

5^e JOURNÉES DE L'HYDRODYNAMIQUE

22, 23, 24 mars 1995 – ROUEN

**ETUDE DE LA VAGUE D'ETRAVE
D'UN NAVIRE ELANCE**

E. FONTAINE *

R. COINTE * ¹

E. RIVOALEN †

* Bassin d'Essais des Carènes,
Chaussée du Vexin, 27100 Val de Reuil

† Groupe d'Energétique et de Mécanique du Havre
BP 540 76058 Le Havre

Résumé

L'objet de cet article est d'étudier dans quelle mesure la méthode des développements asymptotiques raccordés peut permettre de justifier l'approximation "parabolique" des équations du problème de la résistance de vagues d'un navire élancé. Le domaine et le degré de validité de cette approximation sont examinés en comparant les résultats du code de calcul qui résulte de cette analyse, à des solutions analytiques, puis à ceux d'expériences réalisées à cet effet.

Summary

The method of matched asymptotic expansions is used to see if it can provide a consistent perturbation procedure for the justification of the "parabolic" approximation of the wave resistance slender ship problem. The domain of validity and the accuracy of this approximation are examined by comparing the obtained results first to analytic solutions, and then to experiments carried out for this aim.

¹maintenant au Ministère de l'Environnement

1 Introduction

L'écoulement et la formation des vagues au voisinage de l'étrave d'un navire mince a donné lieu à plusieurs études, fondées sur la résolution du problème potentiel et utilisant une approximation "parabolique" des équations. Cette approche initialement proposée par Ogilvie (1967) consiste à ramener le problème tridimensionnel non-linéaire initial à un problème bidimensionnel instationnaire, éventuellement linéaire. Ogilvie (1972) résout analytiquement ce problème linéaire et propose une solution générale - mais très simplifiée - décrivant la forme de la vague d'étrave créée par un dièdre fin. Chapman (1976) résout partiellement le problème non-linéaire et prouve le bien fondé de cette théorie pour le calcul des coefficients hydrodynamiques d'une plaque plane oscillante dans un écoulement uniforme. L'augmentation des capacités de calcul et de stockage des ordinateurs a récemment rendu possible la résolution du problème non-linéaire complet. Faltinsen (1991) utilise cette approximation pour étudier l'écoulement au voisinage d'un navire mince et rapide ; Tulin (1994) et Maruo (1994) l'appliquent au calcul de la vague d'étrave d'un navire mince. Si cette théorie semble donner de bons résultats, son domaine de validité reste mal connu : citant Tulin (1994) "il faut apprendre les limitations de cette théorie et comment l'utiliser pour des nombres de Froude plus faibles".

Dans cette communication, on utilise le cadre théorique de la méthode des développements asymptotiques raccordés qui doit permettre une approche systématique du problème. On commence par définir les paramètres pertinents du problème, puis on étudie le problème intérieur au voisinage de l'étrave. Suivant l'ordre de grandeur de la largeur de l'étrave, on obtient un problème linéaire ou non-linéaire bidimensionnel dans chaque "tranche" de l'écoulement. Ce problème est résolu numériquement en supposant l'écoulement au repos à l'infini et en amont de l'étrave. Le domaine et le degré de validité de cette théorie sont alors évalués en comparant les résultats numériques aux travaux théoriques de Ogilvie (1972) et de Roberts (1989). Enfin, on compare les résultats théoriques et numériques à ceux d'expériences réalisées à cet effet à l'Université du Havre. L'écart le plus important qui apparaît entre la théorie et l'expérience tient au fait que l'élévation de surface libre observée n'est pas nulle au "nez" de l'étrave. Afin de voir si cet écart n'est pas dû à un effet tridimensionnel associé à l'écoulement global autour du navire, le problème extérieur (loin de l'étrave) est formulé et résolu. Le raccord entre la solution extérieure et la solution intérieure suggère que la seule influence de la solution extérieure sur la solution intérieure susceptible d'exister se situe à l'amont (conditions initiales pour le problème intérieur).

2 Position du problème.

On étudie l'écoulement au voisinage de l'étrave d'un navire se déplaçant à vitesse uniforme $-\vec{U}$ sur un plan d'eau au repos. Le fluide est supposé parfait, incompressible ; l'écoulement irrotationnel. Dans un référentiel relatif (mais galiléen) lié à la carène, le potentiel total peut s'écrire sous la forme $\phi(x, y, z) = Ux + \varphi(x, y, z)$.

L'étrave est définie par son tirant d'eau maximum h , sa demi-largeur maximum b . L'étude est faite sur une longueur L inconnue pour le moment. La géométrie de l'étrave est donnée sous la forme : $\frac{y}{b} = f\left(\frac{x}{L}, \frac{z}{h}\right)$. Les deux paramètres adimensionnels caractérisant l'étrave sont :

$$\tan \alpha = \frac{b}{L}, \quad \delta = \frac{h}{L}. \quad (1)$$

L'étrave est considérée comme fine lorsque $\alpha \ll \delta \ll 1$ alors qu'elle est qualifiée de mince lorsque $\alpha \simeq \delta \ll 1$. Ces deux hypothèses (étrave mince ou fine) sont mises à profit pour rechercher une solution asymptotique du problème.

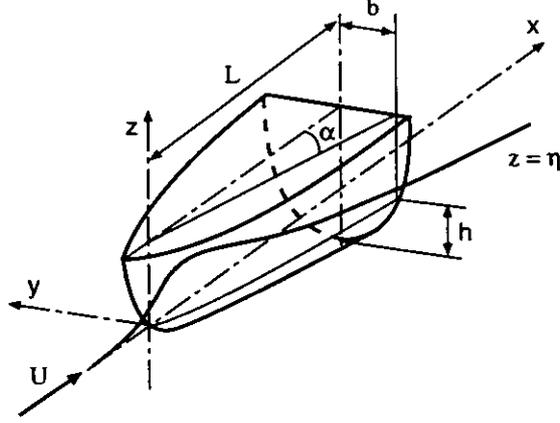


Figure 1: Définitions géométriques

3 Les problèmes intérieurs

Les variables intérieures sont définies par :

$$\tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{h}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{h}, \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta}{b}, \quad \tilde{\varphi} = \frac{\varphi}{Ub} \quad (2)$$

où $z = \eta(x, y)$ est l'élévation de la surface libre. On se propose de rechercher une solution approchée des fonctions potentiel et élévation sous forme d'un développement en fonction de δ :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}; \delta) &= \hat{\mu}_1(\delta) \hat{\varphi}_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) + o(\hat{\mu}_1), \\ \tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{y}; \delta) &= \hat{\nu}_1(\delta) \hat{\eta}_1(\tilde{x}, \tilde{y}) + o(\hat{\nu}_1) \end{aligned} \quad (3)$$

où les fonctions $\hat{\eta}_1$, $\hat{\varphi}_1$ et leurs dérivées sont supposées d'ordre $O(1)$ et indépendantes de δ si les fonctions de jauge $\hat{\mu}_1$ et $\hat{\nu}_1$ sont correctement choisies.

