



**5<sup>e</sup> JOURNÉES DE L'HYDRODYNAMIQUE**

**22, 23, 24 mars 1995 – ROUEN**

**EFFETS DES DÉFAUTS DE PLANÉITÉ DE PAROIS  
SUR LA PROPAGATION DE LA HOULE DANS UN BASSIN  
DE GRANDE LONGUEUR**

**B. MOLIN<sup>1</sup>, R. COINTE<sup>2</sup>**  
Bassin d'Essais des Carènes  
27100 Val de Reuil

**Résumé**

Le problème considéré ici est celui des effets des défauts de planéité de paroi sur la qualité de la houle produite dans un bassin de traction. Il est traité dans le cadre habituel de la théorie potentielle linéarisée, les perturbations de l'écoulement dues aux imperfections de paroi étant supposées petites. Ces perturbations sont d'abord étudiées dans le cas de défauts idéaux, de forme sinusoïdale, et on montre que des situations résonnantes peuvent se produire pour certaines combinaisons des longueurs d'onde de la houle et des défauts de paroi. Puis on traite le cas plus général de défauts aléatoires définis par une densité spectrale. Une application numérique est faite au cas du projet de futur bassin de traction du Val de Reuil.

**Summary**

We consider here the effects of wall planarity defects on the quality of the waves generated in a long towing tank. This problem is tackled within the usual frame of linearized potential theory, when the perturbations induced by the wall defects are small. First simple sinusoidal defects are considered, and it is shown that resonance can occur for some combinations of wave frequency and wall defect wavelength. Then the resolution is extended to the case of stochastic defects whose spectral density is known. A simple expression is obtained and a numerical application is performed for a particular towing tank.

<sup>1</sup>maintenant à l'ESIM, 13451 Marseille Cedex 20

<sup>2</sup>maintenant au ministère de l'Environnement, 20 avenue de Ségur, 75302 Paris 07 SP

## 1. Introduction

Le problème considéré ici est lié au projet de construction d'un bassin de traction de grande longueur (600 m) sur le site du Val de Reuil. Sur une telle longueur il est à craindre que la qualité de la houle ne soit affectée par les imperfections de surface des parois longitudinales, et il se pose le problème des tolérances à imposer au génie civil : de l'ordre du centimètre, du millimètre ? Le coût de construction est fortement lié à ces tolérances et il convient donc de ne pas demander l'inutile.

Le problème est étudié ici dans le cadre de la théorie potentielle linéarisée, en fréquentiel. Autrement dit on suppose que le batteur a été mis en route à  $t = -\infty$  et qu'un état stationnaire a été atteint. En pratique, cela peut demander un temps assez long, dès lors que des réflexions multiples sur les parois sont en jeu. La solution qu'on obtient doit donc être considérée comme un majorant des perturbations possibles.

La résolution est fondée sur un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, mais pas forcément très restrictives :

1. Une seule des deux parois longitudinales est supposée non plane (la théorie développée étant linéaire, on pourra faire appel au principe d'additivité des solutions).

2. Les défauts de planéité ne dépendent que de l'abscisse  $x$ , et pas de la cote verticale  $z$ . La largeur du bassin s'écrit :

$$b(x, z) = b_0 + \zeta(x)$$

(on traite en Annexe 3 le cas d'un défaut  $\zeta(x, z)$  dépendant également de la cote verticale).

3. Le défaut de planéité est "petit" :

$$k_0 \zeta(x) \ll 1 \qquad \zeta_x = \partial\zeta/\partial x \ll 1$$

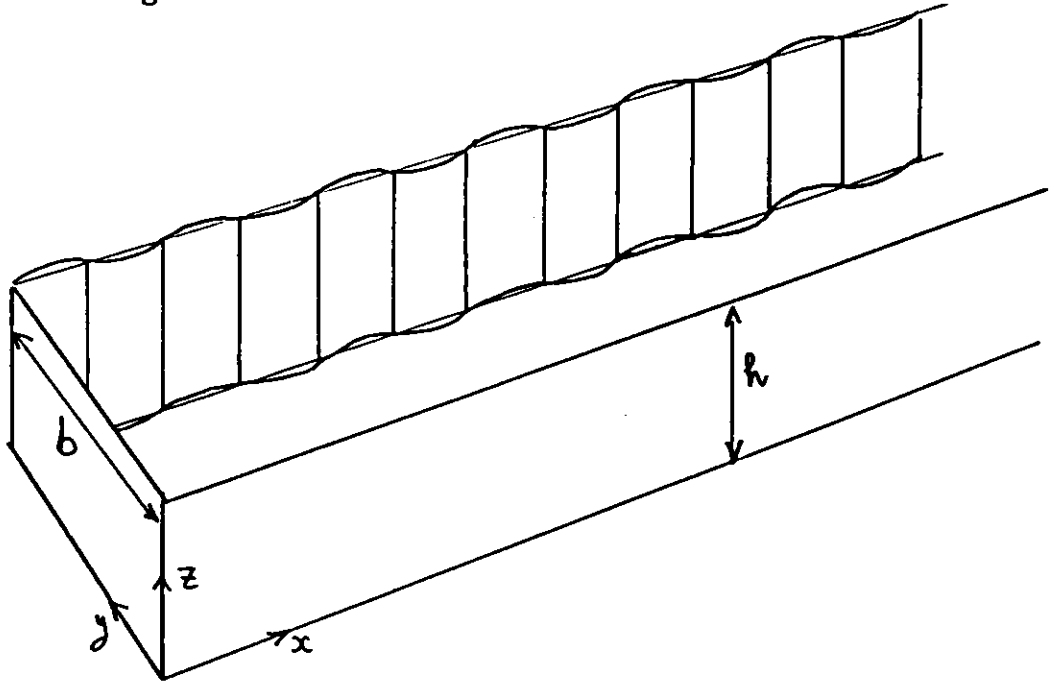
où  $k_0$  est le nombre d'onde de la houle générée.

