

**5<sup>e</sup> JOURNÉES DE L'HYDRODYNAMIQUE**

**22, 23, 24 mars 1995 – ROUEN**

**SIMULATION NUMERIQUE DU PILONNEMENT D'UN CYLINDRE PERCANT LA  
SURFACE LIBRE EN FLUIDE VISQUEUX :  
RESOLUTION DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES BIDIMENSIONNELLES POUR  
UN ECOULEMENT INSTATIONNAIRE**

**L. GENTAZ, B. ALESSANDRINI, G. DELHOMMEAU**  
*Division Hydrodynamique Navale, Laboratoire de Mécanique des Fluides*  
*URA 1217 du CNRS*  
*Ecole Centrale de Nantes 1, Rue de la Noë 44072 Nantes Cedex 03*

**RESUME**

Cet article concerne la réalisation d'un code permettant la simulation numérique du pilonnement d'un corps percant la surface libre en fluide visqueux et incompressible.

L'écoulement est supposé instationnaire et laminaire. Les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles sont discrétisées par une méthode de différences finies. La déformée de surface libre est calculée indépendamment du système couplé en vitesses-pressure par résolution de l'équation cinématique.

L'originalité de ce code réside dans la prise en compte des conditions aux limites de surface libre et dans le remaillage effectué à chaque itération du processus itératif, ce qui permet de suivre les évolutions du domaine physique.

Les efforts hydrodynamiques sont calculés et comparés avec des résultats expérimentaux. L'intérêt de cette formulation est de pouvoir calculer les efforts visqueux qui, actuellement, ne sont accessibles que de façon expérimentale ou par des formules empiriques.

**SUMMARY**

This article deals with the realisation of a code which allows numerical simulation of forced sinusoidal heave of a surface piercing body in viscous and incompressible fluid.

The flow is supposed unsteady and laminar. Two dimensional Navier-Stokes equations are discretised by a finite-difference method. Free surface elevation is calculated by resolution of the kinematic condition independently of the coupled velocity-pressure system.

The original aspects of this code are both consideration of the free surface boundary conditions and regriding of the moving physical domain at each iteration.

Hydrodynamic forces and coefficients are calculated and compared with experimental results.

The interest of this theory lies in the numerical calculation of viscous effects which at this time can only be obtained by experiments or empirical formulas.

## 1. INTRODUCTION

Le problème du calcul des efforts sur un cylindre bidimensionnel perçant la surface libre et soumis à des mouvements forcés a fait l'objet de nombreuses études numériques. Des solutions en fluide parfait, s'appuyant sur les méthodes de perturbation, ont tout d'abord été développées. Ursell [17] a donné une solution au 1er ordre dans le cas du cylindre circulaire en pilonnement. Lee [7] et Parissis [11] ont ensuite obtenu des solutions au 2ème ordre pour des cylindres, à section circulaire ou en U, en pilonnement. Ils ont ainsi montré que les efforts hydrodynamiques du second ordre augmentaient avec la fréquence du mouvement forcé et pouvaient devenir significatifs vis-à-vis de ceux du premier ordre. Potash [13] a généralisé cette solution au 2ème ordre à des mouvements de roulis, d'embarquée et à leurs couplages. Plus tard, Papanikolaou et Nowacki [10] ont construit une théorie complète au second ordre appliquée aux mouvements d'embarquée, de pilonnement et de roulis pour différentes sections. Toutes ces méthodes s'appuient sur des distributions de singularités dont on cherche à déterminer les intensités en satisfaisant la condition de glissement sur le corps.

Parallèlement à ces méthodes s'appuyant sur des développements aux différents ordres des grandeurs physiques (potentiel, pression, déformée de surface libre, mouvements du corps), certains auteurs, comme Faltinsen [4], ont entrepris des simulations directes du problème non-linéaire complet. Avec cette technique, le corps et la surface libre sont discrétisés. Les distributions de singularités sur ces frontières sont calculées par l'intermédiaire d'une équation intégrale et la géométrie du domaine actualisée à chaque pas de temps. Cette méthode permet de traiter de problèmes très variés : bassin à houle, onde solitaire, diffraction-radiation.

D'autres auteurs s'appuient sur des maillages curvilignes adaptés au domaine physique et générés par des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Les équations régissant l'écoulement et les conditions aux limites sont exprimées dans le domaine de calcul en coordonnées curvilignes puis discrétisées par des méthodes de différences finies. Elles sont ensuite résolues par une procédure itérative. Telste [16] résout ainsi le problème d'un cylindre perçant la surface libre en fluide parfait. Shanks et Thompson [14] utilisent quant à eux les équations de Navier-Stokes pour un écoulement laminaire.