3.1 simplification des équations

On examine successivement les dégénérescences de l'équation de Laplace, de la condition de glissement et des conditions de surface libre lorsque l'étrave est mince ou fine.

- L'équation de Laplace s'écrit compte tenu du choix des variables adimensionnelles :

$$\delta^2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1}{\partial \tilde{z}^2} + o(1) = 0 \quad (4)$$

Elle se réduit, en première approximation, à sa forme bidimensionnelle dans chaque plan transverse ($\tilde{x} = Cste$) :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_1}{\partial \tilde{z}^2} = 0 \quad , \quad (5)$$

conformément à l'idée intuitive que l'évolution dans la direction x est très faible devant les évolutions transversales. Les phénomènes tridimensionnels, tels que la formation du dièdre de Kelvin, qui apparaissent loin du navire ne peuvent pas être décrits par cette équation. Le potentiel $\tilde{\varphi}_1$ doit s'interpréter comme la solution intérieure du problème.

- La condition de glissement sur la carène s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}} (1 + \hat{\mu}_1 \tan \alpha \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial \tilde{x}}) - \frac{\hat{\mu}_1}{\delta} \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial \tilde{y}} + \frac{\hat{\mu}_1 \tan \alpha}{\delta} \frac{\partial f}{\partial \tilde{z}} \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial \tilde{z}} + o(1) = 0 \quad \text{pour} \quad \tilde{y} = \frac{\tan \alpha}{\delta} f(\tilde{x}, \tilde{z}) \quad (6)$$

La carène est supposée être suffisamment profilée pour que l'on puisse écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} = O(1), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = O(1); \quad (7)$$

les formes à très forte pente longitudinale sont donc exclues.

L'équation la moins dégénérée est obtenue en imposant $\hat{\mu}_1(\delta) = \delta$ indépendamment du fait que l'étrave soit fine ou mince.

Pour une étrave mince ($\alpha \simeq \delta \ll 1$), la condition qui en résulte est imposée sur la position exacte du corps (dans la tranche considérée) et se réduit au premier ordre à :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \hat{y}} + \frac{\tan \alpha}{\delta} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \bar{z}} \right] (\bar{x}, \hat{y} = \frac{\tan \alpha}{\delta} f(\bar{x}, \hat{z}), \hat{z}) = 0 \quad (8)$$

Pour une étrave fine ($\alpha \ll \delta \ll 1$), la condition résultante peut être imposée sur l'axe $\hat{y} = 0$ sans introduire d'erreur significative à cet ordre :

$$\left[\frac{\partial f}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \hat{y}} \right] (\bar{x}, 0, \hat{z}) = 0 \quad (9)$$

- La condition cinématique de surface libre s'écrit :

$$\frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \bar{x}} + \delta \tan \alpha \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \bar{x}} \cdot \frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\tan \alpha}{\delta} \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \hat{y}} \cdot \frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{y}} - \frac{1}{\hat{\nu}_1} \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \bar{z}} + o(1) = 0 \quad \text{en} \quad \hat{z} = \hat{\nu}_1 \frac{\tan \alpha}{\delta} \hat{\eta}_1 \quad (10)$$

La forme la plus riche est obtenue en imposant $\hat{\nu}_1 = 1$.

Dans le cas d'une étrave mince, la condition (10) est imposée sur la position exacte de la surface (dans la tranche) et elle se réduit à :

$$\left[\frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{\tan \alpha}{\delta} \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \hat{y}} \cdot \frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \bar{z}} \right] (\bar{x}, \hat{y}, \hat{\nu}_1 \frac{\tan \alpha}{\delta} \hat{\eta}_1) = 0 \quad (11)$$

L'hypothèse d'étrave fine permet de justifier la linéarisation de cette condition qui peut alors être imposée sur l'axe $\hat{z} = 0$:

$$\left[\frac{\partial \hat{\eta}_1}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \bar{z}} \right] (\bar{x}, \hat{y}, 0) = 0 \quad (12)$$

- La condition dynamique de surface libre s'écrit, avec $F_L = \frac{U}{\sqrt{gL}}$:

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \delta \tan \alpha \left(\frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\tan \alpha}{\delta} \left[\left(\frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \hat{y}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right] + \frac{1}{\delta F_L^2} \hat{\eta}_1 + o(1) = 0 \quad (13)$$

Afin d'obtenir une solution non triviale pour $\hat{\eta}_1$, il faut imposer :

$$\hat{F}_L^2 = \delta F_L^2 \geq 1 \quad (14)$$

Pour une étrave mince, la condition dynamique de surface libre (13) se réduit alors à :

$$\left[\frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \frac{\tan \alpha}{\delta} \left(\left(\frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \hat{y}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \bar{z}} \right)^2 \right) \right] (\bar{x}, \hat{y}, \frac{\tan \alpha}{\delta} \hat{\eta}_1) + \frac{\hat{\eta}_1}{\hat{F}_L^2} = 0 \quad (15)$$

Si l'étrave est fine, la condition dynamique résultante est linéaire :

$$\left[\frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\hat{F}_L^2} \hat{\eta}_1 \right] (\bar{x}, \hat{y}, 0) = 0 \quad (16)$$

On peut, dans ce cas, éliminer l'élévation de surface libre avec (12) et retrouver la condition de Neuman-Kelvin portant sur le potentiel seul :

$$\left[\frac{\partial^2 \hat{\varphi}_1}{\partial \bar{x}^2} + K \frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \bar{z}} \right] (\bar{x}, \hat{y}, 0) = 0, \quad \text{avec} \quad K = \frac{1}{\delta F_L^2} \leq 1 \quad (17)$$

En résumé, l'écoulement à surface libre de fluide parfait est régi en champ proche par l'équation de Laplace bidimensionnelle (5) soumise aux conditions aux limites (8), (11), (15) lorsque l'étrave est mince, et (9), (12), (16) pour une étrave fine.

3.2 domaine de validité de la théorie

La condition (14) permet de préciser les domaines d'applications de cette théorie :

La première interprétation consiste à fixer L égale à la longueur du navire, et à choisir U suffisamment grand pour que $F_L \geq \frac{1}{\sqrt{\delta}}$. Ces équations asymptotiques s'appliquent donc au calcul de l'écoulement au voisinage de la carène d'un navire mince et rapide (Faltinsen, 1991). Si F_L est très supérieur à $\frac{1}{\sqrt{\delta}}$, alors le dernier terme de (13) devient négligeable ; la gravité joue un rôle secondaire lorsque le nombre de Froude est important. Ce régime d'écoulement correspond en pratique au cas d'un navire planant (voir, par exemple Tulin, 1986). Les accélérations imposées au fluide lors du passage de la carène sont alors très supérieures à la gravité qui peut donc être négligée.

