

5^e JOURNÉES DE L'HYDRODYNAMIQUE

22, 23, 24 mars 1995 – ROUEN

**Méthodologie expérimentale
pour l'étude d'ondes longues internes**

H. Michallet, E. Barthélemy et J.M. Barnoud
Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels
B.P. 53X 38041 Grenoble Cedex
tel: 76.82.51.18
E-mail: michallet@img.fr

Résumé

L'équation de Korteweg-de Vries décrit très bien les ondes solitaires internes de faibles amplitudes lorsque le milieu est constitué d'une couche mince devant la hauteur totale. Nous cherchons à vérifier expérimentalement une relation de type KdV modifié (mKdV) pour des épaisseurs de couches du même ordre de grandeur. Nous disposons d'un petit canal (3m de long pour 10cm de large), et le milieu est constitué de deux fluides non miscibles (eau et pétrole). Nous nous attachons à mesurer la "masse" de l'onde solitaire, que l'on rapporte à son amplitude. Nous discutons de divers facteurs d'influence tels que la tension superficielle, la dissipation ou l'établissement de l'onde. Enfin, nous présentons des résultats pour trois rapports de couches (niveau d'interface sur hauteur totale: $h/H=0,66$; $0,77$ & $0,86$).

Summary

It is well known that the KdV equation is a very good description for small amplitude interfacial waves and when one of the layer is thin compared to the total depth. In the case of two layers of equivalent thickness, an alternative equation of mKdV type is more relevant. We aim with the experimental part of this study to check our theory. Our experimental set-up is a small flume (3m long for 10cm wide), with two non miscible fluids (water and petrol). Solitary waves are generated. The criterion chosen to compare with the theories is the duration of a solitary pulse versus the amplitude. We discuss the influence of the surface tension, dissipation and the distance for the wave to be established. Results for three layer thickness ratio are presented.

1. Introduction

En mer, le degré de salinité et la température ne varient pas linéairement avec la profondeur. Un milieu "bicouche", constitué de deux couches homogènes distinctes, modélise souvent la réalité avec une bonne approximation. De part la forte variation de densité qu'elle met en évidence, l'interface séparant les deux couches peut être notamment le lieu de propagations d'ondes longues. Nous savons que l'équation de Korteweg-de Vries (KdV) décrit très bien des ondes solitaires dans un milieu constitué d'une couche supérieure mince devant la hauteur totale [5]. Qu'advient-il lorsque les hauteurs de couche sont du même ordre de grandeur? Funakoshi et Oikawa [3] ont abordé numériquement ce problème, mais leurs travaux, comme c'est souvent le cas [1,2,3,4], assimilent la surface libre à un toit rigide. Nous ne faisons pas cette hypothèse afin de vérifier les conditions expérimentales décrites plus loin. Nous cherchons la solution sous forme d'un développement en série d'un petit paramètre ε . Nous supposons le milieu constitué de deux couches distinctes, et nous avons développé la différence de densité des deux fluides considérés en série du paramètre ε [7]. Supposant un développement du niveau d'interface de la forme "petites" amplitudes:

$$h(x,t) = h_0 + \varepsilon^2 h_2(x,t) + \varepsilon^4 h_4 + \dots \quad (1a)$$

nous obtenons une équation de type KdV, dont la solution onde solitaire est de la forme:

$$h_2(x_0,t) = A \operatorname{sech}^2(\Omega_k t) \quad (1b)$$

En revanche, si nous cherchons un développement "grandes" amplitudes, nous obtenons une solution de type KdV modifié:

$$h(x,t) = h_0 + \varepsilon h_1(x,t) + \varepsilon^2 h_2 + \dots \quad \text{avec:} \quad h_1(x_0,t) = A \frac{\operatorname{sech}^2(\Omega_m t)}{1 - \mu \operatorname{th}^2(\Omega_m t)} \quad (2a, b)$$

où t représente le temps; h_0 est le niveau repos égal au niveau moyen; les pulsations Ω_k , Ω_m et le paramètre mKdV μ sont liés aux données du problème (rapport de couches, densités) et à l'amplitude A (voir plus loin §3c, éq.6).

2. Dispositif expérimental

a) Fluides utilisés

Nous avons réalisé un dispositif expérimental où le bicouche est constituée de deux fluides non miscibles (épaisseur d'interface nulle). Les fluides considérés sont de l'eau colorée (densité 1kg/l) et du pétrole désodorisé EXXOL D60 (densité 0,78kg/l). D'autres couples de fluides sont possibles [4]. Nos calculs ont été menés pour différents ordres de grandeurs de rapports de

densités. Le fort rapport que nous considérons ici ne pose donc pas de problème majeur. En revanche, nous devons noter que la viscosité de l'EXXOL D60 est plus importante que celle de l'eau (1,64 cst), ce qui devrait conduire à plus de dissipation à l'interface et aux parois.

b) Le canal

Afin de simplifier le mode opératoire, nous avons réalisé un petit canal (3m de long pour 10cm de large). Ces faibles dimensions permettent l'utilisation de faibles quantités de fluides, un remplissage précis et rapide, la réalisation simple d'une condition initiale, peu de temps d'attente entre deux essais (entre 5 et 10 minutes). La couche mince est en haut (fig.1). Pour créer une condition initiale d'onde solitaire, nous délimitons l'extrémité droite du canal en abaissant une guillotine. Nous transvasons (de la partie gauche à la partie droite) une petite quantité de pétrole à l'aide d'une pompe. La distance séparant la guillotine du mur est modulable en vue de modifier la longueur de la condition initiale.

