

5<sup>e</sup> JOURNÉES DE L'HYDRODYNAMIQUE

22, 23, 24 mars 1995 – ROUEN

# RESONANCES POUR LE PROBLEME DE NEUMANN-KELVIN TRIDIMENSIONNEL DANS LE CAS D'UN CORPS IMMERGE

Y. DOUTRELEAU

Laboratoire de Simulation et Modélisation  
des phénomènes de Propagation  
91120 PALAISEAU

## Résumé

On s'intéresse au problème de résistance de vagues, qui consiste à déterminer la force exercée sur un corps se déplaçant au voisinage de la surface libre d'un fluide au repos. Les courbes expérimentales de résistance de vagues en fonction de la vitesse d'avance du corps peuvent présenter des oscillations. On souhaite expliquer ce phénomène par l'existence de **résonances**, c'est-à-dire de valeurs complexes de vitesses d'avance pour lesquelles la solution du problème devient infinie. On ne considère que le cas du corps immergé.

## Summary

We deal with the wave-resistance problem, which consists in determining the strength exerted on a body moving in a vicinity of the free-surface of a fluid at rest. Experimental curves of the wave-resistance with respect to the velocity of the body may have oscillations. We'd like to explain this phenomenon by the existence of **resonances**, i.e., some complex values of the velocity for which the solution of the problem becomes infinite. We only deal with the case of an immersed body.

# Introduction

Lorsqu'un corps se déplace dans un milieu liquide, il subit une force, appelée résistance à l'avancement. Cette résistance a plusieurs composantes, dont la résistance de vagues, qui nous intéresse plus particulièrement dans ce papier. Elle correspond à l'énergie fournie par le corps pour entretenir le champ de vagues qui se propage derrière lui dans le milieu. Le problème que l'on va considérer consiste à étudier le cas où le corps est animé d'un mouvement rectiligne uniforme dans un milieu au repos. Lorsque l'on regarde les courbes expérimentales de résistance de vagues en fonction de la vitesse d'avance du corps, on peut constater des oscillations. Le but de ce papier est d'expliquer ce phénomène par l'existence de résonances, c'est-à-dire de valeurs pour lesquelles la solution du problème étendue mathématiquement à des vitesses d'avance complexes devient infinie. Un tel résultat a été obtenu dans le cas bidimensionnel par J-M. Quenez et C. Hazard [1]. On l'étend ici au cas tridimensionnel pour un corps immergé. Le cas du corps perçant pose des difficultés théoriques et techniques non encore surmontées.

## 1 Problème de Neumann-Kelvin

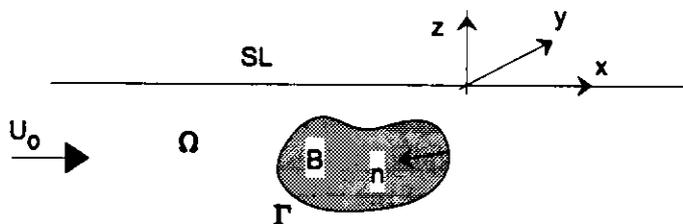
La détermination de la résistance de vagues nécessite la connaissance préalable de l'écoulement autour du corps. La modélisation du phénomène physique que l'on a choisie conduit au problème classique de Neumann-Kelvin.

### 1.1 Equations du problème

Le corps est supposé se déplacer à la vitesse  $-U_0\vec{x}$ . Quand on se place dans le référentiel lié au corps, cela revient à supposer qu'il est fixe et soumis à un écoulement uniforme de vitesse  $U_0\vec{x}$ , venant de  $x = -\infty$ .

Pour la mise en équation, on fait les hypothèses suivantes: le fluide est parfait et incompressible, l'écoulement est supposé irrotationnel et stationnaire dans le référentiel lié au corps. La vitesse de l'écoulement dérive donc d'un potentiel  $\Phi$ , et on écrit les équations vérifiées par  $\Phi$  dans le repère lié au corps. Puis, on linéarise ces équations autour de l'écoulement uniforme, de vitesse  $U_0\vec{x}$ , que l'on écrit dans le domaine géométrique linéarisé.

$\Omega$  est le domaine fluide,  $SL$  est la surface libre et le corps  $B$  de frontière  $\Gamma$  est supposé immergé.



On pose ainsi  $\Phi = U_0 x + \varphi_\nu$ , où  $\varphi_\nu$  est solution du problème de Neumann-Kelvin  $\mathcal{NK}_\nu$  :

$$\mathcal{NK}_\nu \left\{ \begin{array}{ll} \text{(a)} & \Delta \varphi_\nu = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \text{(b)} & \partial_n \varphi_\nu = -U_0 (\vec{x} \cdot \vec{n}) \quad \text{sur } \Gamma, \\ \text{(c)} & \partial_x^2 \varphi_\nu + \nu \partial_z \varphi_\nu = 0 \quad \text{sur } SL, \\ \text{(d)} & \begin{cases} \lim_{z \rightarrow -\infty} \varphi_\nu = 0, \\ \lim_{z \rightarrow -\infty} \partial_z \varphi_\nu = 0, \end{cases} \\ \text{(e)} & \begin{cases} \varphi_\nu = O\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\ \nabla \varphi_\nu = O\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \end{cases} \quad x \rightarrow -\infty, \forall (y, z). \end{array} \right.$$

Dans ce système d'équations, on a posé  $\nu = \frac{g}{U_0^2}$ .

Les équations (a),(b),(c) proviennent des équations de la mécanique, tandis que les équations (d) et (e) imposent des conditions de décroissance du potentiel des vitesses à l'infini. En particulier, l'équation (e) traduit le fait qu'il n'y a pas de champ de vagues loin devant le corps.

L'étude des résonances conduit à considérer un problème plus général que  $\mathcal{NK}_\nu$ , qui consiste à prendre une donnée quelconque sur  $\Gamma$ , c'est-à-dire que l'on écrit l'équation (b) comme ceci:  $\partial_n \varphi_\nu = f$  sur  $\Gamma$ .  $f$  est une fonction quelconque de  $L^2(\Gamma)$ , espace des fonctions de carré intégrable sur  $\Gamma$ , c'est-à-dire que  $L^2(\Gamma) = \left\{ f, \int_\Gamma \|f\|^2 d\Gamma < +\infty \right\}$ . On note ce problème  $\mathcal{NK}_\nu(f)$ . Dans la suite, on va prolonger ce problème pour des  $\nu$  complexes, et le but du papier est de montrer que le problème prolongé, noté  $\widetilde{\mathcal{NK}}_\nu(f)$ , est bien posé sauf pour certaines valeurs de  $\nu$ , appelées **résonances**. Décrivons brièvement les différentes étapes qui permettent d'aboutir à ce résultat.

- On commence par trouver un problème, noté  $\widehat{Q}_\nu^r(f)$ , posé en domaine borné, équivalent à  $\mathcal{NK}_\nu(f)$ , quand  $\nu$  est réel (section 2.1).
- On démontre que le problème  $\widehat{Q}_\nu^r(f)$  admet une solution unique  $\widehat{\varphi}_\nu^r$  pour tout  $\nu$  décrivant un certain ensemble  $\widetilde{\mathbb{C}} - \mathbb{P}$ . Les éléments de  $\mathbb{P}$  seront appelés **résonances** (section 2.2).
- A partir de  $\widehat{\varphi}_\nu^r$  on construit, pour tout  $\nu \in \widetilde{\mathbb{C}} - \mathbb{P}$ , la solution  $\widetilde{\varphi}_\nu$  du problème  $\widetilde{\mathcal{NK}}_\nu(f)$ , qui prolonge  $\mathcal{NK}_\nu(f)$  (section 3).