Dans la seconde interprétation, la vitesse U et le tirant d'eau h du navire sont fixés ; L est choisie telle que :

$$L \leq U \sqrt{\frac{h}{g}} = h F_h, \quad F_h = \frac{U}{\sqrt{gh}} \quad (18)$$

Cette équation donne la valeur supérieure de L , ce qui permet de vérifier si l'on est ou non dans l'un des deux cas asymptotiques (étrave mince ou fine) qui autorisent l'emploi d'un de ces modèles. L donne alors une "mesure" du domaine sur lequel les hypothèses effectuées restent valident. Le champ d'applications de cette théorie est donc aussi l'étude de l'écoulement au voisinage de l'étrave d'un navire mince.

3.3 interprétation des problèmes simplifiés

Les problèmes intérieurs formulés dans un référentiel lié au fluide peuvent être schématisés ainsi :

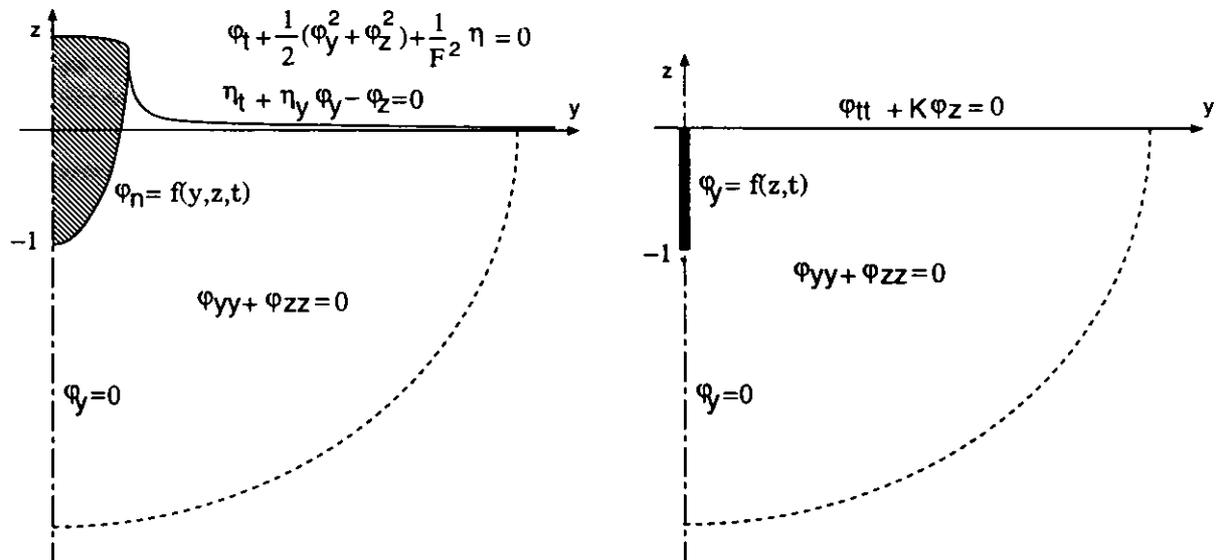


Figure 2: Formulation des problèmes intérieurs dans un référentiel lié au fluide : étrave mince (gauche), étrave fine (droite)

Ces problèmes sont analogues à ceux obtenus lors de l'étude des vagues générées par un batteur à houle plan et peuvent être interprétés de la façon suivante : imaginons un plan normal à \vec{U} qui se déplace à la vitesse de l'écoulement ($x = Ut$). Pour un observateur lié au plan, le navire apparaît comme mobile et tout se passe comme si l'écoulement se réduisait à celui provoqué dans le plan, par l'aire variable de la section du corps qu'il voit défilier. Ce corps déformable, assimilable à un batteur à houle, génère des vagues divergentes dont l'amplitude est du même ordre de grandeur que le déplacement de ce batteur. Le cas du dièdre est équivalent à celui d'un batteur se déplaçant à vitesse constante.

3.4 hypothèses classiques de fermeture

Les problèmes intérieurs sont de nature "parabolique", le rôle de la variable d'évolution étant joué par l'abscisse \tilde{x} . La solution $(\hat{\varphi}_1, \hat{\eta}_1)$ peut être calculée pas à pas (c'est à dire section par section), par intégration des équations d'évolution à partir de conditions initiales. Par ailleurs, il est nécessaire de préciser le comportement de la solution à l'infini.

Les hypothèses généralement effectuées (Tulin, 1994, Maruo 1994, ...) consistent à supposer que l'écoulement uniforme n'est pas perturbé en amont du navire et que les perturbations tendent vers zéro à l'infini (dans le domaine intérieur). On peut alors résoudre pour $(\hat{\varphi}_1, \hat{\eta}_1)$ à partir de conditions initiales homogènes :

$$\hat{\varphi}_1(0, \hat{y}, 0) = 0 \quad (19)$$

$$\hat{\eta}_1(0, \hat{y}) = 0, \quad (20)$$

en imposant à la solution de décroître à l'infini ² :

$$\lim_{\hat{r} \rightarrow \infty} \hat{\varphi}_1(\tilde{x}, \hat{r}, \theta) = 0 \quad (21)$$

$$\lim_{\hat{y} \rightarrow \infty} \hat{\eta}_1(\tilde{x}, \hat{y}) = 0 \quad (22)$$

Il s'ensuit que la solution dans une section ne dépend de ce qui s'est passé en amont qu'au travers des conditions de surface libre.

4 Application au calcul de vagues d'étraves

Fondé sur cette analyse asymptotique, le code de calcul d'écoulement plan avec marche en temps ("2d+t") permet la résolution dans un référentiel lié au fluide des équations (5), (8), (11), (15) dans sa version non-linéaire (étrave mince) et (5), (9), (12), (16) dans sa version linéaire (étrave fine). Les conditions initiales sont homogènes (19), (20) ; le potentiel et l'élévation de la surface libre décroissent à l'infini (21),(22).

La résolution numérique utilise une méthode de singularité associée à un suivi lagrangien de particules disposées sur la surface libre (voir Cointe, 1989 pour plus de détails).

4.1 validité de l'approche linéaire

Ogilvie (1972) résout partiellement le problème linéaire pour une étrave en forme de dièdre de demi-angle au sommet α et de tirant d'eau h (fig. 3). Il donne une expression analytique pour l'élévation de la surface libre le long de la carène valable quelque soit le nombre de Froude, l'angle et le tirant d'eau du dièdre :

$$X = \frac{x}{h F_h}, \quad Z(X) = \frac{\pi}{2\alpha} \frac{\eta(x, 0)}{h F_h} = \int_0^\infty \left(\frac{1 - e^{-s}}{s} \right) \left(\frac{\sin(\sqrt{s} X)}{\sqrt{s}} \right) ds \quad (23)$$

Si ce résultat ne donne qu'un ordre de grandeur de l'élévation (voir la figure 6), l'étude expérimentale montre clairement que l'échelle de longueur du problème est bien $h F_h$ conformément à (18).