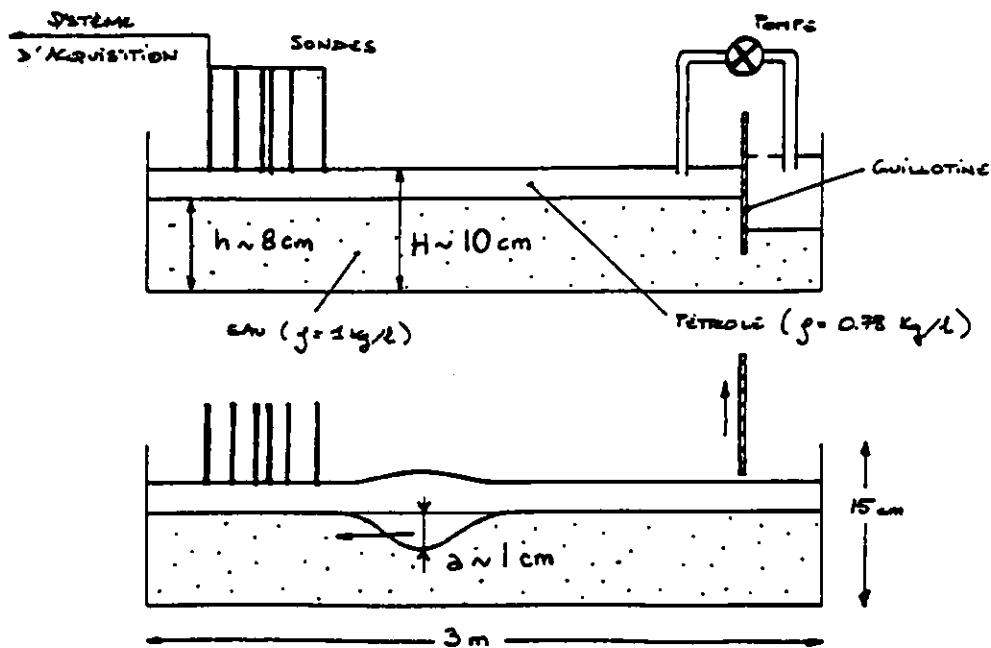


figure 1: dispositif expérimental; condition initiale et établissement de l'onde.

c) Chaîne de mesure

Pour mesurer l'onde ainsi générée, nous disposons de sondes à ultrasons réalisées au LEGI par D.Auchère et J.P.Barbier-Neyret. Ces sondes, placées à la surface libre, émettent et captent un signal ultrasonore qui se réfléchit sur le fond du canal. Ce temps de parcours dépend de la densité du fluide traversé. Lors du passage de l'onde, une plus grande quantité de "fluide léger" est traversée, la mesure est donc bien proportionnelle aux dénivellations d'interface.

La céramique piézoélectrique des sondes mesurent $8 \times 3 \text{ mm}^2$. Placées longitudinalement dans le canal, elles ne prennent pas une mesure ponctuelle de la position de l'interface, mais réalisent plutôt une moyenne sur 8mm de signal. Compte tenu de la courbure de l'onde solitaire, cette nuance semble négligeable. De plus, plaçant deux sondes en parallèle, l'une longitudinalement, l'autre latéralement, aucune différence n'a été décelée sur les enregistrements.

d) Hauteurs de couches

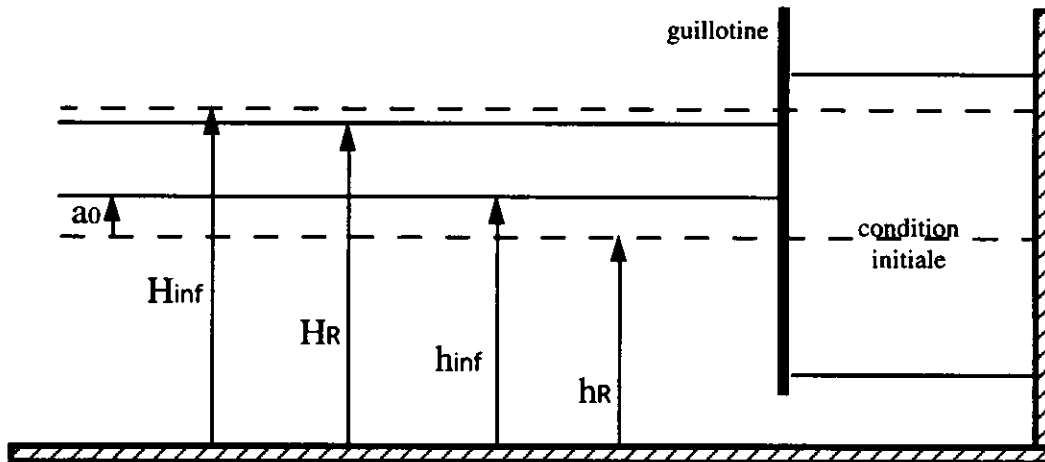


figure 2: Modification du rapport de couches:
niveaux avant (_ _ _) et après (_) constitution de la condition initiale.

Considérons h_R et H_R hauteurs repos d'interface et de surface libre. Le canal est de longueur fini; la quantité de pétrole prélevée à gauche de la guillotine (réintroduite à droite: cf. fig.1), élève l'interface et abaisse la surface libre (fig.2). Nous avons choisi de considérer ces hauteurs (notées h_{inf} et H_{inf}) comme paramètres de l'onde observée, et non h_R et H_R . En effet, le milieu rencontré par l'onde est bien constitué des couches h_{inf} et $(H_{inf} - h_{inf})$. Ce point est important, car pour la théorie (canal infini) $h_{inf} = h_R$; nous verrons plus loin (§3c, éq.6) comment interviennent les grandeurs h_{inf} et H_{inf} dans le calcul des grandeurs caractéristiques de l'onde. De plus, lorsque l'onde se propage, elle se dissipe; nous retrouvons un niveau derrière l'onde compris entre h_{inf} et h_R (fig.3). La valeur de ce niveau est difficilement estimable ce qui rend délicat le traitement de l'onde réfléchie. Nous appelons a_0 la différence $h_{inf} - h_R$.

La différence de niveaux de surface $H_R - H_{inf}$ présente un inconvénient supplémentaire: il en découle une condition initiale d'onde solitaire externe. Les efforts menés en vue de la supprimer ou de l'amortir ont été vains. Cette onde externe se propage beaucoup plus vite que les ondes internes; il n'y a pas d'interaction effective à la génération [5]. De plus, l'amplitude de sa signature à l'interface reste relativement faible (environ 3% de l'amplitude du soliton interne). Nous nous sommes donc attachés à placer nos sondes de telle sorte que l'onde externe réfléchie ne se superpose pas à l'onde interne, et à éliminer les signaux pour lesquels nous n'y serions pas parvenu. Par ailleurs, cette onde se dissipant très peu au cours de l'enregistrement, nous considérons que le niveau de surface reste constant égal à H_{inf} .