Avant de détailler ces étapes, on introduit deux outils qui sont la fonction de Green et un résultat partiel d'existence et d'unicité pour le problème  $\mathcal{NK}_\nu(f)$ .

## 1.2 Fonction de Green de Neumann-Kelvin

La fonction de Green de Neumann-Kelvin,  $G_\nu(M, P)$ , est le potentiel créé au point  $P$  par une source immergée sous la surface libre placée au point  $M$ . C'est la solution du

problème  $\mathcal{P}_\nu$  :

$$\mathcal{P}_\nu \left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \Delta_P G_\nu(M, P) = \delta_M(P) \\ \text{(b)} \quad (\partial_{x_P}^2 + \nu \partial_{z_P}) G_\nu(M, P) = 0 \\ \text{(d)} \quad \begin{cases} \lim_{z_P \rightarrow -\infty} G_\nu(M, P) = 0 \\ \lim_{z_P \rightarrow -\infty} \partial_{z_P} G_\nu(M, P) = 0, \end{cases} \\ \text{(e)} \quad \begin{cases} G_\nu(M, P) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}}\right) \\ \nabla_P G_\nu(M, P) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}}\right) \end{cases} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{dans } z_P < 0, \\ \text{sur } z_P = 0, \\ \\ \\ x_P \rightarrow +\infty, \forall (y_P, z_P). \end{array}$$

La détermination d'une solution de  $\mathcal{P}_\nu$  a déjà été faite de différentes façons par de nombreux auteurs (voir par exemple [2]). On la retrouve en résolvant le système d'équations équivalent obtenu en appliquant une transformation de Fourier par rapport aux variables  $(x_P, y_P)$  sur le système d'équations  $\mathcal{P}_\nu$ . Cette technique est décrite dans [3] pour le calcul de la fonction de Green de résistance de vague bidimensionnelle. La question de l'unicité des solutions de  $\mathcal{P}_\nu$  est étudiée par C. Guttman (voir [4]). On rassemble ces résultats dans le

**Lemme 1** *le problème  $\mathcal{P}_\nu$  admet une solution unique donnée par*

$$G_\nu(M, P) = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) - \frac{\nu}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sin \nu S(t, P, M)) e^{\nu(1+t^2)(z_P+z_M)} dt + \frac{\nu}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (\cos \rho S(t, P, M)) VP \left( \frac{e^{\rho(1+t^2)(z_P+z_M)}}{\rho - \nu} \right) d\rho dt,$$

où  $S(t, P, M) = \sqrt{1+t^2}((x_P - x_M) + t(y_P - y_M))$ ,  $r$  est la distance de  $P$  à  $M$ , et  $r'$  est la distance de  $P$  à  $M'$ ,  $M'$  étant le point image de  $M$  par rapport à la surface libre  $SL$ .

**Remarque 1** Contrairement à la fonction de Green de tenue à la mer, la fonction de Green de Neumann-Kelvin n'est pas symétrique en  $(M, P)$ . Cependant, on montre que  $G_\nu(M, P)$  est aussi le potentiel créé au point  $M$  par une source au point  $P$ . C'est en effet la solution unique du problème  $\mathcal{M}_\nu$ , problème "dual" de  $\mathcal{P}_\nu$ , au sens où la condition de calme à l'amont (équation (e)) est posée en  $x_M = -\infty$ .

$$\mathcal{M}_\nu \left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \quad \Delta_M G_\nu(M, P) = \delta_P(M) \\ \text{(b)} \quad (\partial_{x_M}^2 + \nu \partial_{z_M}) G_\nu(M, P) = 0 \\ \text{(d)} \quad \begin{cases} \lim_{z_M \rightarrow -\infty} G_\nu(M, P) = 0 \\ \lim_{z_M \rightarrow -\infty} \partial_{z_M} G_\nu(M, P) = 0, \end{cases} \\ \text{(e)} \quad \begin{cases} G_\nu(M, P) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}\right) \\ \nabla_M G_\nu(M, P) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}\right) \end{cases} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{dans } z_M < 0, \\ \text{sur } z_M = 0, \\ \\ \\ x_M \rightarrow -\infty, \forall (y_M, z_M). \end{array}$$

Etudier les résonances conduit à considérer le problème  $\mathcal{NK}_\nu(f)$  pour des valeurs complexes du paramètre  $\nu$ , et donc à prolonger aussi la fonction de Green. On aura alors besoin du lemme suivant, dont la démonstration un peu technique n'est pas reproduite ici:

**Lemme 2** soit  $\tilde{\mathcal{C}} = \{\nu \in \mathbb{C}, \Re(\nu) > 0\}$  et  $\mathcal{K}$  un ensemble compact de  $\{(M, P) \in \{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^-\}^2, M \neq P, \{z_M = z_P = 0 \text{ et } x_P < x_M \Rightarrow y_M \neq y_P\}\}$ .

$G_\nu(M, P)$  se prolonge analytiquement par rapport à la variable  $\nu$  décrivant  $\tilde{\mathcal{C}}$  à valeur dans les fonctions  $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{K})$ .

Cela signifie qu'il existe une fonction  $\tilde{G}_\nu(M, P)$  analytique par rapport à  $\nu \in \tilde{\mathcal{C}}$ , uniformément par rapport à  $(M, P)$  décrivant  $\mathcal{K}$ , telle que pour  $\nu \in \mathbb{R}^{**}$ ,  $\tilde{G}_\nu(M, P) = G_\nu(M, P)$ .

**Corollaire 1** Soit  $P$  un point de  $\Gamma$ , bord du corps  $B$ . Comme le corps est immergé,  $z_P < 0$  et donc d'après le lemme 2, dès que  $M \neq P$ ,  $\tilde{G}_\nu(M, P)$  est analytique par rapport à  $\nu \in \tilde{\mathcal{C}}$  à valeur dans les fonctions  $\mathcal{C}^\infty(M, P)$ .

**Remarque 2** Dans le cas du corps immergé, on voit que l'on est dans le cadre standard où la fonction de Green est régulière dès que les points  $M$  et  $P$  sont distincts, ce qui va permettre d'utiliser la formule de représentation intégrale habituelle. Dans le cas du corps perçant, cette remarque n'est plus valable, et c'est là une des grosses difficultés.

**Remarque 3** On montre de plus que pour  $\nu \in \tilde{\mathcal{C}} - \mathbb{R}^{**}$ ,  $\tilde{G}_\nu(M, P)$  est solution du problème  $\tilde{\mathcal{M}}_\nu$  :

$$\tilde{\mathcal{M}}_\nu \begin{cases} \text{(a)} & \Delta_M \tilde{G}_\nu(M, P) = \delta_P(M) & \text{dans } z_M < 0, \\ \text{(b)} & (\partial_{x_M}^2 + \nu \partial_{z_M}) \tilde{G}_\nu(M, P) = 0 & \text{sur } z_M = 0, \\ \text{(d)} & \begin{cases} \lim_{z_M \rightarrow -\infty} \tilde{G}_\nu(M, P) = 0 \\ \lim_{z_M \rightarrow -\infty} \partial_{z_M} \tilde{G}_\nu(M, P) = 0. \end{cases} \end{cases}$$

### 1.3 Un premier résultat d'existence et d'unicité

Dans cette partie, nous allons montrer que le problème  $\mathcal{N}\mathcal{K}_\nu(f)$  admet une solution unique dès que  $\nu$  est un réel positif proche de 0. La démarche adoptée suit essentiellement celle de Vainberg et Maz'ja (voir [5]) dans un cadre fonctionnel légèrement différent.