Roberts (1987) qui s'intéresse à l'écoulement transitoire bidimensionnel généré par le déplacement d'une plaque plane perçant la surface libre obtient un problème identique pour un mouvement impulsif à faible vitesse. Il donne la solution (vitesse complexe et élévation) du problème sous forme d'une série. L'analyse de cette solution montre que l'échelle de longueur du problème est $h F_h$ dès lors que le navire a un bordé vertical et un fond plat. La trace de l'élévation sur la carène correspond bien à la solution proposée par Ogilvie. Cependant, bien que l'élévation de surface libre soit finie à l'intersection, la solution (linéaire) y est singulière à

² \hat{r} et θ sont définis par : $\hat{y} = \hat{r} \cos \theta$, $\hat{z} = \hat{r} \sin \theta$

cause de son comportement oscillatoire haute fréquence qui devient prépondérant ; cela suggère que la linéarisation des conditions de surface libre n'est plus licite. L'analyse du comportement à l'origine de la solution pour un mouvement arbitraire du batteur montre que l'approximation linéaire n'est valide que pour des accélérations bornées de celui-ci.

Cointe (1989) déduit ce résultat par l'analyse inspectionnelle des équations : dans le cas des vagues générées par un batteur piston, le régime faiblement non-linéaire correspond à de faibles accélérations du batteur relatives à celle de la pesanteur. Pour une étrave en forme de dièdre, la solution linéaire correspondant à l'hypothèse de dièdre fin n'est donc pas valide au voisinage de l'intersection entre la carène et la surface libre. Il est nécessaire de résoudre, dans ce domaine, le problème non linéaire correspondant à l'hypothèse de dièdre mince.

On a cherché une forme d'étrave pour laquelle la linéarisation des conditions aux limites soit justifiée. L'accélération occasionnée au fluide par la présence de la carène étant proportionnelle à la pente de cette dernière dans la direction de l'écoulement, cette pente doit être suffisamment douce pour que la linéarisation soit licite. Afin de pouvoir bénéficier des travaux de Roberts (1989), la forme choisie a un bordé vertical. La composante de la normale à la carène dans la direction de l'écoulement est proportionnelle à \bar{x} de sorte que l'accélération du fluide sur la carène est constante et faible comparée à la gravité :

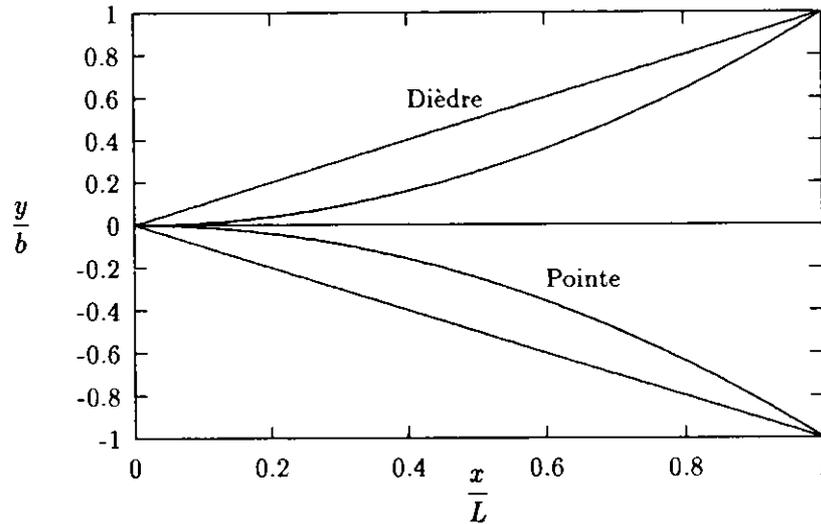


Figure 3: Vue de dessus : carènes en forme de dièdre, et en forme de pointe.

$$\hat{y} = \frac{1}{\delta \sin(2\alpha)} (1 - \sqrt{1 - \sin^2(2\alpha)\bar{x}^2}) \quad 0 \leq \bar{x} \leq 1, \quad \hat{z} \geq -1 \quad (24)$$

Cette carène correspond à la forme "limite" pour laquelle il est possible de justifier la linéarisation des conditions aux limites. Les autres formes sont nécessairement plus régulières et donc plus "pointues" à l'avant.

Pour cette forme, on a vérifié que la linéarisation des conditions aux limites est justifiée en comparant les résultats des simulations linéaire et non-linéaire lorsque l'angle α tend vers zéro (fig. 4). On dispose également d'une solution quasi-analytique qui ne peut être distinguée de la solution numérique linéaire.

La résolution numérique du problème intérieur non-linéaire restant délicate, on étudie l'influence des paramètres du calcul (taille des mailles, type de condition à l'infini) sur la convergence de la méthode numérique dans sa version linéaire afin de déterminer les paramètres optimums pour la résolution du problème. Ces tests sont effectués sur une étrave en forme de pointe. Il s'avère qu'une condition de Robin-Fourier permet de mieux caractériser le comportement de la solution intérieure à l'infini qu'une condition de Dirichlet, ou pire de Neuman.

L'analyse de la convergence de la méthode numérique montre que le schéma numérique utilisé (en linéaire) converge bien vers la solution exacte du problème. L'erreur quadratique moyenne³ est minimale lorsque les mailles disposées sur la surface libre et sur le corps ont sensiblement la même taille (fig. 5). On notera cependant que le taux de convergence n'est pas du second-ordre en fonction du pas en espace. Cela provient très vraisemblablement du traitement numérique à l'intersection qui n'est pas du second-ordre comme le reste du schéma. On a utilisé les paramètres ainsi déterminés pour la résolution du problème non-linéaire.