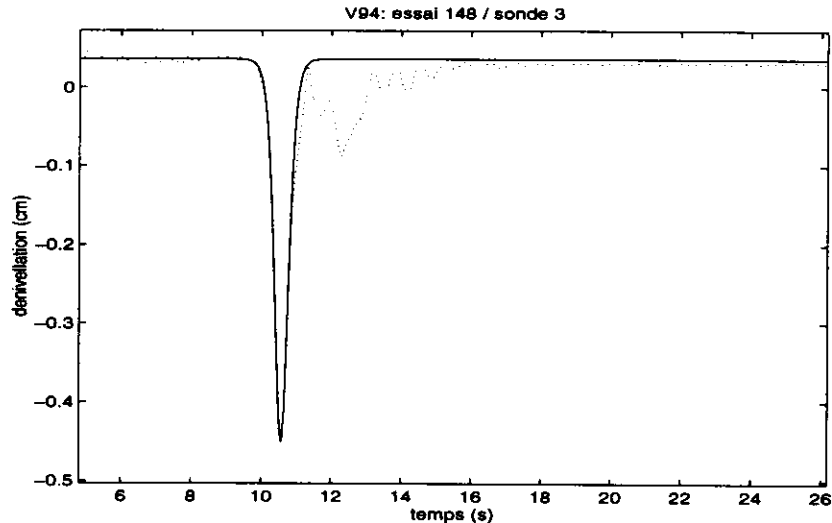


figure 3:

(...) signal expérimental et (—) ajustements de type KdV et mKdV confondus.
 On remarquera le niveau infini (à gauche du soliton) supérieur au niveau repos (égal à 0);
 le niveau du signal à l'arrière de l'onde est compris entre niveau infini et niveau repos.
 Rapport de couches: $h/H=0,86$; distance de la sonde au batteur: $d=110\text{cm}$.

e) Étalonnage

Avant chaque série d'essais, un étalonnage est réalisé afin de convertir les mesures de tension de sortie du suiveur à ultrasons en dénivellations d'interface. En remplissant le canal par le bas, on élève l'interface d'une hauteur Δh lue (à 0,1mm près) à l'aide d'une pointe limnimétrique. La différence de tension ΔV entre positions haute et basse correspond à cette hauteur. On redescend alors l'interface à la position qui correspondra au niveau zéro et on lit V_0 . Si V est la mesure de tension instantanée, le niveau d'interface dh se déduit aisément:

$$dh = \frac{\Delta h}{\Delta V} (V - V_0) \quad (3)$$

La valeur $dh=0$ correspond donc au niveau repos du bicouche $h=h_R$. Or nous avons vu que le paramètre que nous devons considérer est h_{inf} et non h_R . Nous vérifions avant chaque essai la valeur de $a_0=h_{inf} - h_R$, et nous la comparons avec la valeur que nous pouvons extraire du signal avant passage de l'onde solitaire. Il est important d'obtenir cette valeur avec précision afin de recalibrer le signal lors du processus d'ajustement. Nous avons vérifié que l'erreur δa_0 sur a_0 reste inférieure à l'erreur de lecture sur la pointe limnimétrique, soit: $\delta a_0 < 0,2\text{mm}$.

3. Mesures

Nous avons placé les sondes:

- espacées régulièrement le long du canal (de 30 à 45cm), afin d'observer l'établissement et la dissipation de l'onde;
- regroupées sur environ 20cm, la dernière se situant à 20cm de l'extrémité du canal.