#### 1.3.1 Equivalence de $\mathcal{N}\mathcal{K}_\nu(f)$ avec une équation intégrale

Grâce à l'unicité de la fonction de Green (lemme 1) et aux remarques 1 et 2, on prouve de manière classique le

**Lemme 3**  $\forall \nu \in \mathbb{R}^{**}$ ,

$$\varphi_\nu \text{ solution de } \mathcal{N}\mathcal{K}_\nu(f) \Rightarrow \varphi_\nu(M) = \int_\Gamma (\varphi_\nu(P) \partial_{n_P} G_\nu(M, P) - f(P) G_\nu(M, P)) d\Gamma_P.$$

Cette formule est appelée formule de représentation intégrale et on la note  $\varphi_\nu = RI(\varphi_\nu, G_\nu)$ . En introduisant le problème de Dirichlet intérieur au corps  $\hat{Q}_i$ ,

$$\hat{Q}_i \begin{cases} \Delta \hat{\varphi}_i = 0 & \text{dans } B, \\ \hat{\varphi}_i = \varphi_\nu & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

et en utilisant le lemme 3, on montre que l'on peut représenter la solution du problème  $\mathcal{N}\mathcal{K}_\nu(f)$  sous la forme d'un potentiel de simple couche vérifiant l'équation intégrale (I). C'est la

**Proposition 1**  $\forall \nu \in \mathbb{R}^{**}$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_\nu \text{ solution de } \mathcal{N}\mathcal{K}_\nu(f) &\Leftrightarrow \exists \sigma \in L^2(\Gamma), \varphi_\nu(M) = \int_\Gamma \sigma(P) G_\nu(M, P) d\Gamma_P, \\ &\text{où } \sigma \text{ est solution de} \\ \text{(I)} \quad \partial_{n_M} \left( \int_\Gamma \sigma(P) G_\nu(M, P) d\Gamma_P \right) &= f(M) \text{ sur } \Gamma. \end{aligned}$$

### 1.3.2 Inversibilité de (I) pour $\nu$ proche de $0^+$

En décomposant la fonction de Green donnée dans le lemme 1 de la manière suivante,  $G_\nu(M, P) = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) + H_\nu(M, P)$ , où  $H_\nu(M, P)$  est régulière, l'équation (I) se réécrit ainsi

$$\partial_{n_M} \left( \int_\Gamma \sigma(P) H_\nu(M, P) d\Gamma_P \right) + \partial_{n_M} \left( \int_\Gamma -\frac{\sigma(P)}{4\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \right) = f(M) \text{ sur } \Gamma.$$

On utilise maintenant l'inégalité (3.5) dans Vainberg et Maz'ja (voir [5]), qui permet de montrer que

$$\forall \sigma \in L^2(\Gamma), \lim_{\nu \rightarrow 0^+} \partial_{n_M} \left( \int_\Gamma \sigma(P) H_\nu(M, P) d\Gamma_P \right) = 0.$$

Par conséquent, si  $\nu$  est proche de 0, l'équation (I) a une solution unique  $\sigma \in L^2(\Gamma)$ , ssi l'équation suivante (I') a une solution unique  $\sigma \in L^2(\Gamma)$  :

$$(I') \partial_{n_M} \left( \int_\Gamma -\frac{\sigma(P)}{4\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \right) = f(M) \text{ sur } \Gamma.$$

En considérant le problème prolongé par antisymétrie par rapport à la surface libre  $SL$ , on montre que cette équation est en fait une équation intégrale standard pour les problèmes de Neumann posés à l'extérieur d'un domaine, et on sait qu'elle a une solution unique (voir par exemple le théorème p. 667 dans Dautray-Lions [6]). Compte tenu de ce résultat et de la proposition 1, nous avons le théorème d'existence et d'unicité pour le problème  $\mathcal{NK}_\nu(f)$  suivant:

**Théorème 1** pour  $\nu$  réel positif proche de 0,  $\forall f \in L^2(\Gamma)$ ,  $\exists ! \varphi_\nu$  solution de  $\mathcal{NK}_\nu(f)$ .

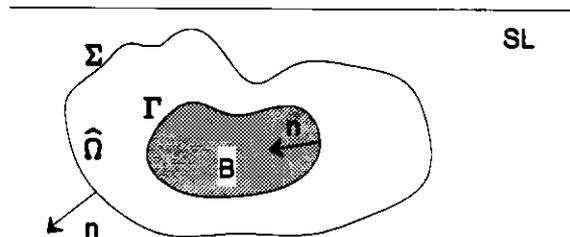
## 2 Réduction en domaine borné

On va montrer que l'on peut trouver un problème posé en domaine borné équivalent au problème  $\mathcal{NK}_\nu(f)$ , et c'est ce problème équivalent qui va permettre d'introduire les résonances.

### 2.1 Technique de réduction de type Dirichlet

#### 2.1.1 Problème $\hat{Q}_\nu(f)$

Soit  $\Sigma$  une surface arbitraire entourant le corps  $B$  et ne rencontrant pas la surface libre  $SL$ .



On appelle  $\hat{\Omega}$  le domaine volumique compris entre  $\Gamma$  et  $\Sigma$ . Dans la suite,  $M$  désigne le point courant de  $\hat{\Omega}$  et  $P$  désigne toujours un point de  $\Gamma$ . On définit ensuite les espaces

fonctionnels que l'on va utiliser.

$$\begin{aligned} L^2(\widehat{\Omega}) &= \left\{ \varphi, \int_{\widehat{\Omega}} \|\varphi\|^2 < +\infty \right\}, \\ H^1(\widehat{\Omega}) &= \left\{ \varphi, \varphi \in L^2(\widehat{\Omega}), \nabla\varphi \in (L^2(\widehat{\Omega}))^3 \right\}. \end{aligned}$$

Pour  $\nu \in \widetilde{\mathbf{C}}$ , i.e.,  $\nu \in \mathbf{C}$ ,  $\Re(\nu) > 0$ , on cherche  $\hat{\varphi}_\nu \in H_1(\widehat{\Omega})$  solution du problème  $\widehat{Q}_\nu(f)$

$$\widehat{Q}_\nu(f) \begin{cases} \text{(a)} & \Delta\hat{\varphi}_\nu = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \text{(b)} & \partial_n\hat{\varphi}_\nu = f & \text{sur } \Gamma, \\ \text{(c)} & \hat{\varphi}_\nu = \int_{\Gamma} (\hat{\varphi}_\nu(P)\partial_{n_P}\tilde{G}_\nu(M,P) - f(P)\tilde{G}_\nu(M,P)) d\Gamma_P & \text{sur } \Sigma. \end{cases}$$

On utilise maintenant la méthode de couplage formulation variationnelle-représentation intégrale (voir Jami-Lenoir [7]). Grâce à la formule de représentation intégrale (lemme 3), et au fait que  $G_\nu(M, P)$  est la solution de  $\mathcal{M}_\nu$  (remarque 1), on montre que pour  $\nu \in \mathbb{R}^{*+}$ , il y a équivalence entre  $\mathcal{NK}_\nu(f)$  et  $\widehat{Q}_\nu(f)$  au sens de la

**Proposition 2** Pour  $\nu \in \mathbb{R}^{*+}$ ,

si  $\varphi_\nu$  est solution de  $\mathcal{NK}_\nu(f)$  alors  $\hat{\varphi}_\nu = \varphi_\nu|_{\widehat{\Omega}}$  est solution de  $\widehat{Q}_\nu(f)$ , où  $\varphi_\nu|_{\widehat{\Omega}}$  désigne la restriction de  $\varphi_\nu$  à  $\widehat{\Omega}$ ,

si  $\hat{\varphi}_\nu$  est solution de  $\widehat{Q}_\nu(f)$  alors  $\varphi_\nu(M) = \int_{\Gamma} (\hat{\varphi}_\nu(P)\partial_{n_P}G_\nu(M,P) - f(P)G_\nu(M,P)) d\Gamma_P$  est solution de  $\mathcal{NK}_\nu(f)$  et  $\varphi_\nu|_{\widehat{\Omega}} = \hat{\varphi}_\nu$ .