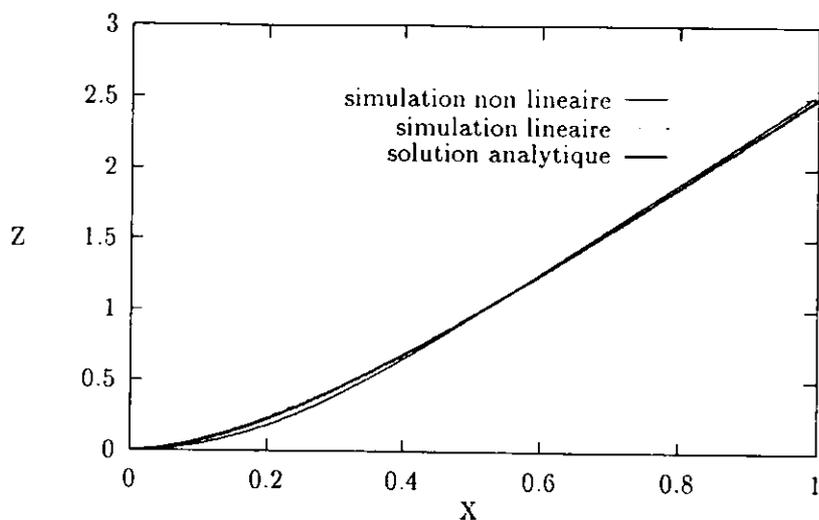


Figure 4: Profil de la vague le long de la carène ($\alpha = 3.5^\circ$)

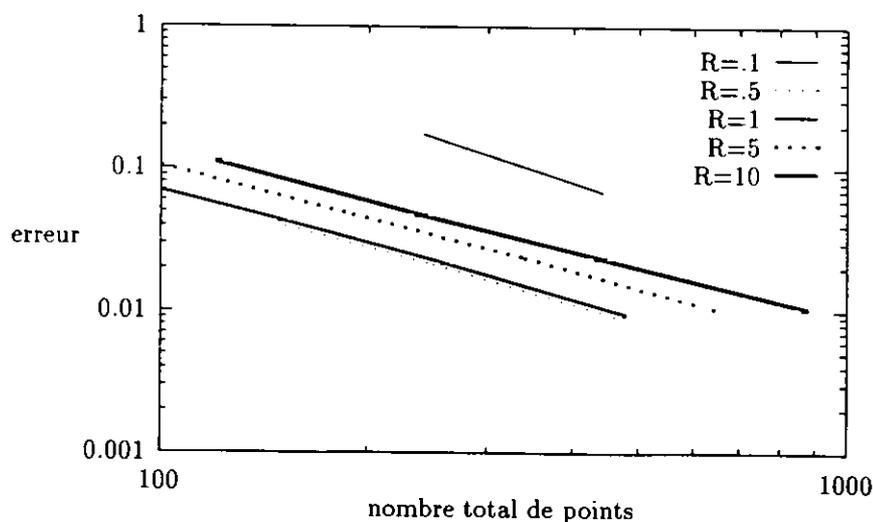


Figure 5: Influence de la répartition du maillage sur la convergence de la méthode. R est le rapport entre la taille des mailles sur la surface et sur le corps. Les calculs ont été effectués avec des unités telles que $g = 1$ et $h = 1$ pour $\alpha = 3.5^\circ$ et $F_h = 1$.

³définie par
$$\sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (z_n - f(x_n))^2}{\sum_{n=1}^N f(x_n)^2}}$$

4.2 comparaison avec l'expérience

L'étude expérimentale est réalisée dans un canal hydrodynamique (Bot, 1994). La maquette en forme de dièdre a un demi-angle au sommet de 15 degrés. En faisant varier la vitesse de l'écoulement U (0.4 à 0.7 m/s) et l'immersion de la maquette h (5 à 50 mm), la hauteur maximale et le profil de la vague d'étrave ont été mesurés pour une large gamme de nombres de Froude F_h (0.6 à 3.2).

L'évolution de la hauteur maximum adimensionnelle Z (formule (23)) de la vague d'étrave en fonction du nombre de Froude est représentée sur la figure 6. Dans le cadre de la théorie linéaire (qui, rappelons le, ne peut être justifiée théoriquement pour cette forme d'étrave), la hauteur maximale est proportionnelle à l'angle α du dièdre, au tirant d'eau h et au nombre de Froude de sorte que l'élévation maximale adimensionnelle est constante. La simulation non-linéaire décrit convenablement l'évolution de la hauteur maximale de la vague d'étrave en fonction du nombre de Froude dès lors que celui-ci est supérieur à 1. Le profil de vague le long de la carène est également représenté sur la figure 7. La forme générale du profil est correctement prédite pour des nombres de Froude suffisamment grands.