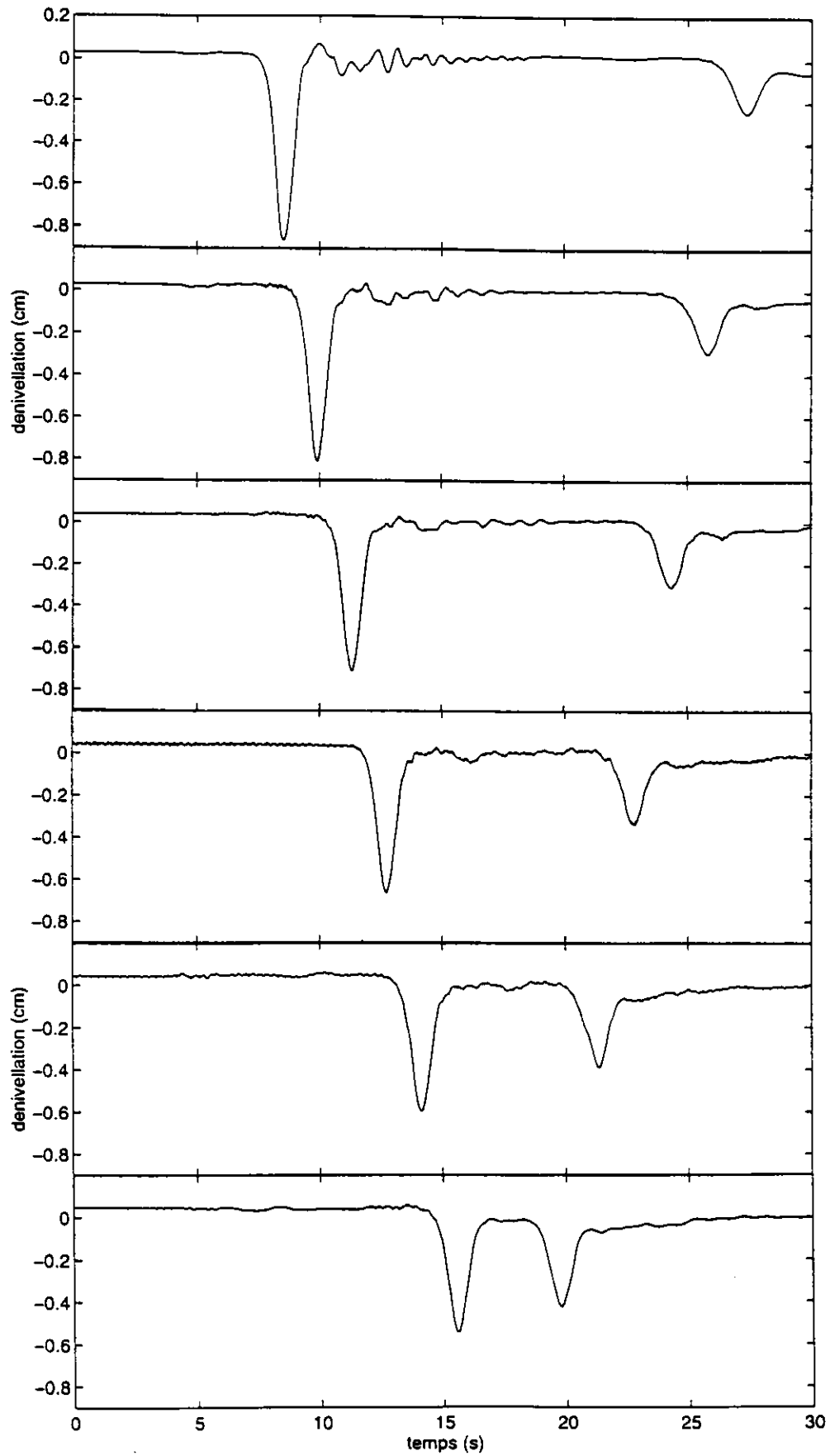


figure 4:

solitons incident et réfléchi. Rapport des couches: $h/H = 0,77$.
Distance des sondes au batteur (cm): 80, 110, 140, 170, 200, 230.

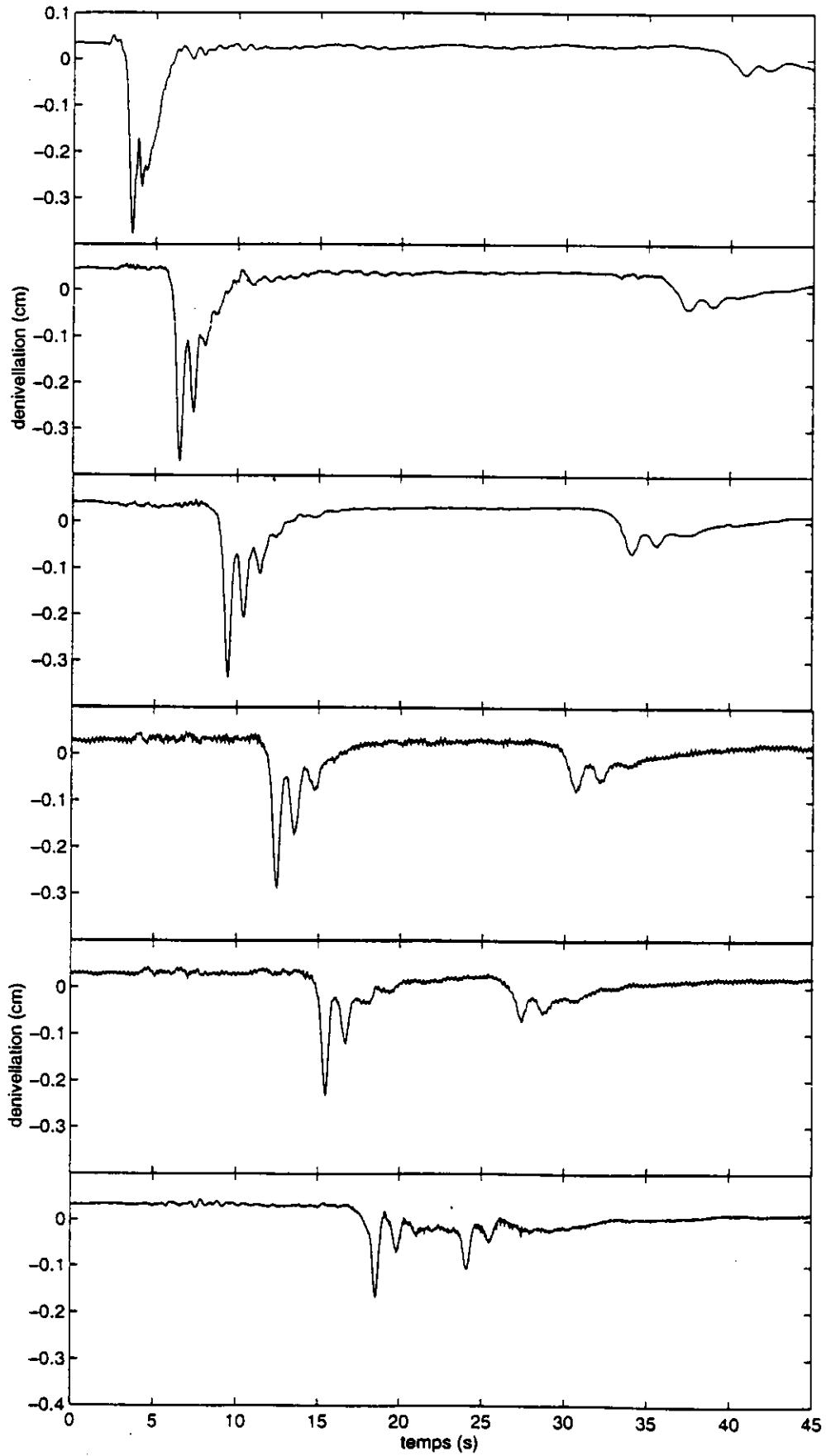


figure 5:

génération et réflexion de plusieurs solitons. Rapport de couches: $h/H = 0,88$.
 Distance des sondes au batteur (cm): 20, 65, 110, 155, 200, 245.

a) Dissipation

La dissipation de l'onde le long du canal n'est pas négligeable (fig.4); la perte d'amplitude sur 1,50m est d'environ 30%. Notons que cette atténuation est de l'ordre de celle observée par Koop & Butler [4] pour un canal plus long (environ 30% sur 2,60m). Ils déduisent de calculs numériques que la relation (longueur d'onde caractéristique - amplitude) de la théorie KdV est la même avec ou sans dissipation, exception faite des ondes de très petites amplitudes (amplitude sur hauteur totale inférieure à 0,01). On estime que la dissipation intervient sur des échelles de temps supérieures à celles des non linéarités et de la dispersion; le profil est en équilibre. Nous considérons donc qu'en chaque point du canal, nous avons une onde solitaire dont l'amplitude est différente; pour un même essai, chaque sonde fournira une évaluation des grandeurs caractéristiques.