4. Les défauts de planéité sont localisés entre le batteur et une certaine abscisse, soit  $d$ . Au delà de  $x = d$  le mur redevient plan. Cette hypothèse est nécessaire mathématiquement pour écrire une condition de "radiation", ou de sortie des perturbations.

5. Le batteur est "idéal", en ce sens que sa vitesse horizontale a un profil en  $\text{ch}k_0z$ . On n'a ainsi pas à se soucier des modes évanescents qui de toute façon restent confinés au voisinage immédiat du batteur, et ne sont guère susceptibles de générer des perturbations notoires.

On écrit alors que le potentiel de l'écoulement  $\Phi$  est égal à  $\Phi_0 + \epsilon \Phi_1$ , où  $\Phi_0$  est le potentiel de la houle non perturbée, et  $\Phi_1$  le potentiel de perturbation,  $\epsilon$  étant lié au défaut de planéité  $\partial\zeta/\partial x$ . On suppose la houle générée régulière, et on s'intéresse tout d'abord à des défauts de paroi sinusoïdaux :  $\zeta = \alpha \sin qx$ . Le potentiel  $\Phi_1$  est alors obtenu de façon analytique, par décomposition sur une base de fonctions propres. On met en évidence, pour certaines valeurs de  $q$ , des situations résonnantes. La solution est ensuite étendue au cas d'un défaut quelconque  $\zeta(x)$ , défini par sa transformée de Fourier, puis, étant supposé un processus stochastique stationnaire, par une densité spectrale. On procède alors à une application numérique. Enfin on décrit les modifications à apporter à la démarche, dans le cas où les deux parois sont non planes, et dans celui où les défauts dépendent aussi de la cote verticale.

## 2. Considérations générales



Soit  $\Phi(x, y, z, t)$  le potentiel de l'écoulement dans le bassin. Les conditions à la surface libre étant linéarisées, et en conséquence des hypothèses simplificatrices faites,  $\Phi$  a la forme :

$$\Phi = \Re \left\{ \varphi(x, y) \frac{\text{ch} k_0 z}{\text{ch} k_0 h} e^{-i\omega t} \right\}$$

Pour des parois parfaitement planes :

$$\varphi(x, y) = \frac{ag}{\omega} e^{ik_0 x} = \frac{ag}{\omega} \varphi_0$$

La condition de glissement sur la paroi en  $y = b(x) = b_0 + \zeta(x)$  s'écrit :

$$\varphi_y = \zeta_x \varphi_x \text{ en } y = b_0 + \zeta(x)$$

On pose :

$$\varphi = \frac{ag}{\omega} (\varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots)$$

où  $\varphi_1$  est d'ordre  $\epsilon$ ,  $\varphi_2$  d'ordre  $\epsilon^2$ , etc.,  $\epsilon$  étant un petit paramètre, d'ordre  $\zeta_x$ .

A l'ordre  $\epsilon$ , la condition de glissement devient :

$$\varphi_{1y} = \zeta_x \varphi_{0x} - \zeta \varphi_{0yy} \text{ en } y = b_0$$

Soit, comme  $\varphi_0$  ne dépend pas de  $y$  :

$$\varphi_{1y} = \zeta_x \varphi_{0x}$$

Les autres équations vérifiées par  $\varphi_1$  sont :

$$\varphi_{1xx} + \varphi_{1yy} + k_0^2 \varphi_1 = 0$$

dans le domaine fluide.

$$\varphi_{1y} = 0 \text{ en } y = 0$$

$$\varphi_{1x} = 0 \quad \text{en } x = 0$$

et une condition de "radiation" pour  $x > d$ . Les parois étant alors supposées redevenues planes, on développe  $\varphi_1$  sous la forme d'une somme de fonctions propres exprimant que les perturbations se propagent vers la droite ou décroissent de façon exponentielle (e.g. Cointe, 1993) :

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^N A_n \cos \frac{n\pi}{b_0} y e^{ik_n x} + \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi}{b_0} y e^{-k_n(x-d)}$$

avec :

$$k_n^2 = k_0^2 - \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \quad \text{pour } k_0 > \frac{n\pi}{b} \qquad k_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{b^2} - k_0^2 \quad \text{pour } k_0 < \frac{n\pi}{b}$$