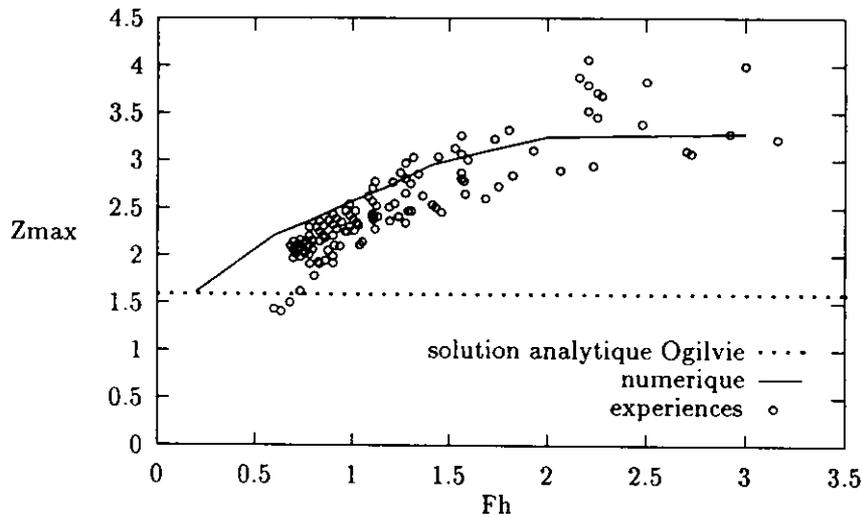


Figure 6: Hauteur maximum adimensionnelle de la vague d'étrave

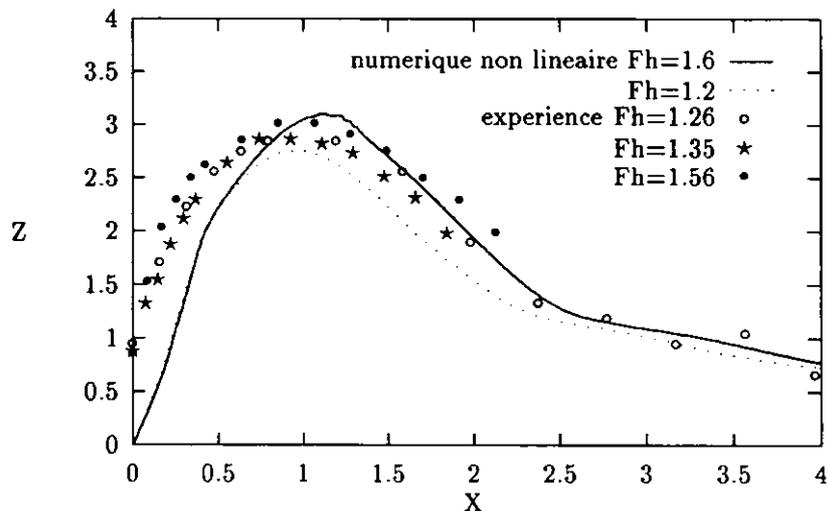


Figure 7: Profils adimensionnels de vagues d'étrave

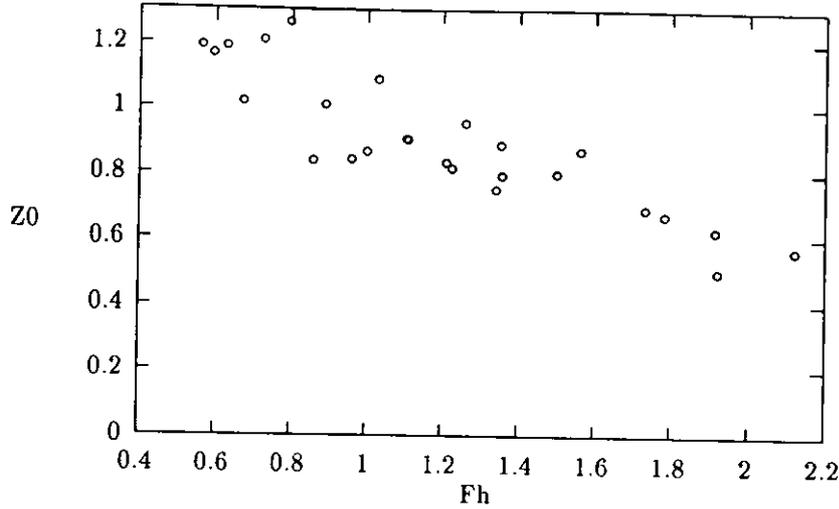


Figure 8: *Elévation adimensionnelle au "nez" de l'étrave*

L'accord général entre expérience et théorie est bon. La principale discordance tient au fait que l'élévation n'est pas nulle en amont du navire. La figure 8 montre cependant que l'erreur relative, due à la non prise en compte de cette surélévation, est d'autant plus faible que le nombre de Froude est élevé. On peut néanmoins se demander si cette surélévation ne résulte pas de l'influence de la nature tridimensionnelle de l'écoulement au voisinage du "nez". Afin de tenter de répondre à cette question, on doit formuler le problème extérieur et le raccorder avec le problème intérieur. Ce raccord doit en particulier permettre de déterminer le comportement à l'infini du problème intérieur.

5 Le problème extérieur

Les variables extérieures sont définies par :

$$\tilde{y} = \delta \hat{y}, \quad \tilde{z} = \delta \hat{z}, \quad \tilde{\eta} = \hat{\eta}, \quad \tilde{\varphi} = \hat{\varphi} \quad (25)$$

On recherche une solution approchée de $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\eta}$ sous forme d'un développement en δ :

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}; \delta) = \tilde{\mu}_1(\delta) \tilde{\varphi}_1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) + o(\tilde{\mu}_1), \quad (26)$$

$$\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{y}; \delta) = \tilde{\nu}_1(\delta) \tilde{\eta}_1(\tilde{x}, \tilde{y}) + o(\tilde{\nu}_1) \quad (27)$$

Dans ce domaine, l'équation de Laplace tridimensionnelle doit être satisfaite. La condition de glissement sur la carène est remplacée par une condition de raccord avec la solution intérieure. Les conditions cinématique et dynamique de surface libre s'écrivent :

$$\left[\frac{\partial \tilde{\eta}_1}{\partial \tilde{x}} + \tilde{\mu}_1 \tan \alpha \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{\eta}_1}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial \tilde{\eta}_1}{\partial \tilde{y}} \right) - \frac{\tilde{\mu}_1}{\tilde{\nu}_1} \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial \tilde{z}} \right] (\tilde{x}, \tilde{y}, 0) + o(1) = 0 \quad (28)$$

$$\left[\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{2} \tilde{\mu}_1 \tan \alpha \left(\left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial \tilde{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial \tilde{y}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial \tilde{z}} \right)^2 \right) \right] (\tilde{x}, \tilde{y}, 0) + \frac{\tilde{\nu}_1}{\tilde{\mu}_1 F_L^2} \tilde{\eta}_1 + o(1) = 0 \quad (29)$$

Si l'on examine les dégénérescences possibles de ce système suivant les ordres de grandeur relatifs de $\tilde{\mu}_1$, $\tilde{\nu}_1$ et F_L , on aboutit à la conclusion que la seule qui soit significative et compatible avec les hypothèses faites dans le problème intérieur est :

$$\tilde{\mu}_1 = \tilde{\nu}_1 \quad (30)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial \tilde{x}} (\tilde{x}, \tilde{y}, 0) = 0 \quad (31)$$

$$\left[\frac{\partial \tilde{\eta}_1}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial \tilde{z}} \right] (\tilde{x}, \tilde{y}, 0) = 0 \quad (32)$$

Puisque le potentiel de perturbation s'annule à l'infini amont dans le domaine extérieur, il est identiquement nul sur la surface libre d'après (31), sauf éventuellement derrière le navire (sur l'axe \bar{x} pour $\bar{x} > 1$) où $\bar{\varphi}_1$ est constant sans forcément être nul. Les effets de la gravité n'intervenant pas dans ce domaine, la solution ne propage pas de vagues. A l'infini, les perturbations disparaissent, sauf derrière le navire.

La solution de ce problème peut être déduite de celle proposée par Ward (1955) pour les corps minces en aérodynamique. La solution générale exprimée en coordonnées cylindrique ⁵ est :

$$\bar{\varphi}_1(\bar{x}, \bar{r}, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{\bar{r}^n} \int_0^{\infty} \frac{[\sqrt{(\bar{x}-s)^2 + \bar{r}^2} + \bar{x}-s]^n}{\sqrt{(\bar{x}-s)^2 + \bar{r}^2}} f_n(s) ds \quad (33)$$

Il s'agit d'un développement en multipôles d'intensités $f_n(\bar{x})$ disposés sur l'axe \bar{x} .

Lorsque \bar{r} tend vers 0, Ward donne le développement :

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow 0} \bar{\varphi}_1(\bar{x}, \bar{r}, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin(n\theta)}{\bar{r}^n} \int_0^{\bar{x}} (\bar{x}-s)^{n-1} f_n(s) ds (1 + O(\bar{r})) \quad (34)$$

Ce développement est uniformément valide lorsque \bar{r} tend vers 0, à condition que \bar{x} soit négatif. Sur les corps, par contre, la solution extérieure est singulière et doit être raccordée à la solution intérieure. Le raccord doit par ailleurs permettre de fixer les fonctions de jauge $\tilde{\mu}_1, \tilde{\nu}_1$ et les fonctions $f_n(\bar{x})$ jusqu'alors inconnues.