b) Établissement de l'onde

A une onde solitaire, supposée de longueur d'onde infinie, devrait correspondre un signal parfaitement horizontal de part et d'autre d'une seule intumescence. Expérimentalement, on ne peut pas obtenir une telle onde. En effet, si le signal à l'avant de l'onde reste relativement propre, de nombreuses perturbations apparaissent à l'arrière. Il est difficile de réaliser une condition initiale ne générant qu'un seul soliton avec certitude (fig.5), et il est impossible de ne pas créer une onde dispersive à la suite de celui-ci [5]. On pourra comparer (fig.3) un signal "idéalisé" de type soliton et le signal complexe que nous obtenons. En revanche, la célérité de l'onde solitaire est proportionnelle à son amplitude, et de toutes façons plus importante que celle d'une onde dispersive. Donc plus nous nous plaçons "loin" de la génération, plus l'onde solitaire sera détachée de sa queue dispersive (et d'éventuels solitons plus petits). Nous appellerons "onde établie": la première intumescence importante du signal lorsqu'elle est "suffisamment" détachée de la suivante. Nous référant aux critères évoqués par Koop & Butler [4], nous pouvons considérer que l'onde est établie dès le premier tiers du canal. Nous discuterons plus loin cette affirmation.

c) Traitement

Le signal, une fois étalonné, est "filtré" par ajustement de courbes par la méthode des moindres carrés. La zone choisie pour cet ajustement concerne essentiellement l'avant de l'onde, que l'on espère non perturbée par le train dispersif (fig.6). Nous cherchons explicitement des profils de types KdV ou mKdV (éq.4). Les paramètres recherchés par le processus d'ajustement sont l'amplitude (a), la pulsation (ω) et la position du maximum (t_m). Le paramètre mKdV (μ) est calculé par une relation simple le liant à l'amplitude (a) (éq.6f).

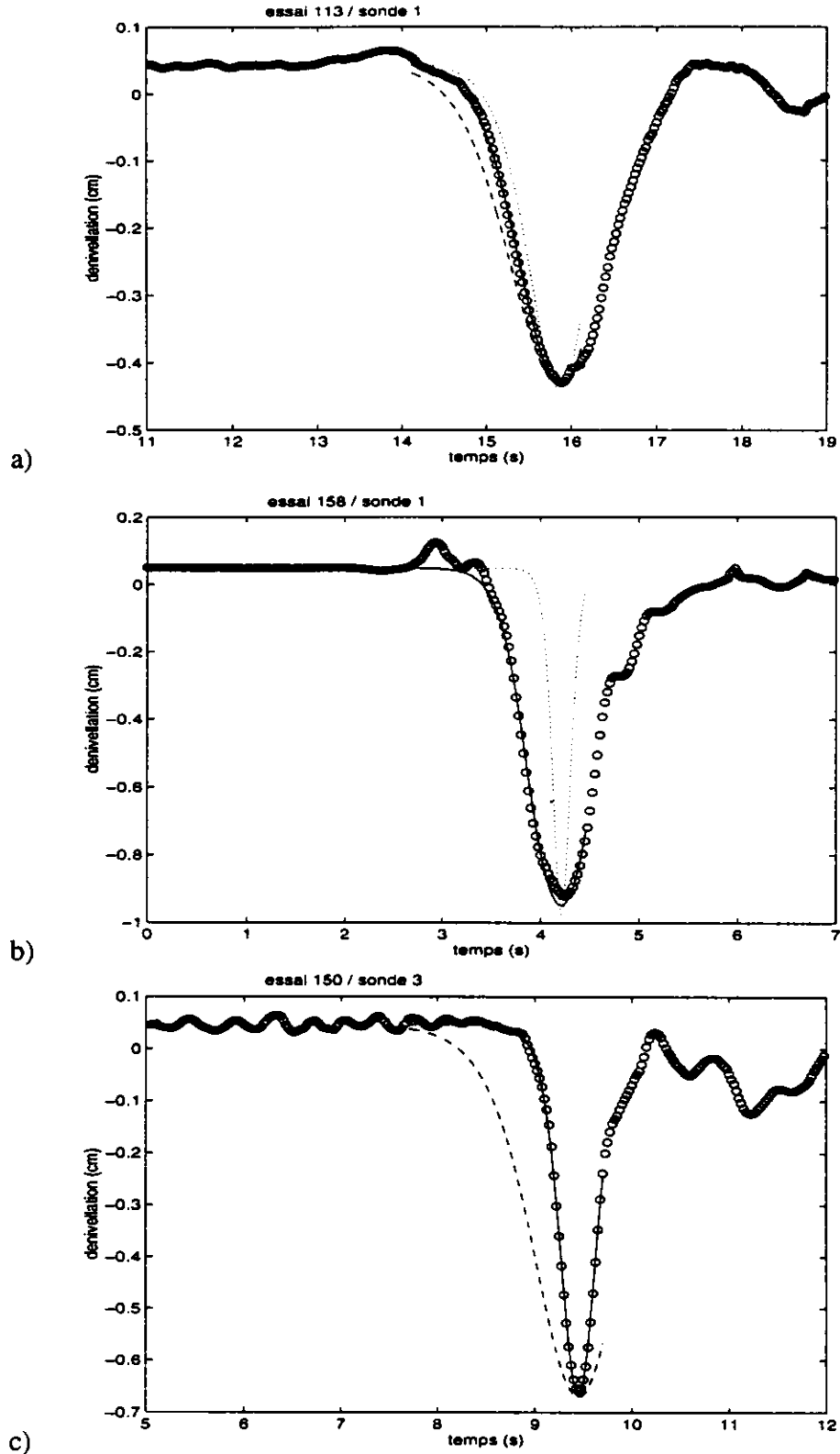


figure 6: (o) signal, (-) courbe ajusté, (...) solution de l'équation KdV, (--) solution mKdV (profils des solitons KdV & mKdV ayant même amplitude que le signal).
 La zone de tracé des courbes visualise la zone de traitement (durée correspondante: 2s).
 a) $h/H=0,66$. L'onde semble ne pas être encore établie (distance au batteur: $d=230\text{cm}$).
 b) $h/H=0,78$. La courbe mKdV est confondue avec la courbe ajustée. On remarquera la signature de l'onde de surface juste avant le soliton (qui ne semble pas être encore formé; $d=20\text{cm}$).
 c) $h/H=0,86$. La courbe KdV est confondue avec la courbe ajustée ($d=110\text{cm}$).