### 3. Paroi sinusoïdale

On suppose que la paroi est sinusoïdale, décrite par :

$$\zeta(x) = \alpha \sin qx$$

D'où :

$$\zeta_x = \alpha q \cos qx = \frac{1}{2} \alpha q (e^{iqx} + e^{-iqx})$$

En  $y = b_0$  la condition de glissement s'écrit :

$$\varphi_{1y} = \frac{1}{2} \alpha q i k_0 (e^{i(k_0+q)x} + e^{i(k_0-q)x})$$

#### 3.1 Mode somme

Soit donc :

$$\varphi_{1y} = \beta e^{i(k_0+q)x} \qquad \beta = \frac{i}{2} \alpha q k_0$$

Pour  $x \in [0, d]$  une solution particulière du problème est :

$$\varphi_{1P} = \frac{\beta}{\nu \operatorname{sh} \nu b_0} \operatorname{ch} \nu y e^{i(k_0+q)x}$$

où :

$$\nu^2 = (k_0 + q)^2 - k_0^2$$

On obtient une solution générale en rajoutant toutes les solutions du problème homogène :

$$\varphi_1 = \frac{\beta}{\nu \operatorname{sh} \nu b_0} \operatorname{ch} \nu y e^{i(k_0+q)x} + \sum_{n=0}^N (a_n e^{ik_n x} + b_n e^{-ik_n x}) \cos \frac{n\pi}{b_0} y + \sum_{n=N+1}^{\infty} (a_n e^{k_n(x-d)} + b_n e^{-k_n x}) \cos \frac{n\pi}{b_0} y$$

Les  $a_n$  et  $b_n$  sont déterminés par la satisfaction des conditions aux limites en  $x = 0$  et  $x = d$  :

$$\varphi_{1x} = 0 \quad \text{en } x = 0$$

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^N A_n \cos \frac{n\pi}{b_0} y e^{ik_n x} + \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi}{b_0} y e^{-k_n(x-d)} \quad \text{en } x = d$$

(pour assurer cette deuxième condition, on écrit l'égalité des potentiels et de leurs dérivées en  $x$ ).

Le problème est instantanément résolu, dès lors qu'on a projeté  $\cos \nu y$  sur la base  $[\cos \frac{n\pi}{b_0} y]$ . On ne poursuit pas davantage car la résolution du mode somme s'avère, in fine, sans intérêt (pas de résonance).

### 3.2 Mode différence

Soit donc la condition de glissement, en  $y = b_0$  :

$$\varphi_{1y} = \beta e^{i(k_0 - q)x}$$

Deux cas se présentent suivant que  $q$  est plus grand ou plus petit que  $2k_0$  ( $k_0$  et  $q$  sont supposés tous deux positifs).

Pour  $q > 2k_0$ , la solution particulière est la même que dans le cas précédent et la résolution identique.

**Cas  $q < 2k_0$**

Une solution particulière est alors :

$$\varphi_{1P} = -\frac{\beta}{\nu \sin \nu b_0} \cos \nu y e^{i(k_0 - q)x}$$

où :

$$\nu^2 = k_0^2 - (k_0 - q)^2$$

On suppose, pour l'instant, que  $\sin \nu b_0 \neq 0$ , soit  $\nu \neq n\pi/b_0$ .

La solution générale est alors :

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & -\frac{\beta}{\nu \sin \nu b_0} \cos \nu y e^{i(k_0 - q)x} \\ & + \sum_{n=0}^N (a_n e^{ik_n x} + b_n e^{-ik_n x}) \cos \frac{n\pi}{b_0} y + \sum_{n=N+1}^{\infty} (a_n e^{k_n(x-d)} + b_n e^{-k_n x}) \cos \frac{n\pi}{b_0} y \end{aligned}$$

On projette alors  $\cos \nu y$  sur la base  $\cos \frac{n\pi}{b_0} y$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & \sum_{n=0}^N (c_n e^{i(k_0 - q)x} + a_n e^{ik_n x} + b_n e^{-ik_n x}) \cos \frac{n\pi}{b_0} y \\ & + \text{modes évanescents.} \end{aligned}$$

avec :

$$c_0 = -\frac{\beta}{\nu^2 b_0} \quad c_n = -\frac{2(-1)^n \beta b_0}{\nu^2 b_0^2 - n^2 \pi^2} = -\frac{2(-1)^n \beta}{b_0 (k_n - k_0 + q)(k_n + k_0 - q)}$$

Il reste à satisfaire les conditions en  $x = 0$  et  $x = d$ , soit :

$$\begin{aligned} i(k_0 - q) c_n + i k_n a_n - i k_n b_n &= 0 \\ c_n e^{i(k_0 - q)d} + a_n e^{ik_n d} + b_n e^{-ik_n d} &= A_n e^{ik_n d} \\ i(k_0 - q) c_n e^{i(k_0 - q)d} + i k_n a_n e^{ik_n d} - i k_n b_n e^{-ik_n d} &= i k_n A_n e^{ik_n d} \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$A_n = \left\{ \frac{1}{2} \frac{k_n + k_0 - q}{k_n} e^{i(k_0 - q - k_n)d} - \frac{1}{2} \frac{k_n - k_0 + q}{k_n} e^{i(k_0 - q + k_n)d} - \frac{k_0 - q}{k_n} \right\} c_n$$

### 3.3 Cas résonnants

Ils se produisent pour  $\nu = n\pi/b_0$ , soit  $k_0 - q = \pm k_n$ , où  $k_n^2 = k_0^2 - n^2 \pi^2 / b_0^2$ .

