green peut par contre être identifiée par un modèle non-stationnaire d'ordre faible (=4) pour toutes les configurations géométriques. Ce modèle peut servir au calcul de la fonction de Green comme nous l'avons illustré au §3-3. Par contre, en l'état actuel de nos recherches, il ne permet pas de remplacer totalement le calcul des intégrales de convolution apparaissant dans la résolution numérique du problème de la tenue à la mer dans le domaine du temps par les méthodes de singularités de Kelvin.

REMERCIEMENTS: Le présent travail a été entrepris dans le cadre d'un contrat avec la DRET du Ministère de la Défense que nous tenons à remercier ici vivement pour ce soutien.

REFERENCES

- Adashi H., Ohmatsu H.(1980), On the time-dependent potential and its application to wave problems. *Proc. 13th ONR Symp. Naval Hydrod.*, Tokyo.
- Brard R. (1948). Introduction à l'étude théorique du tangage en marche *Bulletin de l'ATMA*, Paris pp. 455-471.
- Braun S., Ram Y.M. (1987). Determination of structural modes via the Prony model: System order and noise induced poles. *J. Acous. Soc. Am.* 81, 5, pp 1447-1459.
- Clément A., Foulhoux L.(1991) One step ahead in the numerical modelling of the transient water waves: the identification of the time-domain Green function. *Int. Conf. on Computer Modelling in Ocean Engineering*. Barcelone.
- Clément A.(1992). A discrete time model of the transient hydrodynamics Green function. *7th Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies*; Val de Reuil.
- Clément A.(1995). Identification de la fonction de Green de l'hydrodynamique instationnaire en profondeur infinie. Rapport final contrat DRET 92.34.507.00.470.75.01 .
- Daubisse J.C.(1981). Some results on approximation by exponential series applied to hydrodynamics. *Proc. 3rd Int. Conf. Numer. Ship Hydrod.* Paris.
- Daubisse J.C.(1984). *Sur quelques méthodes numériques spécifiques de l'hydrodynamique navale*. Thèse d'Etat. Nantes.
- Ferrant P. (1988), A fast computational method for transient 3D wave-body interactions. *Proc. Intl Conf. Comput. Model. Ocean Engg.*, Venice. Balkema Publishers.
- Finkelstein A.B. (1957), The initial value problem for transient water waves *Comm. Pure Applied Math.*, 10, pp.511-522
- Jami A.(1981), *Etude théorique et numérique de phénomènes transitoires en hydrodynamique navale*. Thèse de Doctorat ès Sciences. ENSTA, Paris.
- King B.W (1987) Time-domain analysis of wave exciting forces on ships and bodies.*PhD Univ. Michigan*.
- Kumaresan R. (1983), On the Zeros of the Linear Prediction-Error Filter for Deterministic Signals. *IEEE Trans Acoust. Speech Sig. Proc.*, 31, 1, pp 217-220.
- Kumaresan R., Tufts D.W. (1982), Estimating the Parameters of Exponentially Damped Sinusoids and Pole-Zero Modeling in Noise. *IEEE Trans Acoust. Speech Sig. Proc.*, 30, 6, pp 833-840.
- Liapis S.J. (1986), Time-domain analysis of ship motions.*PhD Diss. Univ. Michigan*.
- Majda G., Strauss W.A., Wei M. (1989). Computation of Exponentials in Transient Data. *IEEE Trans. Anten. Propag.* 37, 10, pp 1284-1290
- Magee A.R. (1991). Large amplitude ship motions in the time domain. *PhD Thesis.* Univ. Michigan.
- Magee A.R, Beck R.F (1989). Vectorized computation of the time-domain Green function. *Proc. 4th Intl Workshop Water Waves and Floating Bodies*. Oystese. Norway.
- Newman J.N (1985). The evaluation of free-surface Green functions. *Proc. 4th Intl Conf. Numer. Ship Hydrod.* Washington.
- Newman J.N (1992). The approximation of free-surface Green functions. in: *Wave Asymptotics*. P.A. Martin & G.R. Wickham ed, pp. 107-135. Cambridge University Press.
- Press W.H, Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. (1989). *Numerical Recipes: the Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press.
- Prony (baron Riche de) (1795). Essai expérimental et analytique sur les lois de la dilatabilité des fluides élastiques et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'eau et de la vapeur de l'alcool à différentes températures. *J. École Polyt.* 1, cahier2, pp 24-76.
- Van Blaricum M., Mittra R. (1975). A Technique for Extracting the Poles and Residues of a System Directly from its Transient Response.*IEEE Trans. Anten. Propag.* 23, 6, pp 777-781.
- Wehausen J.V., Laitone E.V (1960). Surface Waves. *Handbuch Der Physik*. Springer-Verlag Eds.
- Wellstead P.E. (1981). Non-Parametric Methods of System Identification. *Automatica*, 17, 1, pp 55-69.