$$\boxed{\text{KdV:}} \quad h(t) = a \operatorname{sech}^2(\omega(t-t_m)) \quad \boxed{\text{mKdV:}} \quad h(t) = a \frac{\operatorname{sech}^2(\omega(t-t_m))}{1 - \mu(a) \operatorname{th}^2(\omega(t-t_m))} \quad (4a, b)$$

Dans la plupart des cas, l'ajustement de type KdV est très proche de celui de type mKdV (fig.3, 6), ce qui ne nous permet pas de déterminer le meilleur ajustement. Nous nous attachons alors à calculer Pul, qui est l'inverse de la "masse" de l'onde solitaire (fig.7). Nous comparons donc les deux grandeurs (notant que pour KdV, $\mu=0$ et donc $\text{Pul}=\omega$):

$$\text{Pul}_{\text{exp}} = \omega \frac{\sqrt{\mu(a)}}{\operatorname{arch}\sqrt{\mu(a)}} \quad \& \quad \text{Pul}_{\text{th}} = \Omega(A) \frac{\sqrt{\mu(A)}}{\operatorname{arch}\sqrt{\mu(A)}} \quad (5a, b)$$

Soient les relations théoriques: $\Omega = C \lambda$ (6a)

KdV: $\lambda_k = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{\bar{h}(-\bar{a})}}{\frac{1}{4} - \bar{h}^2} \frac{1}{H_0}$ (6b)

& $C_k = \sqrt{g \frac{1-\rho_0}{\rho_0} \left(\frac{1}{4} - \bar{h}^2\right) H_0 \left[1 - \frac{\bar{h} \bar{a}}{\frac{1}{4} - \bar{h}^2} - \frac{1}{2} \frac{1-\rho_0}{\rho_0} \left(\frac{1}{4} - \bar{h}^2\right)\right]}$ (6c)

mKdV: $\lambda_m = \frac{2\sqrt{3}}{H_0} \sqrt{(-\bar{a})(2\bar{h} + \bar{a})}$ (6d)

& $C_m = \sqrt{g \frac{1-\rho_0}{\rho_0} \frac{H_0}{4} \left[1 - 2(\bar{h} + \bar{a})^2 - \frac{3}{8} \frac{1-\rho_0}{\rho_0}\right]}$ (6e)

& $\mu = \frac{-\bar{a}}{2\bar{h} + \bar{a}}$ (6f)

où $H_0 = 2 \frac{H_{\text{inf}} + \frac{1-\rho_0}{2\rho_0} h_{\text{inf}}}{2 + \frac{1-\rho_0}{2\rho_0}}$ & $\bar{a} = A / H_0$ & $\bar{h} = \frac{h_{\text{inf}} - \frac{H_0}{2}}{H_0}$ (6g, h, i)

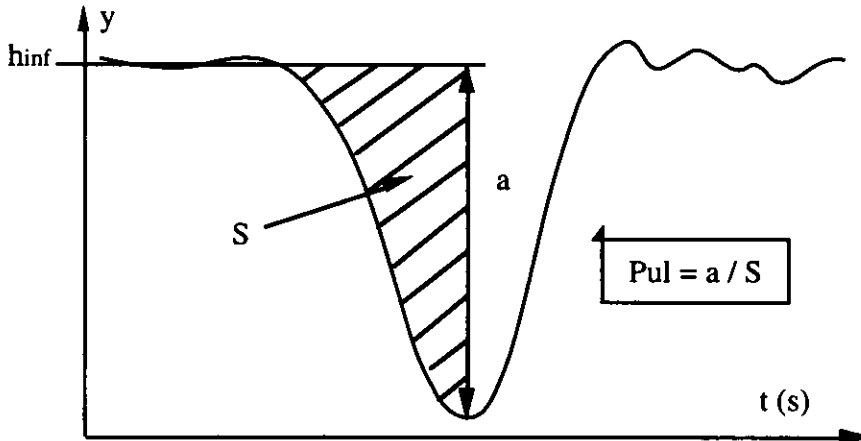


figure 7: Grandeur caractéristique de l'onde solitaire: $\text{Pul}=a/S$.
(a est l'amplitude, S est la surface hachurée correspondant à la masse).

d) Fréquence d'échantillonnage

La fréquence d'échantillonnage est de 40Hz. Compte tenu de notre choix de ne considérer qu'une petite partie du signal, l'ajustement est réalisé sur 80 points (fig.6). Afin de vérifier que cette valeur est suffisante, nous avons effectué une série d'essais échantillonnés à 120Hz. Chaque fichier "source" correspondant a été ensuite divisé en trois, les "sous-fichiers" ainsi constitués correspondent donc chacun à un essai virtuel qui aurait été échantillonné à 40Hz. La très bonne corrélation, entre les valeurs déduites de chaque fichier "source" et celles obtenues avec les trois sous-fichiers correspondants (amplitude et pulsation caractéristique Pul à 1% près), permet d'affirmer que l'échantillonnage à 40Hz est suffisant..

4. Résultats et discussion (cf. fig.8 & 9)

a) Comparaison des résultats avant et après traitement

Une première évaluation de Pul est effectuée sur le signal brut (cette valeur est prise pour paramètre d'entrée du processus d'ajustement). Nous avons tracé les points expérimentaux correspondants à ces valeurs (fig.8); leur dispersion est plus importante que celle des points obtenus après traitement (fig.9). Par ailleurs, les traitements de type KdV et mKdV donnent les mêmes résultats (les points sont confondus figure 9). Ceci semble valider notre technique d'ajustement.

b) Tension superficielle

Nous avons cherché à estimer l'influence de la tension superficielle. Pour cela, nous avons repris les équations fournies par Walker [6]. Ces courbes ne tiennent pas compte des modifications de célérité au deuxième ordre d'approximation, c'est pourquoi elles ne coïncident pas avec nos courbes KdV lorsque l'amplitude augmente. Néanmoins, le faible écart entre les courbes supérieure (avec prise en compte de la tension superficielle: $T=25\text{dyn/cm}$) et inférieure ($T=0$) donne une bonne idée de la faible importance de ce facteur d'influence.

c) Rôle du développement en densité

Les formules théoriques présentées en introduction (éq.1, 2) ont été obtenues en considérant que la différence de densité est de l'ordre de ε^2 . Ceci modifie un peu les calculs classiques, comme ceux Kakutani & Yamasaki [2]. On constate que cette hypothèse de calcul a plus d'influence, sur la relation Pul(A), lorsque h/H est grand.