En ce cas  $A_n$  est apparemment indéterminé, puisqu'égal à  $0/0$ . On peut lever l'indétermination par passage à la limite (on peut objecter que ce passage à la limite n'est pas forcément licite ; on présente en annexe deux autres manières d'obtenir le même résultat, basée l'une sur la méthode des échelles multiples et l'autre sur l'optique géométrique).

Considérant le cas  $k_0 - q = k_n$ , on pose  $k_0 - q = k_n + \epsilon$ .

Il vient alors (pour  $n \geq 1$ ) :

$$A_n = \frac{(-1)^n \beta}{b_0 k_n} \frac{e^{i\epsilon d} - 1}{\epsilon} + O(\epsilon)$$

Soit, pour  $\epsilon \rightarrow 0$  :

$$A_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \frac{\alpha (k_0 - k_n) k_0 d}{b_0 k_n}$$

Pour  $k_0 - q = -k_n$ , on obtient :

$$A_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \frac{\alpha (k_0 + k_n) k_0 d}{b_0 k_n}$$

Dans le cas  $n = 0$ , on a résonance pour  $q = 2k_0$  (Bragg) et :

$$A_0 = -\frac{1}{2} \frac{\alpha k_0 d}{b_0}$$

### 3.4 Application numérique

On considère un bassin large de 14 m et un mur ondulé de longueur 500 m, avec  $\alpha = 1$  mm et  $q = 0.42 \text{ m}^{-1}$  (soit une "longueur d'onde" de 15 m).

La résonance se produit pour :

$$k_0 - q = \pm k_n \quad \text{avec} \quad k_n^2 = k_0^2 - \frac{n^2 \pi^2}{b_0^2}$$

soit donc pour des nombres d'onde  $k_0$  donnés par :

$$k_0 = \frac{q}{2} + \frac{n^2 \pi^2}{2q b_0^2}$$

On suppose, pour simplifier, la profondeur d'eau infinie ( $\omega^2 = g k_0$ ). Le tableau suivant donne les nombres d'onde critiques et le taux de perturbation de la houle à une distance de 500 m du batteur.

$n$	$k_0$	$T$	$k_n$	$ A_n $
0	0.21	4.38	0.21	0.004
1	0.27	3.86	0.15	0.014
2	0.45	3.0	0.03	0.11
3	0.75	2.32	0.33	0.017
4	1.17	1.86	0.75	0.012

On constate que le taux de perturbation (amplitude de la houle parasite divisée par l'amplitude de la houle non perturbée) est de l'ordre de 1 à 2 %, sauf pour  $n = 2$ , où il atteint 11 %. La raison est qu'on opère alors le batteur à une période très proche de la période du deuxième mode propre transversal, le nombre d'onde de la modulation étant voisin de  $2\pi/b_0$ .

#### 4. Paroi de forme quelconque

Soit donc toujours  $b(x) = b_0 + \zeta(x)$ , où  $\zeta(x)$  est supposé nul au delà de  $x = d$ .

On peut écrire :

$$\zeta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\zeta}(q) e^{-iqx} dq$$

où :

$$\tilde{\zeta}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x) e^{iqx} dx$$

On a vu que pour  $\zeta(x) = \alpha e^{-iqx}$ , on a :

$$A_n = \alpha f_n(q, d)$$

où  $A_n$  désigne l'amplitude relative de la composante d'ordre  $n$  de la houle au delà de  $x = d$ .

Pour  $0 < q < 2k_0$  on a établi :

$$f_n(q, d) = 2(-1)^{n+1} i \frac{k_0 q}{b_0 (k_n + k_0 - q)(k_n - k_0 + q)} \\ \times \left\{ \frac{1}{2} \frac{k_n + k_0 - q}{k_n} e^{i(k_0 - q - k_n)d} - \frac{1}{2} \frac{k_n - k_0 + q}{k_n} e^{i(k_0 - q + k_n)d} - \frac{k_0 - q}{k_n} \right\}$$

où :

$$k_n^2 = k_0^2 - \frac{n^2 \pi^2}{b_0^2}$$

Pour  $q < 0$  ou  $q > 2k_0$  l'expression de  $f_n(q, d)$  est différente, mais ne présente pas de pôle. Il en résulte une faible perturbation de la houle si bien qu'à grande distance du batteur  $A_n$  s'obtient par :

$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2k_0} \tilde{\zeta}(q) f_n(q, d) dq$$

Pour  $d \rightarrow \infty$  il est aisé de calculer la forme asymptotique de  $A_n$ .