### 2.1.2 Problème relevé $\widehat{Q}_\nu^r(f)$

L'équation (c) du problème  $\widehat{Q}_\nu(f)$  introduit une condition de type Dirichlet sur la frontière  $\Sigma$ , que l'on doit intégrer à l'espace fonctionnel dans lequel on cherche la solution. D'un point de vue variationnel, cette condition est peu commode à utiliser car elle couple les valeurs de la solution sur  $\Sigma$  et sur  $\Gamma$ . Aussi allons nous étudier un problème équivalent qui lève cet inconvénient. Pour cela, nous avons besoin de quelques espaces fonctionnels:

$$\begin{aligned} H_{0,\Gamma}^1(\widehat{\Omega}) &= \left\{ \varphi, \varphi \in H^1(\widehat{\Omega}), \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}, \\ H^{1/2}(\Sigma) &= \left\{ \psi, \psi = \varphi|_{\Sigma}, \varphi \in H^1(\widehat{\Omega}) \right\}, \end{aligned}$$

où  $\varphi|_{\Sigma}$  désigne la restriction ( ou trace ) de  $\varphi$  à  $\Sigma$ . Introduisons maintenant l'opérateur de relèvement  $r$  défini comme suit:

$$r : \psi \in H^{1/2}(\Sigma) \mapsto r(\psi) \in H_{0,\Gamma}^1(\widehat{\Omega}) \text{ tel que } r(\psi)|_{\Sigma} = \psi,$$

c'est-à-dire que  $r(\psi) \in H^1(\widehat{\Omega})$ ,  $r(\psi) = \psi$  sur  $\Sigma$  et  $r(\psi) = 0$  sur  $\Gamma$ . Un tel opérateur existe, il suffit de chercher  $r(\psi)$  comme solution du problème de Dirichlet suivant:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \varphi = \psi & \text{sur } \Sigma, \\ \varphi = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Pour  $\nu \in \widetilde{\mathbf{C}}$ , on cherche  $\hat{\varphi}_\nu^r \in H_{0,\Sigma}^1(\widehat{\Omega})$  solution du problème  $\widehat{Q}_\nu^r(f)$  :

$$\widehat{Q}_\nu^r(f) \begin{cases} \text{(a)} & \Delta\hat{\varphi}_\nu^r + \Delta r \left( \int_{\Gamma} (\hat{\varphi}_\nu^r(P)\partial_{n_P}\tilde{G}_\nu(M,P) - f(P)\tilde{G}_\nu(M,P)) d\Gamma_P \right) = 0 & \text{dans } \widehat{\Omega}, \\ \text{(b)} & \hat{\varphi}_\nu^r = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \text{(c)} & \partial_{n_M}\hat{\varphi}_\nu^r + \partial_{n_M}r \left( \int_{\Gamma} (\hat{\varphi}_\nu^r(P)\partial_{n_P}\tilde{G}_\nu(M,P) - f(P)\tilde{G}_\nu(M,P)) d\Gamma_P \Big|_{\Sigma} \right) = f & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

En utilisant la définition de l'opérateur de relèvement  $r$ , on montre que pour  $\nu \in \widetilde{\mathbf{C}}$ , il y a équivalence entre  $\widehat{Q}_\nu(f)$  et  $\widehat{Q}_\nu^r(f)$  au sens de la

**Proposition 3**  $\forall \nu \in \tilde{\mathbf{C}}$ ,

si  $\hat{\varphi}_\nu$  est solution de  $\hat{Q}_\nu(f)$  alors  $\hat{\varphi}_\nu^r = \hat{\varphi}_\nu - r(\hat{\varphi}_\nu|_\Sigma)$  est solution de  $\hat{Q}_\nu^r(f)$ ,

si  $\hat{\varphi}_\nu^r$  est solution de  $\hat{Q}_\nu^r(f)$ , alors

$$\hat{\varphi}_\nu = \hat{\varphi}_\nu^r + r \left( \int_\Gamma (\hat{\varphi}_\nu^r(P) \partial_{n_P} \tilde{G}_\nu(M, P) - f(P) \tilde{G}_\nu(M, P)) d\Gamma_P \Big|_\Sigma \right) \text{ est solution de } \hat{Q}_\nu(f).$$

## 2.2 Etude du problème $\hat{Q}_\nu^r(f)$

### 2.2.1 Formulation Variationnelle

Ecrire une formulation variationnelle du problème  $\hat{Q}_\nu^r(f)$  consiste à trouver une formulation équivalente, faisant intervenir des fonctions test appartenant au même espace fonctionnel que la solution cherchée, à savoir  $H_{0,\Sigma}^1(\hat{\Omega})$ . On définit ainsi sur cet espace la forme bilinéaire  $a(\varphi, \psi)$  :

$$\forall (\varphi, \psi) \in (H_{0,\Sigma}^1(\hat{\Omega}))^2, \quad a(\varphi, \psi) = \int_{\hat{\Omega}} \nabla \varphi \nabla \bar{\psi}.$$

On montre alors le

**Lemme 4**  $\forall \nu \in \tilde{\mathbf{C}}$ ,

$$\hat{\varphi}_\nu^r \text{ solution de } \hat{Q}_\nu^r(f) \Leftrightarrow \forall \hat{\psi} \in H_{0,\Sigma}^1(\hat{\Omega}), \quad A(\hat{\varphi}_\nu^r, \hat{\psi}) = L(\hat{\psi}),$$

où

$$\begin{aligned} A(\hat{\varphi}_\nu^r, \hat{\psi}) &= a(\hat{\varphi}_\nu^r, \hat{\psi}) + a \left( r \left( \int_\Gamma \hat{\varphi}_\nu^r(P) \partial_{n_P} \tilde{G}_\nu(M, P) d\Gamma_P \Big|_\Sigma \right), \hat{\psi} \right), \\ L(\hat{\psi}) &= a \left( r \left( \int_\Gamma f(P) \tilde{G}_\nu(M, P) d\Gamma_P \Big|_\Sigma \right), \hat{\psi} \right) + \int_\Gamma f \bar{\hat{\psi}} d\Gamma_P. \end{aligned}$$

Etudions brièvement chacun des termes de la formulation variationnelle.