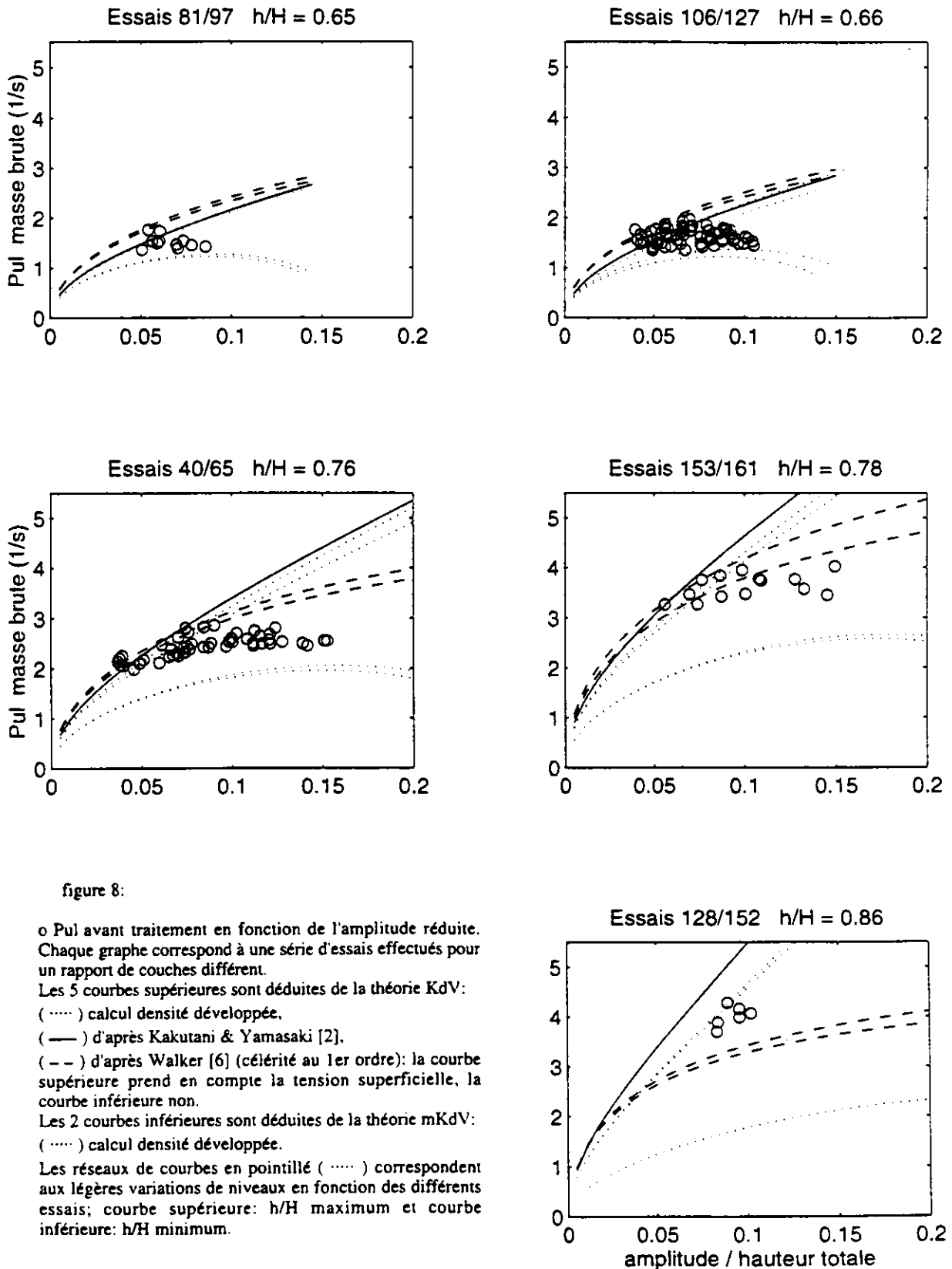


figure 8:

o Pul avant traitement en fonction de l'amplitude réduite. Chaque graphe correspond à une série d'essais effectués pour un rapport de couches différent.

Les 5 courbes supérieures sont déduites de la théorie KdV:

(.....) calcul densité développée.

(—) d'après Kakutani & Yamasaki [2].

(-- --) d'après Walker [6] (célérité au 1er ordre): la courbe supérieure prend en compte la tension superficielle, la courbe inférieure non.

Les 2 courbes inférieures sont déduites de la théorie mKdV:

(.....) calcul densité développée.

Les réseaux de courbes en pointillé (.....) correspondent aux légères variations de niveaux en fonction des différents essais; courbe supérieure: h/H maximum et courbe inférieure: h/H minimum.