6 Raccord des solutions extérieures et intérieures

De manière heuristique, la condition de raccord à l'infini des deux développements traduit le fait que le comportement de la solution extérieure ($\bar{\varphi}, \bar{\eta}$) quand \bar{r} tend vers zéro doit être identique, au premier ordre, à celui de la solution intérieure ($\hat{\varphi}, \hat{\eta}$) lorsque \hat{r} tend vers l'infini. La méthode classique de raccordement (Kevorkian et Cole, 1981) consiste à introduire une variable intermédiaire, à exprimer les solutions intérieure et extérieure en fonction de cette nouvelle variable, puis à égaliser les deux comportements au premier ordre lorsque le "petit paramètre" tend vers zéro :

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ r \text{ fixe}}} \frac{1}{\hat{\mu}_1} [\hat{\mu}_1(\delta) \bar{\varphi}_1(\bar{x}, \frac{\zeta}{\delta} \bar{r}, \theta) - \tilde{\mu}_1(\delta) \bar{\varphi}_1(\bar{x}, \zeta \bar{r}, \theta)] = 0 \quad (35)$$

avec

$$\bar{r} = \frac{\hat{r}}{\zeta(\delta)}, \quad \delta \ll \zeta(\delta) \ll 1 \quad (36)$$

Le problème intérieur le plus intéressant est celui correspondant à l'hypothèse d'étrave mince puisqu'il permet de traiter des formes de carènes réalistes. Ce dernier étant non-linéaire, il n'est pas possible dans le cas général de donner une description analytique du comportement à l'infini de la solution intérieure. La méthode classique de raccordement ne peut donc pas être utilisée dans ce cas.

Un raccord général peut néanmoins être effectué en s'inspirant de la méthode proposée à l'origine par Kaplun et Lagerstrom (1957). Elle consiste à formuler un problème intermédiaire dont la solution se raccorde à l'origine à la solution intérieure, et à l'infini à la solution extérieure. Le principe de recouvrement démontré par Kaplun et Lagerstrom (1957) assure l'existence d'une zone de raccord entre les diverses solutions asymptotiques.

On considère donc un domaine intermédiaire défini par les variables:

$$\bar{r} = \frac{\hat{r}}{\zeta(\delta)}, \quad \bar{y} = \frac{\hat{y}}{\zeta(\delta)}, \quad \bar{z} = \frac{\hat{z}}{\zeta(\delta)} \quad \text{avec} \quad \delta \ll \zeta \ll 1 \quad (37)$$

$$\bar{\eta} = \hat{\eta}, \quad \bar{\varphi} = \hat{\varphi} \quad (38)$$

⁵ \bar{r} est défini par : $\bar{r} = \sqrt{\bar{y}^2 + \bar{z}^2}$

et on recherche une solution approchée de $\bar{\varphi}$ et $\bar{\eta}$ sous forme d'un développement asymptotique en δ :

$$\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{r}, \theta, \delta) = \bar{\mu}_1(\delta) \bar{\varphi}_1(\bar{x}, \bar{r}, \theta) + o(\bar{\mu}_1) \quad (39)$$

$$\bar{\eta}(\bar{x}, \bar{y}, \delta) = \bar{\nu}_1(\delta) \bar{\eta}_1(\bar{x}, \bar{y}) + o(\bar{\nu}_1) \quad (40)$$

Au premier ordre, comme dans le domaine intérieur, le potentiel $\bar{\varphi}_1$ satisfait à l'équation de Laplace bidimensionnelle. L'examen des conditions de surface libre montre que la seule dégénérescence mécaniquement admissible s'obtient pour :

$$\bar{\mu}_1 = \zeta \bar{\nu}_1 \quad ; \quad (41)$$

la solution doit alors vérifier:

$$\bar{\varphi}_1(\bar{x}, \bar{y}, 0) = 0 \quad (42)$$

$$\left[\frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial \bar{z}} \right] (\bar{x}, \bar{y}, 0) = 0 \quad (43)$$

Le problème intermédiaire satisfait aux équations les plus simples de chacun des deux domaines : l'équation de Laplace est bidimensionnelle comme dans le problème intérieur, et les conditions de surface libre sont linéaires, identiques à celle du problème extérieur. Ce problème est résolu en effectuant un prolongement analytique de la fonction $\bar{\varphi}_1$ dans le demi-plan supérieur, en supposant que cette dernière est impaire. On peut alors décomposer le potentiel complexe sous forme d'une série de Laurent en admettant une singularité à l'origine :

$$\bar{\varphi}_1(\bar{x}, \bar{r}, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\theta) \left[\frac{A_n(\bar{x})}{\bar{r}^n} + B_n(\bar{x}) \bar{r}^n \right] \quad (44)$$

Pour que le potentiel intermédiaire se raccorde au potentiel extérieur, il est nécessaire d'imposer aux coefficients B_n d'être nuls puisque le terme général $B_n(\bar{x}) \bar{r}^n$ ne peut se raccorder à aucun autre de la solution extérieure. Par ailleurs, seul le premier terme correspondant à $n = 1$ de la solution intermédiaire est à prendre en considération, les autres étant d'ordre supérieur. Enfin, ce terme ne peut être raccordé qu'au premier terme ($n = 1$) de la solution extérieure ; on a alors la relation $\bar{\mu}_1 \zeta = \bar{\mu}_1$ entre les ordres de grandeur des deux solutions. La condition de raccord des potentiels intermédiaire et extérieur conduit à ne garder que le premier terme de chacun des développements (44) et (33).

Le raccord des potentiels intermédiaire et intérieur permet alors de déduire l'ordre de grandeur de la solution intermédiaire ($\bar{\mu}_1 \zeta = \delta^2$) ainsi que le comportement à l'infini du potentiel de perturbation intérieur. Ce potentiel se comporte comme celui généré par un dipôle bidimensionnel vertical placé à l'origine :

$$\lim_{\bar{r} \rightarrow \infty} \hat{\varphi}_1(\bar{x}, \hat{r}, \theta) = - \frac{\mu(\bar{x})}{2\pi} \cdot \frac{\sin(\theta)}{\hat{r}}, \quad (45)$$

Pour confirmer ce résultat, il est intéressant de résoudre le problème intérieur linéaire (figure 2) lorsque le potentiel est initialement nul (19). On arrive alors, sous réserve que la solution soit bien décroissante, à la conclusion que le potentiel se comporte bien comme celui généré par un dipôle bidimensionnel vertical placé à l'origine. Il a été vérifié par ailleurs que le comportement à l'infini des solutions de Roberts et Ogilvie est en accord avec ce résultat. Il est raisonnable de supposer que le comportement à l'infini de la solution intérieure ne dépend pas d'une perturbation des conditions initiales du problème intérieur.