On considère tout d'abord l'intégrale de 0 à  $k_0$  :

$$A_{n1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{k_0} \tilde{\zeta}(q) f_n(q, d) dq$$

et on fait le changement de variable :

$$u = [q - (k_0 - k_n)] d$$

Il vient :

$$A_{n1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-(k_0 - k_n)d}^{k_0 d} \tilde{\zeta}\left(\frac{u}{d} + k_0 - k_n\right) \frac{2(-1)^{n+1} i k_0 \left(\frac{u}{d} + k_0 - k_n\right)}{b_0 \left(-\frac{u}{d} + 2k_n\right) \frac{u}{d}} \\ \times \left\{ \frac{1}{2} \left(2 - \frac{u}{k_n d}\right) e^{-iu} - \frac{1}{2} \frac{u}{k_n d} e^{i(2k_n d - u)} - 1 + \frac{u}{k_n d} \right\} \frac{du}{d}$$

Pour  $k_n$  non nul,  $d \rightarrow \infty$  revient à étendre le domaine d'intégration de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

On a alors :

$$A_{n1} = (-1)^{n+1} \frac{k_0(k_0 - k_n)}{k_n b_0} \tilde{\zeta}(k_0 - k_n) \quad \text{pour } k_n d \rightarrow \infty$$

On procède de façon similaire pour l'intégration de  $k_0$  à  $2k_0$ . On obtient en fin de compte :

$$A_n = (-1)^{n+1} \frac{k_0}{k_n b_0} \left[ (k_0 - k_n) \tilde{\zeta}(k_0 - k_n) + (k_0 + k_n) \tilde{\zeta}(k_0 + k_n) \right]$$

Pour  $n = 0$ , on a :

$$A_0 = -\frac{k_0}{b_0} \tilde{\zeta}(2k_0)$$

On peut vérifier, à partir de ces expressions, qu'on retrouve les résultats établis précédemment dans le cas d'un mur sinusoïdal (à la résonance).

## 5. Cas d'un mur avec déformation aléatoire décrite par une densité spectrale

### 5.1 Définitions et conventions

On suppose  $\zeta(x)$  à moyenne nulle :

$$E(\zeta) = \frac{1}{d} \int_0^d \zeta(x) dx = 0$$

La fonction d'autocorrélation étant définie par :

$$R_\zeta(u) = E\{\zeta(x) \zeta(x+u)\} = \frac{1}{d} \int_0^d \zeta(x) \zeta(x+u) dx$$

on associe à  $R_\zeta(u)$  le spectre, dit unilatéral, défini par :

$$S_\zeta(q) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_\zeta(u) e^{-iq u} du \quad \text{pour } q > 0$$

$$S_\zeta(q) = 0 \quad \text{pour } q < 0$$

Inversement :

$$R_\zeta(u) = \int_0^{\infty} S_\zeta(q) \cos qu dq$$

et, en particulier, la variance de  $\zeta(x)$  se relie à la densité spectrale  $S_\zeta(q)$  par :

$$E(\zeta^2) = R_\zeta(0) = \int_0^{\infty} S_\zeta(q) dq$$

### 5.2 Résolution

Pour  $x > d$  le potentiel total  $\Phi$  est donné par :

$$\Phi = \frac{ag}{\omega} \frac{\text{ch } k_0 z}{\text{ch } k_0 h} \Re \left\{ \left( e^{ik_0 x} + \sum_{n=0}^N A_n \cos \frac{n\pi}{b_0} y e^{ik_n x} \right) e^{-i\omega t} \right\}$$

avec :

$$k_n^2 = k_0^2 - \frac{n^2 \pi^2}{b_0^2}$$



Les  $k_n$  étant différents, les composantes de houle aux différents ordres  $n$  sont non corrélées. On peut donc les considérer indépendamment.

On a établi :

$$A_n = (-1)^{n+1} \frac{k_0}{k_n b_0} \left[ (k_0 - k_n) \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x) e^{i(k_0 - k_n)x} dx + (k_0 + k_n) \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x) e^{i(k_0 + k_n)x} dx \right]$$

Multipliant  $A_n$  par son complexe conjugué on obtient :

$$A_n A_n^* = \frac{k_0^2}{k_n^2 b_0^2} \left\{ (k_0 - k_n)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x) \zeta(y) e^{i(k_0 - k_n)(x-y)} dx dy \right\} \\ \left\{ + (k_0 + k_n)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x) \zeta(y) e^{i(k_0 + k_n)(x-y)} dx dy \right\} \\ + \text{termes croisés}$$

Posant :  $y = x + u$ , on a :

$$A_n A_n^* = \frac{k_0^2}{k_n^2 b_0^2} \left\{ (k_0 - k_n)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x) \zeta(x+u) e^{-i(k_0 - k_n)u} dx du \right\} \\ \left\{ + (k_0 + k_n)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x) \zeta(x+u) e^{-i(k_0 + k_n)u} dx du \right\} \\ + \text{termes croisés}$$

$\zeta(x)$  étant nul en dehors de  $[0, d]$ , on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \zeta(x) \zeta(x+u) dx = d R_\zeta(u)$$

(pour  $u \ll d$ ).

D'où :

$$A_n A_n^* = \frac{\pi k_0^2 d}{k_n^2 b_0^2} \left\{ (k_0 - k_n)^2 S_\zeta(k_0 - k_n) + (k_0 + k_n)^2 S_\zeta(k_0 + k_n) \right\} \quad (1)$$

La contribution des termes croisés étant négligeable si l'on suppose que le processus  $\zeta(x)$  est gaussien.