- Grâce au lemme de Poincaré, on montre que  $a(\varphi, \psi)$  permet de définir une norme sur  $H_{0,\Sigma}^1(\hat{\Omega})$ , et on note le produit scalaire correspondant à cette norme  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , c'est-à-dire que  $\langle \varphi, \psi \rangle = a(\varphi, \psi)$ .
- On montre que  $a \left( r \left( \int_\Gamma \hat{\varphi}_\nu^r(P) \partial_{n_P} \tilde{G}_\nu(M, P) d\Gamma_P \Big|_\Sigma \right), \hat{\psi} \right)$  définit une forme bilinéaire continue par rapport à  $\hat{\varphi}_\nu^r$  et  $\hat{\psi}$  et donc, en utilisant le théorème de représentation de Riesz,  $\exists ! \hat{\mathbb{K}}_\nu^r$  opérateur de  $H_{0,\Sigma}^1(\hat{\Omega})$  dans  $H_{0,\Sigma}^1(\hat{\Omega})$ , tel que

$$\forall \hat{\psi} \in H_{0,\Sigma}^1(\hat{\Omega}), \quad a \left( r \left( \int_\Gamma \hat{\varphi}_\nu^r(P) \partial_{n_P} \tilde{G}_\nu(M, P) d\Gamma_P \Big|_\Sigma \right), \hat{\psi} \right) = \langle \hat{\mathbb{K}}_\nu^r(\hat{\varphi}_\nu^r), \hat{\psi} \rangle$$

- La même démarche permet de montrer que

$$\exists ! \hat{w}_\nu^r(f) \in H_{0,\Sigma}^1(\hat{\Omega}) \text{ tel que } \forall \hat{\psi} \in H_{0,\Sigma}^1(\hat{\Omega}), \quad L(\hat{\psi}) = \langle \hat{w}_\nu^r(f), \hat{\psi} \rangle$$

Moyennant ces quelques éléments et le lemme 4, on voit que chercher  $\hat{\varphi}_\nu^r$  solution de  $\hat{Q}_\nu^r(f)$  revient à résoudre l'équation suivante:

$$\forall \hat{\psi} \in H_{0,\Sigma}^1(\hat{\Omega}), \quad \langle \hat{\varphi}_\nu^r, \hat{\psi} \rangle + \langle \hat{\mathbb{K}}_\nu^r(\hat{\varphi}_\nu^r), \hat{\psi} \rangle = \langle \hat{w}_\nu^r(f), \hat{\psi} \rangle$$

ou de manière équivalente

$$(\mathbf{I} + \hat{\mathbb{K}}_\nu^r)(\hat{\varphi}_\nu^r) = \hat{w}_\nu^r(f),$$

où  $\mathbf{I}$  désigne l'opérateur identité dans  $H_{0,\Sigma}^1(\hat{\Omega})$ .

### 2.2.2 Opérateur de résolution $\widehat{\mathcal{R}}_r(\nu)$ et pôles $\mathbb{P}_r$

Commençons par une définition. Pour  $\nu \in \widetilde{\mathbb{C}}$ , si  $\mathbb{I} + \widehat{\mathbb{K}}_\nu^r$  est inversible, on appelle son inverse,  $\widehat{\mathcal{R}}_r(\nu)$ , opérateur de résolution. C'est donc l'opérateur suivant:

$$\widehat{\mathcal{R}}_r(\nu) : \begin{array}{ccc} H_{0,\Sigma}^1(\widehat{\Omega}) & \rightarrow & H_{0,\Sigma}^1(\widehat{\Omega}) \\ \widehat{w}_\nu^r(f) & \mapsto & \widehat{\varphi}_\nu^r \end{array}$$

Pour caractériser cet opérateur de résolution, nous allons utiliser un théorème qui nécessite le

**Lemme 5**  $(\mathbb{I} + \widehat{\mathbb{K}}_\nu^r)$  est une famille d'opérateurs de type Fredholm dépendant analytiquement de  $\nu \in \widetilde{\mathbb{C}}$ .

Justifions brièvement ce lemme.

Les opérateurs de type Fredholm sont les opérateurs de la forme  $\mathbb{I} + \mathbb{K}$  où  $\mathbb{K}$  est un opérateur compact. Le fait que  $\widehat{\mathbb{K}}_\nu^r$  soit un opérateur compact résulte principalement du théorème de compacité de Rellich. La dépendance analytique de la famille d'opérateurs  $(\mathbb{I} + \widehat{\mathbb{K}}_\nu^r)$  provient de l'analyticité de la fonction de Green (corollaire 1) et du lemme de Lebesgue.

Nous allons maintenant rappeler le théorème dû à S. Steinberg (voir [8]), que nous allons utiliser.

**Théorème 2** Soit une famille  $(\mathbb{I} + \widehat{\mathbb{K}}_\nu^r)$  d'opérateurs de type Fredholm dépendant analytiquement de  $\nu \in \widetilde{\mathbb{C}}$ . On a l'alternative suivante:

ou bien  $(\mathbb{I} + \widehat{\mathbb{K}}_\nu^r)$  n'est jamais bijectif pour aucune valeur de  $\nu \in \widetilde{\mathbb{C}}$ ,

ou bien  $\exists \nu_0 \in \widetilde{\mathbb{C}}$  tel que  $(\mathbb{I} + \widehat{\mathbb{K}}_{\nu_0}^r)$  est bijectif et alors,  $\exists \mathbb{P}_r$ , ensemble discret dénombrable de  $\widetilde{\mathbb{C}}$  tel que,  $\forall \nu \in \widetilde{\mathbb{C}} - \mathbb{P}_r$ ,  $(\mathbb{I} + \widehat{\mathbb{K}}_\nu^r)$  est bijectif et son inverse qui n'est autre que  $\widehat{\mathcal{R}}_r(\nu)$  est un opérateur méromorphe de pôles  $\mathbb{P}_r$ .

Ce résultat signifie que  $\widehat{\mathcal{R}}_r(\nu)$  est analytique par rapport à  $\nu \in \widetilde{\mathbb{C}} - \mathbb{P}_r$ , et que pour  $\tilde{\nu} \in \mathbb{P}_r$  et  $\nu \in \widetilde{\mathbb{C}} - \mathbb{P}_r$  proche de  $\tilde{\nu}$ ,  $\widehat{\mathcal{R}}_r(\nu)$  admet un développement en série de Laurent.

Le lemme 5 permet de voir que l'on est dans les conditions d'application du théorème 2. Le dernier temps de la démonstration consiste à prouver que l'on est dans la deuxième situation. Pour cela, on utilise le théorème 1. On sait en effet que pour tout  $f \in L^2(\Gamma)$  il existe une unique solution de  $\mathcal{N}\mathcal{K}_\nu(f)$  si  $\nu$  est suffisamment proche de 0. Appelons  $\nu_0$ , une telle valeur réelle de  $\nu$ . Les propositions 2 et 3, exprimant l'équivalence des problèmes  $\mathcal{N}\mathcal{K}_\nu(f)$ ,  $\widehat{Q}_\nu(f)$  et  $\widehat{Q}_\nu^r(f)$  permettent de conclure à l'existence d'une solution unique à  $\widehat{Q}_{\nu_0}^r(f)$ , pour toute donnée  $f$ . En prenant  $f = 0$  qui est équivalent à  $\widehat{w}_{\nu_0}^r(f) = 0$ , on voit que l'équation  $(\mathbb{I} + \widehat{\mathbb{K}}_{\nu_0}^r)(\widehat{\varphi}_{\nu_0}^r) = 0$  admet donc la solution unique  $\widehat{\varphi}_{\nu_0}^r = 0$  ce qui permet de conclure à l'injectivité de l'opérateur  $\mathbb{I} + \widehat{\mathbb{K}}_{\nu_0}^r$ . L'alternative de Fredholm entraîne la bijectivité de cet opérateur connaissant son injectivité. On a donc la

**Proposition 4**  $\exists \mathbb{P}_r$ , ensemble discret dénombrable de  $\widetilde{\mathbb{C}}$  tel que

$$\widehat{\mathcal{R}}_r(\nu) : \begin{array}{ccc} H_{0,\Sigma}^1(\widehat{\Omega}) & \rightarrow & H_{0,\Sigma}^1(\widehat{\Omega}) \\ \widehat{w}_\nu^r(f) & \mapsto & \widehat{\varphi}_\nu^r \end{array}$$

est un opérateur méromorphe sur  $\widetilde{\mathbb{C}}$  dont l'ensemble des pôles est  $\mathbb{P}_r$ .