Nichols et Hirt [8], pour leur part, ont présenté des résultats en fluide visqueux en bidimensionnel et tridimensionnel et étudié les effets de longueur finie dans le cas de corps en pilonnement.

Enfin, Yeung et Ananthakrishnan [21][22] ont également développé une solution en fluide visqueux. Le maillage est basé sur le principe variationnel et les équations de Navier-Stokes résolues par une formulation faisant intervenir un champ de vitesses auxiliaire. De plus, ceux-ci ont effectué une quantification des effets visqueux.

Dans la méthode présentée ici, le maillage est effectué par interpolation transfinie [3]. Les équations de Navier-Stokes pour un écoulement laminaire et l'équation de continuité sont transformées suivant un système de coordonnées curvilignes dans lequel la partie immergée du cylindre, la surface libre et les autres frontières du domaine physique sont des lignes de coordonnées. Le système linéaire en vitesses-pression, issu de la discrétisation des équations, est constitué puis résolu par l'algorithme itératif SIMPLER [12]. La nouvelle déformée de surface libre est ensuite déterminée en utilisant la condition cinématique de surface libre. Un remaillage du domaine est alors effectué en tenant compte de la nouvelle position de la surface libre et du mouvement de pilonnement du cylindre. Le processus peut ainsi être itéré [1].

Un code de calcul utilisant cette technique a permis de réaliser des simulations de propagation de houle ou d'onde solitaire générées par batteur-piston.

Dans ce qui suit, l'ensemble de la méthode est décrit et les premiers éléments de validation du code concernant la simulation du cylindre en pilonnement forcé sont présentés.

## 2. EQUATIONS

En l'absence de signe somme, les termes indicés par  $i$ ,  $j$ ,  $k$  ou  $l$  sont sommés sur les valeurs 1 et 2 de ces indices.

### 2.1. Transformation partielle des équations

Un repère orthonormé  $(O, x^1, x^2)$  supposé galiléen est associé au domaine physique,  $O$  étant un point de la surface libre au repos (le centre du cylindre au début de la simulation est placé en  $O$ ).  $x^1$  est horizontal et  $x^2$  est de direction verticale ascendante. Les inconnues du problème sont les composantes cartésiennes  $(u^1, u^2)$  de la vitesse absolue et la pression totale  $P$ . Le changement de variable  $p = P + \rho g x^2$ , où  $p$  est la pression dynamique, permet de tenir compte des efforts gravitationnels.  $\nu$  est la viscosité cinématique et  $\rho$  la masse volumique.

La discrétisation du domaine physique se fait par l'intermédiaire d'un système de coordonnées curvilignes  $(\varepsilon^1, \varepsilon^2)$ . Les frontières du domaine ainsi que toutes les lignes du maillage sont représentées par des lignes de coordonnées définies par  $\varepsilon^i = \text{Cste}$  ( $i=1$  ou  $2$ ). Ce système de coordonnées curvilignes permet de définir un domaine de calcul rectangulaire et fixe au cours de la simulation contrairement au domaine physique qui, lui, évolue en suivant les mouvements du cylindre et de la surface libre.

A chaque itération du processus instationnaire, une métrique représentant l'évolution de ce maillage est ainsi calculée en chacun des nœuds.

Une transformation partielle où les grandeurs vectorielles restent décomposées dans la base cartésienne est alors utilisée, de préférence à une transformation complète où les grandeurs vectorielles seraient décomposées sur les bases covariantes et contravariantes locales.

Après transformation, les équations sous forme convective s'écrivent donc :

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t} - \frac{\nu_g^j}{J} b_j^k \frac{\partial u^\alpha}{\partial \varepsilon^k} + \frac{u^j}{J} b_j^k \frac{\partial u^\alpha}{\partial \varepsilon^k} = -\frac{1}{\rho J} b_\alpha^k \frac{\partial p}{\partial \varepsilon^k} + \nu \left( g^{kl} \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \varepsilon^k \partial \varepsilon^l} + f^k \frac{\partial u^\alpha}{\partial \varepsilon^k} \right) \quad \alpha = 1 \text{ ou } 2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{J} b_j^i \frac{\partial u^j}{\partial \varepsilon^i} = 0 \quad (2)$$

### 2.2. Conditions aux limites de surface libre

La prise en compte des conditions aux limites de surface libre est un des aspects originaux de ce travail. Elles sont au nombre de trois et se composent d'une condition cinématique et de deux conditions dynamiques.

La condition cinématique porte sur la hauteur de déformée de surface libre  $h$  (définie par rapport à la surface libre au repos) et traduit le fait que les particules fluides situées sur la surface libre y restent à tout moment (hypothèse de continuité).