On obtient donc le résultat que, dans le cas où les déformations de surface sont aléatoires, de longueur de corrélation faible devant  $d$ , l'amplitude des perturbations croît comme la racine carrée de la longueur.

### 5.3 Application numérique

On suppose que  $\zeta(x)$  varie grossièrement entre -1 et +1 cm. Si  $\zeta(x)$  est gaussien, ceci signifie un écart type de l'ordre de 0.25 cm. On suppose que le spectre des déformations prend une valeur constante  $S_0$  pour  $q$  allant de 0 à  $q_{\max}$  et la valeur nulle au delà. On prend  $q_{\max} = 10$ , ce qui correspond donc à une "longueur d'onde" minimale de 60 cm. Ces valeurs sont évidemment quelque peu arbitraires et sont éventuellement à revoir.

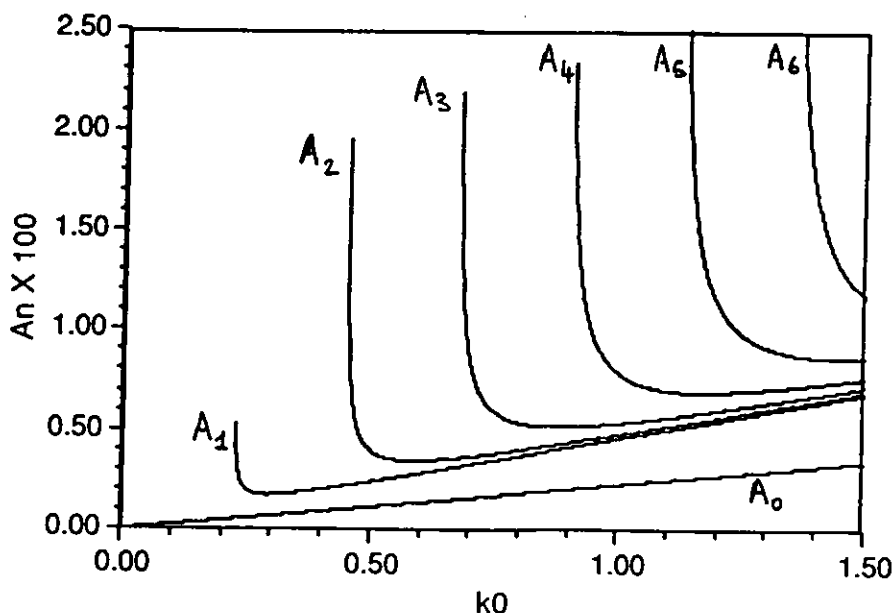
On en déduit la valeur de  $S_0$  :

$$S_0 = 6.25 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3$$

Sous la condition que  $k_0 + k_n < q_{\max}$ , le module des  $A_n$  est donné par :

$$\|A_n\| = \frac{k_0}{k_n b_0} \sqrt{\pi d S_0} \sqrt{(k_0 - k_n)^2 + (k_0 + k_n)^2}$$

On prend, comme précédemment,  $d = 500$  m et  $b_0 = 14$  m. La figure suivante donne, multipliés par cent, les modules des différents coefficients  $A_n$  en fonction de  $k_0$ . Les courbes ne sont tracées que pour  $k_n d \geq 10$ , ce qui semble une condition suffisante pour que les approximations faites aux paragraphes 4 et 5.2 soient acceptables.



On observe, ce qui est compréhensible, des amplifications importantes au voisinage immédiat des modes propres transverses. Si l'on s'en écarte quelque peu et qu'on considère par exemple la valeur  $k_0 = 1$  (soit une période de 2 secondes), on obtient que la somme des modules des  $A_n$  est de l'ordre de 2.5 %. Si l'on suppose le deuxième mur du bassin également non plan, de déformation **non corrélée** avec celle du premier et décrite par le même spectre, les 2.5 % sont à multiplier par  $\sqrt{2}$ , ce qui conduit à 3.5 %. Cette valeur paraît acceptable (à une telle distance du batteur, il est probable que d'autres phénomènes physiques, comme l'instabilité de Benjamin-Feir, auront davantage contribué à dégrader la houle).

Dans le cas où il y a corrélation entre les déformations des deux murs, le problème se complique quelque peu. Toutefois cette corrélation a des effets antagonistes sur les modes pairs et impairs et, si plusieurs modes sont générés, le facteur  $\sqrt{2}$  peut sans doute être conservé.

## Conclusion

On a donc, en fin de compte, obtenu une expression fort simple (1) reliant les coefficients  $A_n$  de la perturbation à la densité spectrale  $S_\zeta(q)$  des imperfections de paroi. Un problème qui se pose en pratique est la détermination de cette densité spectrale, la procédure suivie au paragraphe 5.3 étant par trop grossière et arbitraire. De même l'application de la formule (2) de l'annexe 3 pour passer d'un défaut  $\zeta(x, z)$  à un défaut équivalent  $\zeta_0(x)$  n'est peut-être pas commode d'application. Enfin il reste à étendre les résultats obtenus ici au cas de la houle irrégulière. La théorie développée étant linéaire, il n'y a pas de difficulté de principe, et on pourra se référer à Cointe (1993).