### 3 Prolongement méromorphe du problème de Neumann-Kelvin

Le but de cette section est de montrer que l'on peut construire un prolongement méromorphe de la solution  $\varphi_\nu$  du problème  $\mathcal{NK}_\nu$ , qui sera lui-même solution d'un problème prolongeant  $\mathcal{NK}_\nu$  en un sens que l'on précisera. Pour construire ce prolongement, on va s'aider de l'opérateur  $\widehat{\mathcal{R}}_r(\nu)$ , opérateur de résolution du problème posé en domaine borné  $\widehat{Q}_\nu^r(f)$  dont les propriétés sont données dans la proposition 4. On commence par construire un prolongement de  $\varphi_\nu$  pour un  $f$  donné, avant de construire l'opérateur de prolongement pour tout  $f$ .

#### 3.1 Prolongement $\tilde{\varphi}_\nu$

Soit une donnée  $f \in L^2(\Gamma)$  fixée. Pour  $\nu \in \tilde{\mathcal{C}} - \mathbb{P}_r$ , soit  $\hat{\varphi}_\nu^r = \widehat{\mathcal{R}}_r(\nu)(\hat{w}_\nu^r(f))$  l'unique solution de  $\widehat{Q}_\nu^r$ , ce qui est licite d'après la proposition 4. On introduit alors  $\hat{\varphi}_\nu$  la solution de  $\widehat{Q}_\nu$  construite à partir de  $\hat{\varphi}_\nu^r$  selon la formule précisée dans la proposition 3. Pour  $\nu \in \tilde{\mathcal{C}} - \mathbb{P}_r$ , on définit le prolongement  $\tilde{\varphi}_\nu$  par

$$(1) \quad \forall M \in \Omega, \tilde{\varphi}_\nu(M) = \int_\Gamma (\hat{\varphi}_\nu(P) \partial_{n_P} \tilde{G}_\nu(M, P) - f(P) \tilde{G}_\nu(M, P)) d\Gamma_P.$$

En utilisant l'analyticité de  $\hat{w}_\nu^r(f)$ , dont la démonstration est semblable à celle du lemme 5, l'analyticité de la fonction de Green  $\tilde{G}_\nu(M, P)$  (voir Corollaire 1) et la méromorphie de l'opérateur  $\widehat{\mathcal{R}}_r(\nu)$  (voir proposition 4), on montre le

**Lemme 6**  $\tilde{\varphi}_\nu$  est méromorphe par rapport à  $\nu \in \tilde{\mathcal{C}}$  et l'ensemble de ses pôles est inclus dans  $\mathbb{P}_r$ .

On montre ensuite, en suivant la même démarche que dans la proposition 2, le

**Lemme 7**  $\forall \nu \in \tilde{\mathcal{C}} - \mathbb{P}_r$ ,

$\hat{\varphi}_\nu$  est solution de  $\widehat{Q}_\nu(f) \Leftrightarrow \tilde{\varphi}_\nu$  est solution de  $\widetilde{\mathcal{NK}}_\nu(f)$  :

$$\widetilde{\mathcal{NK}}_\nu(f) \begin{cases} (a) & \Delta \tilde{\varphi}_\nu = 0 & \text{dans } \Omega, \\ (b) & \partial_n \tilde{\varphi}_\nu = f & \text{sur } \Gamma, \\ (c) & \partial_x^2 \tilde{\varphi}_\nu + \nu \partial_x \tilde{\varphi}_\nu = 0 & \text{sur } SL, \\ (d) & \begin{cases} \lim_{z \rightarrow -\infty} \tilde{\varphi}_\nu = 0, \\ \lim_{z \rightarrow -\infty} \nabla \tilde{\varphi}_\nu = 0, \end{cases} \\ (e) & \left\{ \tilde{\varphi}_\nu(M) = \int_\Gamma (\tilde{\varphi}_\nu(P) \partial_{n_P} \tilde{G}_\nu(M, P) - f(P) \tilde{G}_\nu(M, P)) d\Gamma_P \quad M \neq P. \right. \end{cases}$$

**Remarque 4** Grâce à la formule de représentation intégrale (lemme 3), on montre que pour  $\nu \in \mathbb{R}^{*+}$ , si  $\varphi_\nu$  est solution de  $\mathcal{NK}_\nu(f)$  alors  $\varphi_\nu$  vérifie l'équation (e) de  $\widetilde{\mathcal{NK}}_\nu(f)$  et donc  $\widetilde{\mathcal{NK}}_\nu(f)$ . Réciproquement, compte tenu de la remarque 1,  $\tilde{\varphi}_\nu$  solution de  $\widetilde{\mathcal{NK}}_\nu(f)$  entraîne que  $\tilde{\varphi}_\nu$  est solution de  $\mathcal{NK}_\nu(f)$ .  $\mathcal{NK}_\nu(f)$  qui est défini seulement pour  $\nu \in \mathbb{R}^{*+}$  peut donc s'écrire sous la même forme que  $\widetilde{\mathcal{NK}}_\nu(f)$ , et  $\varphi_\nu = \tilde{\varphi}_\nu$ .

On voit donc que non seulement  $\tilde{\varphi}_\nu$  est un prolongement méromorphe de  $\varphi_\nu$  (lemme 6), mais en plus, le problème  $\widetilde{\mathcal{NK}}_\nu(f)$  dont est solution  $\tilde{\varphi}_\nu$  prolonge  $\mathcal{NK}_\nu(f)$  dans son écriture.

On introduit maintenant les opérateurs de résolution et de prolongement.

## 3.2 Opérateurs de résolution et de prolongement

### 3.2.1 Définitions

Si  $\nu \in \mathbb{R}^{*+}$ , on appelle opérateur de résolution,  $\mathcal{R}(\nu) : f \rightarrow \varphi_\nu$ , où  $\varphi_\nu$  est la solution unique de  $\mathcal{N}\mathcal{K}_\nu(f)$ , quand ce problème est bien posé. Cette définition a un sens si  $\nu \in \mathbb{R}^{*+} - \mathbb{P}_r$ , car le problème  $\mathcal{N}\mathcal{K}_\nu(f)$  est bien posé puisque  $\hat{Q}_\nu^r(f)$  est bien posé et qu'il y a équivalence entre ces deux problèmes d'après les propositions 2 et 3.

Si  $\nu \in \tilde{\mathbb{C}} - \mathbb{P}_r$ , on appelle opérateur de prolongement,  $\tilde{\mathcal{R}}(\nu) : f \rightarrow \tilde{\varphi}_\nu$ , où  $\tilde{\varphi}_\nu$  est le prolongement défini par l'équation (1). D'après le lemme 7,  $\tilde{\mathcal{R}}(\nu)(f)$  est la solution de  $\tilde{\mathcal{N}}\mathcal{K}_\nu(f)$ .

### 3.2.2 Les Résonances

$\tilde{\mathcal{R}}(\nu)$  prolonge  $\mathcal{R}(\nu)$  car grâce à la remarque 4, on sait que

$$\forall \nu \in \mathbb{R}^{*+} - \mathbb{P}_r, \forall f \in L^2(\Gamma), \mathcal{R}(\nu)(f) = \varphi_\nu = \tilde{\varphi}_\nu = \tilde{\mathcal{R}}(\nu)(f).$$

Ces deux opérateurs,  $\mathcal{R}(\nu)$  et  $\tilde{\mathcal{R}}(\nu)$ , coïncident donc pour  $\nu \in \mathbb{R}^{*+} - \mathbb{P}_r$ .