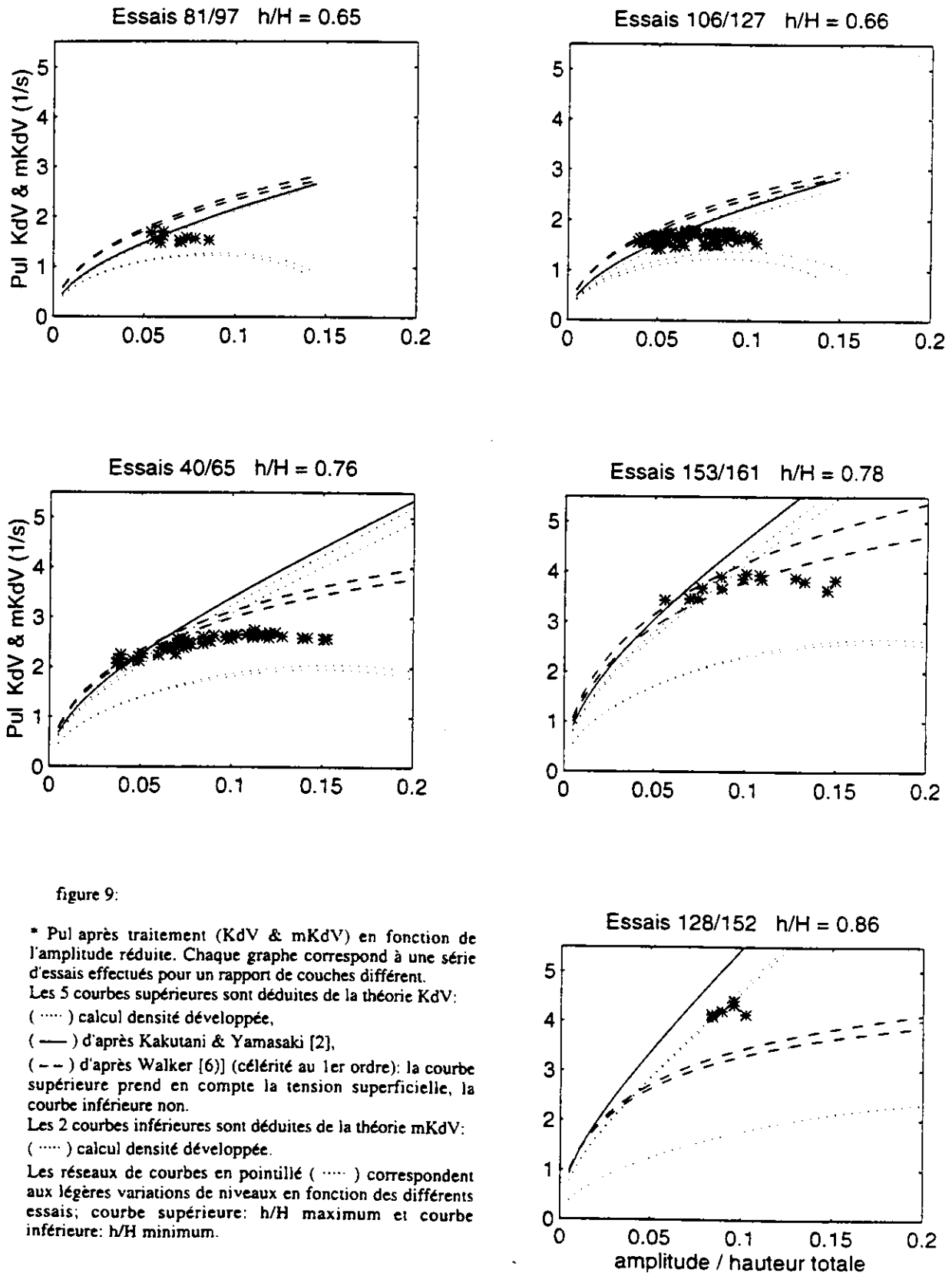


figure 9:

* Pul après traitement (KdV & mKdV) en fonction de l'amplitude réduite. Chaque graphe correspond à une série d'essais effectués pour un rapport de couches différent.

Les 5 courbes supérieures sont déduites de la théorie KdV:

- (.....) calcul densité développée,
- (—) d'après Kakutani & Yamasaki [2],
- (---) d'après Walker [6]) (célérité au 1er ordre): la courbe supérieure prend en compte la tension superficielle, la courbe inférieure non.

Les 2 courbes inférieures sont déduites de la théorie mKdV:

- (.....) calcul densité développée.

Les réseaux de courbes en pointillé (.....) correspondent aux légères variations de niveaux en fonction des différents essais; courbe supérieure: h/H maximum et courbe inférieure: h/H minimum.

d) Établissement

On pourra noter une dispersion des points expérimentaux plus importante lorsque les sondes sont espacées le long du canal plutôt que concentrées à son extrémité. Les essais 153 à 161 correspondent au premier type de positionnement, les essais 40 à 65 au second. Ce résultat nous conduit à douter du critère d'établissement choisi. En revanche la faible dispersion des points pour une zone de mesure du second type laisse à penser qu'alors l'onde est bien établie.

e) Rapports de couches

Lorsque la couche de pétrole est mince devant la hauteur totale ($h/H=0,86$), malgré le faible nombre de points expérimentaux, il semble que l'on vérifie très bien la théorie KdV. Quand les couches sont du même ordre de grandeur ($h/H=0,66$), le faible écart séparant les courbes KdV et mKdV rend délicat toute interprétation. De plus, les ondes sont d'autant plus longues (moins "pincées") que h/H est faible. Elles mettent plus longtemps à s'établir, et si nous plaçons nos sondes plus loin du batteur, nous sommes gênés par la réflexion. Il nous faudrait alors essayer de traiter les ondes réfléchies loin du mur. Le cas intermédiaire ($h/H=0,77$) reste peut-être le plus intéressant; il semblerait que lorsque l'amplitude augmente, nous nous écartons de la théorie KdV. Il nous faudrait compléter nos expériences; mais chercher à obtenir de grandes amplitudes impose de réaliser de grosses conditions initiales. Il est alors fréquent que l'onde déferle, le signal s'en trouve grandement perturbé, et l'onde met plus de temps à s'établir.

Références:

[1] Barthélemy E. (89) "Étude des ondes longues internes et de leur dynamique dans les zones côtières", thèse de l'U.J.F.

[2] Kakutani T. and Yamasaki N. (78) "Solitary Waves on a Two-Layer Fluid", J. of Phys. Soc. Japan.

[3] Funakoshi M. and Oikawa M. (86) "Long Internal Waves of Large Amplitude in a Two-Layer Fluid", J. of Phys. Soc. Japan.

[4] Koop C.G. and Butler G. (81) "An investigation of internal solitary waves in a two-fluid system", J. Fluid Mech.

[5] Segur H. and Hammack J.L. (81) "Soliton models of long internal waves", J. Fluid Mech.

[6] Walker L.R. (73) "Interfacial solitary waves in a two-fluid medium", Phys. of Fluids.

[7] Michallet H. and Barthélemy E. (93) "Analytical study of long internal waves of large amplitude", 19th General Assembly of the European Geophysical Society, Grenoble.