Le raccord des élévations dans les domaines intermédiaire et intérieur permet de conclure que l'élévation intérieure décroît à l'infini comme l'inverse du carré de la distance :

$$\lim_{\hat{y} \rightarrow \infty} \hat{\eta}_1(\bar{x}, \hat{y}) = \frac{1}{\hat{y}^2} \int_0^{\infty} - \frac{\mu(s)}{2\pi} ds \quad (46)$$

Les hypothèses classiques de fermeture (21),(22) se trouvent ainsi justifiées et précisées. Il ne semble donc pas apparaître, à cet ordre, d'influence de la solution extérieure sur la solution intérieure : il n'y aurait pas d'autre couplage entre les tranches que celui apparaissant au travers des conditions de surface libre. On notera cependant que ce raccord n'apporte pas d'informations à ce stade sur la condition "initiale" (en $\bar{x} = 0$) à imposer au problème intérieur.

7 Analyse de la solution extérieure

Compte tenu du raccord précédent, l'ordre de grandeur du potentiel est :

$$\tilde{\mu}_1 = \delta^2 \quad (47)$$

Puisque seul le premier terme du développement en multipôles (33) est à considérer, le potentiel résulte d'une répartition sur l'axe du navire de dipôles tridimensionnels verticaux d'intensité μ .

$$\tilde{\varphi}_1(\bar{x}, \bar{r}, \theta) = \int_0^\infty \frac{-\mu(s)}{4\pi} \frac{\bar{r} \sin(\theta)}{[(\bar{x} - s)^2 + \bar{r}^2]^{\frac{3}{2}}} ds \quad \text{avec} \quad \mu(\bar{x}) = -4\pi \int_0^{\bar{x}} f_1(s) ds \quad (48)$$

Derrière le navire - i.e. sur l'axe des abscisses pour \bar{x} supérieur à 1- l'intensité des doublets doit être constante pour que le potentiel soit lui même constant. Le potentiel subit en effet à la traversée de la surface un saut égal à l'intensité du doublet traversé. Cette répartition de doublets d'intensité constante a une signification physique : elle représente le sillage généré par le navire.

D'autre part, puisque la condition de surface libre (31) porte sur la dérivée longitudinale du potentiel (et non pas sur le potentiel lui-même), la valeur du potentiel dans le sillage est prise égale à celle au niveau du tableau arrière. Imposer la continuité de l'intensité des dipôles en $\bar{x} = 1$ revient à imposer à l'écoulement de vérifier une condition de type Kutta-Joukowski. Compte tenu de ces remarques, on obtient pour le potentiel de perturbation extérieur :

$$\tilde{\varphi}_1(\bar{x}, \bar{r}, \theta) = \int_0^1 \frac{-\mu(s)}{4\pi} \frac{\bar{r} \sin(\theta)}{[(\bar{x} - s)^2 + \bar{r}^2]^{\frac{3}{2}}} ds - \frac{\mu(1)}{4\pi} \frac{\sin(\theta)}{\bar{r}} \left(1 + \frac{\bar{x} - 1}{\sqrt{(\bar{x} - 1)^2 + \bar{r}^2}}\right), \quad (49)$$

L'ordre de grandeur de l'élévation est d'après (30) le même que celui du potentiel, on a donc $\tilde{u}_1 = \delta^2$. La forme de l'élévation est obtenue par intégration de la condition cinématique (32) :

$$\tilde{\eta}_1(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{\bar{y}^2} \int_0^1 \frac{-\mu(s)}{4\pi} \left[1 + \frac{\bar{x} - s}{\sqrt{(\bar{x} - s)^2 + \bar{y}^2}}\right] ds - \frac{\mu(1)}{4\pi \bar{y}^2} [\bar{x} - 1 + \sqrt{(\bar{x} - 1)^2 + \bar{y}^2}] \quad (50)$$

8 Conclusion

La méthode des développements asymptotiques raccordés semble permettre de justifier l'approximation "2D+T" pour le calcul de l'écoulement autour de l'étrave d'un navire fin ou mince. Elle conduit aussi à en estimer le domaine de validité. La comparaison avec les expériences pour la vague d'étrave et sa trace sur la carène sont en bon accord avec cette théorie et tendent à valider les notions de navire "mince" ou "fin" introduites. Il apparaît cependant un écart juste à l'avant du navire qui pourrait être dû à l'influence de la nature tridimensionnelle de l'écoulement autour du navire sur l'écoulement bidimensionnel engendré dans chaque tranche. L'étude du raccord entre les solutions intérieures et extérieures n'a pas encore permis d'apporter une réponse définitive à cette question : si ce raccord ne semble pas conduire à un couplage entre les tranches, le cas du "nez" de l'étrave (c'est à dire les conditions initiales du problème intérieur) reste à élucider. Une valeur non-nulle au "nez" de la distribution de dipôles représentant l'écoulement loin du navire devrait en effet correspondre à un écoulement non nul dans la première tranche de la solution intérieure.

References

- [1] BOT, P., 1994, "Etude Expérimentale de la vague d'étrave d'un navire mince", mémoire de D.E.A., G.E.M.H., Université du Havre.
- [2] COINTE, R., 1989, "Quelques aspects de la simulation numérique d'un canal à houle", Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.
- [3] FALTINSEN, O.M. and ZHAO, R., 1991, "Flow prediction around high-speed ships in waves.", *Mathematical Approaches in Hydrodynamics*, T. Miloh, Ed., Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM)
- [4] FONTAINE, E. and COINTE, R., 1994, "Non Linear High-Froude-Number Slender Body Theory", Ninth International Workshop on Water Waves and Floating Bodies.
- [5] KAPLUN, S., 1957, "Low Reynolds number flow past a cylinder", *J. Math. Mech.* 6,595-603.
- [6] KEVORKIAN, J. and COLE, J.D., 1981, "Perturbation Method in Applied Mathematics", *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 34, Springer-Verlag New York Inc.
- [7] MARUO H., SONG W., 1994, "Nonlinear Analysis of Bow Wave Breaking and Deck Wetness of a High-Speed Ship by the Parabolic Approximation", Twentieth Symposium on Naval Hydrodynamics, University of California, Santa Barbara.
- [8] OGILVIE, T.F., 1967, "Non-linear High-Froude-Number Free-Surface Problems", *Journal of Engineering Mathematics*, volume 1 ,p. 215-235.
- [9] OGILVIE, T.F., 1972, "The wave generated by a fine ship bow", Ninth Symposium Naval Hydrodynamics, Volume 2, p. 1483-1525.
- [10] ROBERTS, A.J., 1987, "Transient Free Surface Flows Generated by a Moving Vertical Plate", *Q.J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 40,Pt. 1.
- [11] TULIN, M.P., 1986, "Theory of High-Speed Displacement Ships with Transom Sterns", *Journal of Ship Research*, Vol. 30, pp. 186-193
- [12] TULIN, M.P., MING WU, 1994, "Bow Waves on Fine Ships - Nonlinear Numerical Studies", Ninth International Workshop on Water Waves and Floating Bodies.
- [13] WARD, G.N., 1955, "Linearized Theory of Steady High-Speed Flow", Cambridge University Press.