On montre ensuite en utilisant la méromorphie de  $\tilde{\varphi}_\nu$  (lemme 6) que  $\tilde{\mathcal{R}}(\nu)$  est méromorphe par rapport à la variable  $\nu \in \tilde{\mathbb{C}}$  et l'ensemble de ses pôles est inclus dans  $\mathbb{P}_r$ . En fait, on peut montrer (mais la démonstration un peu technique n'est pas reproduite ici) que ses pôles coïncident avec l'ensemble  $\mathbb{P}_r$ . Comme le problème  $\tilde{\mathcal{N}}\mathcal{K}_\nu(f)$  est indépendant de la manière dont on réduit en domaine borné, les pôles  $\mathbb{P}_r$  sont donc indépendants de  $\hat{Q}_\nu^r$ . On les note  $\mathbb{P}$ . On rassemble l'ensemble de ces résultats dans le

**Théorème 3**  $\tilde{\mathcal{R}}(\nu)$  est un prolongement méromorphe de  $\mathcal{R}(\nu)$  (opérateur de résolution du problème  $\mathcal{N}\mathcal{K}_\nu(f)$ ), lui-même résolvant le problème  $\tilde{\mathcal{N}}\mathcal{K}_\nu(f)$ , dont l'ensemble des pôles est  $\mathbb{P}$ . On appelle **résonances** les éléments de  $\mathbb{P}$ .

**Corollaire 2** sauf pour un ensemble discret dénombrable de valeurs de  $\nu \in \mathbb{R}^{*+}$ , le problème  $\mathcal{N}\mathcal{K}_\nu(f)$  est bien posé.

### 3.2.3 Caractérisation des Résonances

On a vu dans la proposition 4 que les résonances sont les pôles de l'opérateur de résolution en domaine borné. Elles sont donc caractérisées par

$$\begin{aligned} \nu \in \mathbb{P} &\Leftrightarrow \mathbb{I} + \hat{\mathbb{K}}_\nu^r \text{ non injectif} \\ &\Leftrightarrow \exists \hat{\varphi}_\nu^r \neq 0 \text{ solution de} \\ &\hat{Q}_\nu^r(f) \begin{cases} \Delta \hat{\varphi}_\nu^r = 0 & \text{dans } \hat{\Omega}, \\ \hat{\varphi}_\nu^r = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \partial_{nM} \hat{\varphi}_\nu^r = -\partial_{nM} r \left( \int_\Gamma (\hat{\varphi}_\nu^r(P) \partial_{n_P} \tilde{G}_\nu(M, P)) d\Gamma_P \Big|_\Sigma \right) & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \end{aligned}$$

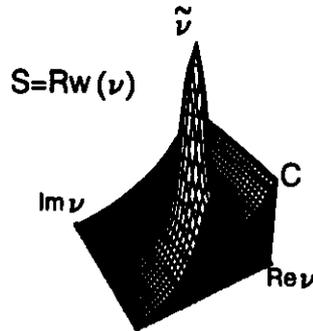
En utilisant le théorème 3, on a une autre caractérisation des résonances.

$$\tilde{\nu} \in \mathbb{P} \Leftrightarrow \exists f \in L^2(\Gamma), \tilde{\varphi}_\nu \text{ solution de } \tilde{\mathcal{N}}\mathcal{K}_\nu(f) \text{ admet } \tilde{\nu} \text{ comme pôle.}$$

### 3.3 Interprétation

Revenons au problème de résistance de vague. Dans ce cas, la donnée s'écrit  $f = -U_0(\vec{x} \cdot \vec{n})$ . Le théorème 3 permet d'écrire que  $\tilde{\varphi}_\nu = \tilde{\mathcal{R}}(\nu)(f = -U_0(\vec{x} \cdot \vec{n}))$  est un prolongement méromorphe de  $\varphi_\nu$  (solution unique du problème  $\mathcal{NK}_\nu$ ), qui est solution du problème  $\tilde{\mathcal{NK}}_\nu$  et dont l'ensemble des pôles est inclus dans  $\mathbb{P}$ .

Si  $\tilde{\nu}$  est un de ces pôles, cela signifie que  $\tilde{\varphi}_\nu$  admet un développement en série de Laurent au voisinage de  $\tilde{\nu}$ , et donc la résistance de vagues  $R_w$  qui est une intégrale dépendant de  $\tilde{\varphi}_\nu$  admet aussi un développement en série de Laurent, ce que l'on représente sur la figure suivante:



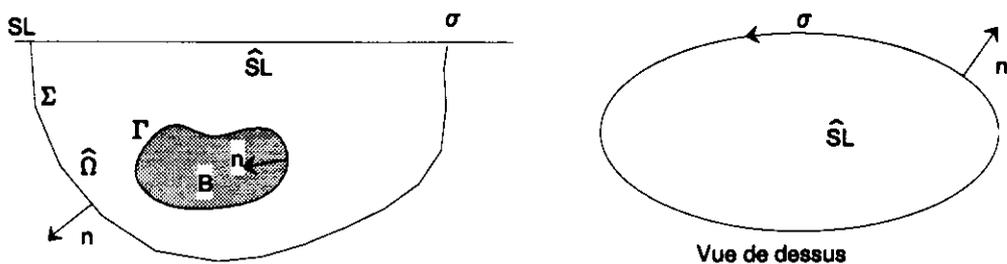
On voit que si  $\tilde{\nu}$  se trouve près de l'axe réel, le fait que la surface  $S$  tende vers l'infini en ce point influence la forme de la courbe  $C$  qui est l'intersection de la surface  $S$  avec le plan  $\Im(\nu) = 0$ . Ceci va introduire les oscillations que l'on remarque sur les courbes expérimentales de résistance de vagues.

## 4 Vers le corps perçant...

La technique de démonstration que l'on a utilisée est complètement inadaptée au cas du corps perçant la surface libre. En effet, dans la méthode de réduction en domaine borné, nous avons entouré le corps  $B$  par une surface  $\Sigma$  ne touchant pas la surface libre  $SL$ . Bien évidemment, cela empêche de faire remonter librement le corps vers  $SL$ . La méthode que nous allons rapidement décrire, tout en ne réglant pas tous les problèmes posés par le cas du corps perçant, permet toutefois de faire remonter le corps aussi près que l'on veut de  $SL$  en gardant la surface  $\Sigma$  fixe.

### 4.1 Problème $\tilde{Q}_\nu^p(f)$

Soit  $\Sigma$  une surface entourant le corps et rencontrant la surface libre  $SL$  le long de la ligne  $\sigma$ .



On appelle  $\widehat{SL}$  la partie de surface libre intérieure à  $\sigma$ . On appelle  $\widehat{\Omega}$  le domaine volumique compris entre  $\Gamma$ ,  $\widehat{SL}$  et  $\Sigma$ . On définit ensuite les espaces fonctionnels que l'on va utiliser.

$$\begin{aligned} H^{1,x}(\widehat{SL}) &= \left\{ \psi, \psi \in L^2(\widehat{SL}), \partial_x \psi \in L^2(\widehat{SL}) \right\}, \\ H(\widehat{\Omega}) &= H \left\{ \varphi, \varphi \in H^1(\widehat{\Omega}), \varphi|_{\widehat{SL}} \in H^{1,x}(\widehat{SL}) \right\}. \end{aligned}$$