Par ailleurs, afin de valider les résultats obtenus, et de quantifier l'importance relative des défauts de paroi par rapport à d'autres effets perturbateurs, il pourrait être intéressant de procéder à une campagne expérimentale spécifique.

## Références

COINTE, R., 1993, "Peut-on générer de la houle multidirectionnelle 'réaliste' dans un bassin de traction?", Actes des Quatrièmes Journées de l'Hydrodynamique, Nantes.

## Annexe 1 : résolution du cas résonnant par la méthode des échelles multiples

On suppose donc  $q$  tel que :

$$k_0 - q = k_n = \sqrt{k_0^2 - \frac{n^2 \pi^2}{b_0^2}}$$

On cherche alors  $\varphi_{1n}$  sous la forme :

$$\varphi_{1n} = \left\{ a_n(\epsilon x, \epsilon y) \cos \frac{n\pi}{b_0} y + b_n(\epsilon x, \epsilon y) \sin \frac{n\pi}{b_0} y \right\} e^{ik_n x}$$

avec  $\epsilon \ll 1$ .

Les conditions aux limites à satisfaire sont alors :

$$b_n(\epsilon x, 0) = 0$$

$$b_n(\epsilon x, \epsilon b_0) = (-1)^n \frac{b_0}{n\pi} \beta$$

où  $\beta = O(\epsilon)$

$$a_n(0, \epsilon y) = 0$$

$$b_n(0, \epsilon y) = 0$$

$$b_n(d, \epsilon y) = 0$$

La condition de Helmholtz que doit vérifier  $\varphi_{1n}$  donne, à l'ordre  $\epsilon$ , pour  $a_n$  et  $b_n$  :

$$i k_n a_{nx} + \frac{n\pi}{b_0} b_{ny} = 0$$

$$-\frac{n\pi}{b_0} a_{ny} + i k_n b_{nx} = 0$$

Il apparaît alors qu'une solution du type :

$$b_n = \lambda y \quad a_n = \frac{i}{k_n} \frac{n\pi}{b_0} \lambda x$$

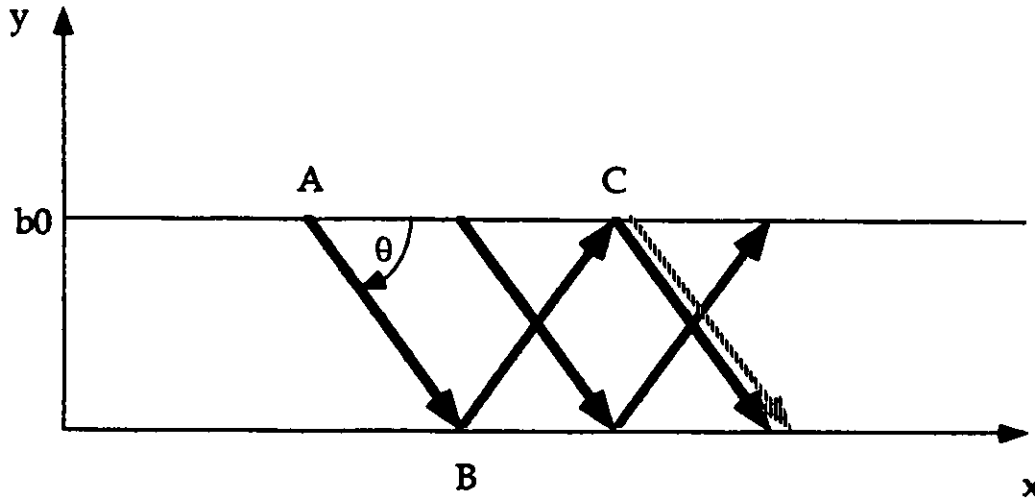
convient. La condition de glissement vérifiée par  $b_n$  en  $y = b_0$  nous donne  $\lambda$  et on obtient alors :

$$a_n = -\frac{1}{2} (-1)^n \frac{\alpha (k_0 - k_n) k_0}{k_n b_0} x$$

soit donc le résultat recherché.

On aura remarqué que les conditions aux limites en  $x = 0$  et  $x = d$  pour  $b_n$  ne sont satisfaites qu'à l'ordre  $\epsilon$ . On peut les satisfaire rigoureusement en rajoutant à  $\varphi_{1n}$  des termes solutions du problème homogène (comme en 3.2) dont l'amplitude sera également d'ordre  $\epsilon$ .

## Annexe 2 : calcul simple fondé sur l'optique géométrique



Nous décrivons dans cette annexe un calcul simple, fondé sur l'optique géométrique, des conditions de résonance dans le cas d'un défaut de paroi sinusoïdal. Ce calcul permet de retrouver les résultats de la section 3.