Pour  $\nu \in \widetilde{\mathcal{C}}$ , i.e.,  $\nu \in \mathbb{C}$ ,  $\Re(\nu) > 0$ , on cherche  $\hat{\varphi}_\nu^p \in H(\widehat{\Omega})$  solution du problème  $\widehat{Q}_\nu^p(f)$  posé sous forme variationnelle  $\forall \hat{\psi} \in H(\widehat{\Omega})$ ,

$$\widehat{Q}_\nu^p(f) \left\{ \begin{array}{l} \int_{\widehat{\Omega}} \nabla \hat{\varphi}_\nu^p \nabla \hat{\psi} + \frac{1}{\nu} \int_{\widehat{SL}} \partial_x \hat{\varphi}_\nu^p \partial_x \hat{\psi} \\ + \mu \int_{\Sigma} \hat{\varphi}_\nu^p \hat{\psi} - \int_{\Sigma} \hat{\psi} \int_{\Gamma} \hat{\varphi}_\nu^p \partial_{n_P} \tilde{G}_\mu(M, P) d\Gamma_P = \int_{\Gamma} f(P) \hat{\psi} d\Gamma_P \\ - \int_{\Sigma} \hat{\psi} \int_{\Gamma} f(P) \tilde{G}_\mu(M, P) d\Gamma_P \\ \frac{1}{\nu} \int_{\sigma} \hat{\psi} \int_{\Gamma} \hat{\varphi}_\nu^p \partial_{n_P} \tilde{G}_x(M, P) d\Gamma_P + \frac{1}{\nu} \int_{\sigma} \hat{\psi} \int_{\Gamma} f(P) \tilde{G}_x(M, P) d\Gamma_P \\ - \frac{2}{\nu} \int_{\widehat{SL}} \partial_x \hat{\psi} \int_{\Gamma} \hat{\varphi}_\nu^p \partial_x \partial_{n_P} \tilde{G}_\mu(M, P) d\Gamma_P - \frac{2}{\nu} \int_{\widehat{SL}} \partial_x \hat{\psi} \int_{\Gamma} f(P) \partial_x \tilde{G}_\nu(M, P) d\Gamma_P \end{array} \right.$$

où on a posé

$$\begin{aligned} \forall \mu \in \widetilde{\mathcal{C}}, \tilde{G}_\mu(M, P) &= \partial_{n_M} \tilde{G}_\nu(M, P) + \mu \tilde{G}_\nu(M, P) \Big|_{M \in \Sigma}, \\ \tilde{G}_x(M, P) &= \partial_{x_M} \tilde{G}_\nu(M, P) n'_{x_M} \Big|_{M \in \sigma}. \end{aligned}$$

## 4.2 Les résonances

La formulation variationnelle de  $\widehat{Q}_\nu^p(f)$  et l'espace fonctionnel  $H(\widehat{\Omega})$  dans lequel on travaille sont plus compliqués. Cependant, ils sont bien adaptés au cas où la surface de couplage perce (attention, ce n'est pas le corps perçant). On montre alors en suivant les mêmes étapes que dans les deux sections précédentes que:

- $\forall \nu \in \mathbb{R}^{**}$ , les problèmes  $\mathcal{N}\mathcal{K}_\nu(f)$  et  $\widehat{Q}_\nu^p(f)$  sont équivalents.
- $\forall \nu \in \widetilde{\mathcal{C}}$ , résoudre  $\widehat{Q}_\nu^p(f)$  revient à résoudre l'équation suivante

$$(\mathbb{I} + \hat{\mathbb{K}}_\nu^p)(\hat{\varphi}_\nu^p) = \hat{w}_\nu^p(f)$$

où  $\mathbb{I}$  désigne l'opérateur identité dans  $H(\widehat{\Omega})$ ,  $\hat{\mathbb{K}}_\nu^p : H(\widehat{\Omega}) \rightarrow H(\widehat{\Omega})$  et  $\hat{w}_\nu^p(f) \in H(\widehat{\Omega})$ .

- $\exists \mathbb{P}_p$  ensemble discret de  $\widetilde{\mathcal{C}}$  tel que l'opérateur de résolution

$$\widehat{\mathcal{R}}_p(\nu) : \begin{array}{ccc} H(\widehat{\Omega}) & \rightarrow & H(\widehat{\Omega}) \\ \hat{w}_\nu^p(f) & \mapsto & \hat{\varphi}_\nu^p \end{array}$$

est un opérateur méromorphe sur  $\widetilde{\mathcal{C}}$  dont l'ensemble des pôles est  $\mathbb{P}_p$ .

- On définit l'opérateur de prolongement  $\widetilde{\mathcal{R}}_p(\nu)$  construit à partir de  $\widehat{\mathcal{R}}_p(\nu)$  et on montre que  $\widetilde{\mathcal{R}}_p(\nu)$  est un prolongement méromorphe de  $\mathcal{R}(\nu)$  (opérateur de résolution du problème  $(\mathcal{N}\mathcal{K}_\nu)$ ), dont l'ensemble des pôles est  $\mathbb{P}_p$ .
- Par unicité du prolongement analytique, on déduit que  $\widetilde{\mathcal{R}}_p(\nu) = \widetilde{\mathcal{R}}(\nu)$  et que  $\mathbb{P}_p = \mathbb{P}$ . On retrouve les résonances, comme éléments de  $\mathbb{P}$ .

## Conclusion

Dans le cas du corps immergé, on obtient le résultat annoncé, à savoir que les oscillations observées sur certaines courbes de résistance de vagues doivent provenir de l'existence de résonances. Malheureusement, peu de travaux théoriques, à notre connaissance, permettent de les localiser ou de les dénombrer. En partant des caractérisations que l'on a donné, on doit pouvoir trouver numériquement ces résonances comme l'a fait C. Hazard (voir [9]) pour le problème de tenue à la mer de structures élastiques.

Dans le cas du corps perçant, comme on l'a dit en remarque 2, la principale difficulté vient du comportement singulier de la fonction de Green quand  $M$  et  $P$  sont l'un derrière l'autre sur la surface libre (voir [10]). Par ailleurs, le fait de linéariser par rapport à l'écoulement uniforme devient discutable près de la surface libre. Face à ces deux constatations, une des voies possibles est de changer de linéarisation au voisinage du corps, et de garder le modèle de Neumann-Kelvin loin du corps. On couple alors un problème défini au voisinage du corps avec un problème de type Neumann-Kelvin à l'extérieur d'un domaine, que l'on étudie suivant l'approche développée dans la section 4. Si elle ne résoud pas les difficultés liées à la fonction de Green, cette méthode permet d'isoler les deux difficultés citées plus haut.

## Références

- [1] J-M. Quenez, C. Hazard, *Resonances of the 2-D Neumann-Kelvin problem*, Eighth international workshop on water-waves and floating bodies, St John's, Canada, 1993.
- [2] J.V. Wehausen et E.V. Laitone, *Surface Waves*, Handbuch der Physik, vol.IX, pp. 446-778, 1960.
- [3] M. Lenoir, *Méthodes de couplage en hydrodynamique navale et application à la résistance de vagues bidimensionnelle*, Rapport de recherche ENSTA 164, 1982
- [4] C. Guttman, *Résultats théoriques et numériques sur la résistance de vagues d'un corps tridimensionnel immergé*, Rapport de recherche ENSTA 177, 1983.
- [5] B.R. Vainberg, V.G. Maz'ja, *On ship Waves*, à paraître.
- [6] R. Dautray, J.L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Tome 2, 1984.
- [7] A. Jami, M. Lenoir, *A variational formulation for exterior problems in linear hydrodynamics*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol 16, pp. 341-359, 1978.
- [8] S. Steinberg, *Meromorphic Families of Compact Operators*, Arch. Ration. Mech. Anal., Vol 31, pp. 372-380, 1968.
- [9] C. Hazard, M. Lenoir, *Determination of Scattering frequencies for an Elastic Floating Body*, Siam J. Math. Anal., Vol 24, pp. 1458-1514, 1993.
- [10] D. Euvrard, *Les 1001 facéties de la fonction de Green du problème de la Résistance de vagues*, Rapport de recherche ENSTA 144, 1983.