La houle incidente est donnée (en utilisant les notations définies en 2) par :

$$\varphi_I(x, y) = \frac{ag}{\omega} \exp(ik_0 x) = \frac{ag}{\omega} \varphi_0$$

On cherche une solution sous la forme

$$\varphi = \frac{ag}{\omega} (\varphi_0 + \varphi_1 + \dots)$$

On suppose comme précédemment la paroi "gauche" ondulée, d'équation  $y = b_0 + \alpha \sin(qx)$  et la paroi  $y = 0$  plane. La condition de glissement en  $y = b_0$  s'écrit alors à l'ordre  $\epsilon$  :

$$\varphi_{1y} = \beta \exp(i(k_0 + q)x) + \beta \exp(i(k_0 - q)x)$$

avec  $2\beta = i\alpha q k_0$

Une solution particulière pour le mode différence (deuxième terme du membre de droite) est un mode propagatif que l'on peut écrire, en se limitant à la solution se propageant vers les  $x$  positifs et les  $y$  négatifs :

$$\varphi_{1P} = \gamma \exp(i[(k_0 - q)x - \nu y])$$

où  $\nu^2 = k_0^2 - (k_0 - q)^2$  et où  $-i\nu\gamma \exp(i\nu b_0) = \beta$ .

Supposons que cette houle soit générée au point A (voir figure ci-dessus). Sur le trajet AB, l'onde est donnée par la formule précédente. Il est facile de montrer qu'après réflexion en B, puis en C, l'onde sur le trajet CD est donnée par :

$$\varphi_{1R} = \gamma \exp(i[(k_0 - q)x - \nu y + 2\nu b_0])$$

Il en résulte que si  $\nu b_0 = m\pi$  avec  $m$  entier strictement positif, alors, au point C l'onde directe émise sera en phase avec l'onde émise en A puis réfléchi en B et en C. Il y a résonance. Ce résultat n'est pas surprenant : le nombre d'onde  $\nu$  correspond en effet alors à un mode propre transversal du bassin.

On notera qu'entre B et C la perturbation générée par la partie de la paroi ondulée située après le point A peut s'écrire, dans le cas résonnant et en prenant en compte à la fois l'onde émise entre B et C et l'onde émise entre A et B puis réfléchi entre B et C :

$$\varphi_{1T} = 2\gamma_m \exp(i(k_0 - q)x) \cos(\nu y)$$

avec

$$\gamma_m = \frac{(-1)^{m+1}}{2} \frac{\alpha k_0 q}{\nu}$$

Si  $\Delta$  est l'amplitude de la perturbation en  $A$ , c'est-à-dire si cette perturbation est donnée en  $A$  par :

$$\varphi_1 = \Delta \exp(i(k_0 - q)x) \cos(\nu y)$$

en  $C$  elle sera donc augmentée de l'amplitude de l'onde calculée ci-dessus, d'où :

$$\Delta(x + AC) \simeq \Delta(x) + \frac{d\Delta}{dx} AC = \Delta(x) + 2\gamma_m$$

avec  $AC = 2b_0(k_0 - q)/\nu$ .

On en déduit qu'à la résonance, c'est-à-dire pour

$$\sqrt{k_0^2 - (k_0 - q)^2} = \frac{m\pi}{b_0}$$

avec  $m$  entier, on a :

$$\frac{d\Delta}{dx} = \frac{(-1)^{m+1}}{2} \frac{\alpha k_0 q}{b_0(k_0 - q)}$$

Ceci conduit donc au même résultat que celui obtenu en 3.3 en intégrant sur la longueur  $d$  sur laquelle la paroi était supposée ondulée.

### Annexe 3 : défauts de parois dépendant également de la cote verticale $z$

Soit alors  $\zeta(x, z)$  le défaut de planéité. La condition de glissement pour  $\varphi_1$  s'écrit :

$$\varphi_{1y} = \zeta_x \varphi_{0x} + \zeta_z \varphi_{0z}$$

soit :

$$\varphi_{1y} = \frac{i k_0 e^{ik_0 x}}{\text{ch } k_0 h} (\zeta_x \text{ch } k_0 z - i \zeta_z \text{sh } k_0 z)$$

On tire alors avantage de ce que  $[\text{ch } k_0 z, \cos k_n z]$  (avec  $\omega^2 = -g k_n \text{tg } k_n h$ ) forment une base complète et orthogonale sur  $[0, h]$ , pour écrire :

$$\zeta_x \text{ch } k_0 z - i \zeta_z \text{sh } k_0 z = A_0(x) \text{ch } k_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) \cos k_n z$$

On vérifie facilement qu'une solution particulière du type

$$e^{i(k_0 \pm q)x} \cos k_n z f(y)$$

ne peut être qu'en  $f(y) = \text{ch } \lambda y$  (avec  $\lambda$  assez grand), et que donc il ne peut y avoir de résonance pour ces modes. En conséquence le défaut  $\zeta(x, z)$  est équivalent à un défaut  $\zeta_0(x)$  défini par :

$$\frac{\partial \zeta_0}{\partial x} \int_0^h \text{ch}^2 k_0 z dz = \int_0^h \text{ch } k_0 z \left[ \frac{\partial \zeta}{\partial x} \text{ch } k_0 z - i \frac{\partial \zeta}{\partial z} \text{sh } k_0 z \right] dz \quad (2)$$