Les deux conditions dynamiques traduisent, pour leur part, la continuité des efforts à la traversée de la surface libre, en supposant que le vide règne au-dessus de celle-ci. Elles sont obtenues par projection du vecteur contrainte sur la normale et la tangente en tout point de la surface libre.

Les conditions aux limites de surface libre peuvent être exprimées dans le domaine de calcul en fonction des coordonnées curvilignes [1]. Il vient alors, respectivement, pour l'équation cinématique (3) et les équations dynamiques normale (4) et tangentielle (5) :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + A^1 \frac{\partial h}{\partial \varepsilon^1} = u^2 \quad \text{avec} \quad A^1 = \frac{b_1^1}{J} (u^1 - v_g^1) + \frac{b_2^1}{J} (u^2 - v_g^2) \quad (3)$$

$$p = \rho g x^2 + \frac{\gamma}{r} + 2\rho\nu \frac{b_i^2 b_j^2}{|b^2|} \frac{b_j^k}{J} \frac{\partial u^i}{\partial \varepsilon^k} \quad (4)$$

$$(b_j^k b_j^2 a_{1i} + b_j^k b_i^2 a_{1j}) \frac{\partial u^i}{\partial \varepsilon^k} = 0 \quad (5)$$

### 3. DISCRETISATION ET RESOLUTION NUMERIQUE

#### 3.1. Maillage du domaine physique

Le problème du cylindre en pilonnement étant supposé symétrique par rapport à  $(O, x^2)$ , le domaine physique sera limité par une portion de cylindre immergé, la surface libre, une portion de droite sous le cylindre appartenant à l'axe de symétrie et la frontière extérieure (figure 1). Les dimensions du domaine sont telles que l'hypothèse de profondeur infinie (d'après la théorie linéaire) est satisfaite et que la réflexion des vagues sur la frontière extérieure est négligeable.

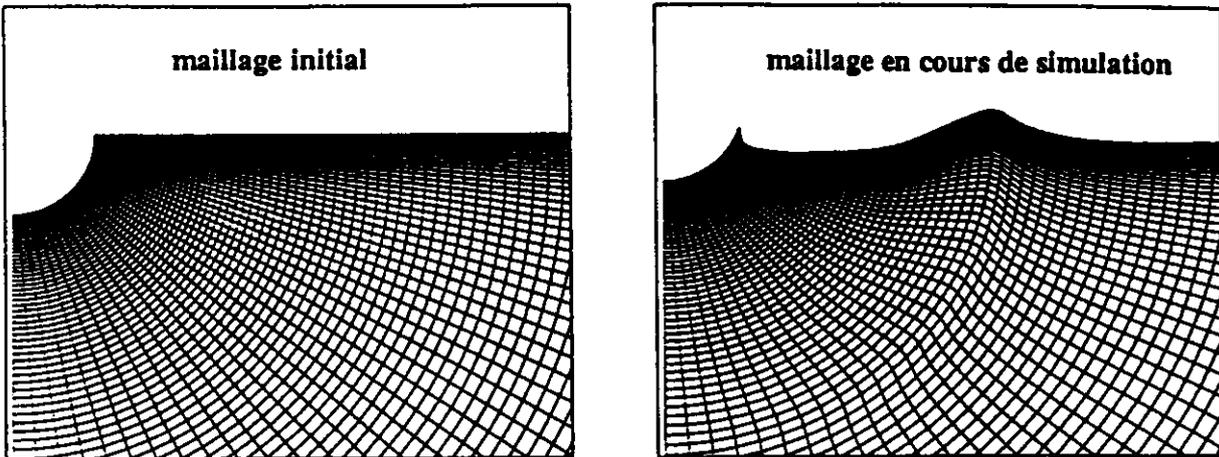


Fig. 1 : Evolution du maillage : détail de la zone proche du cylindre et de la surface libre.

Une méthode algébrique d'interpolation transfinie [3] permet de réaliser un maillage initial structuré et monobloc en O du domaine physique avant la mise en mouvement du cylindre. De plus, des fonctions de concentration permettent de resserrer ou d'écarter le maillage près des frontières. A chaque itération en temps, un remaillage partiel est effectué. Celui-ci consiste à calculer l'intersection entre la surface libre et chaque ligne  $\varepsilon^1 = \text{Cste}$  du maillage initial translaté. Sur chacune de ces lignes, les points sont ensuite redistribués suivant leur resserrement initial.

#### 3.2. Discrétisation des équations

Une disposition collocative centrée aux nœuds a été retenue pour les inconnues du problème. L'équation de transport (1) est linéarisée par rapport aux dérivées premières et secondes non-croisées des vitesses :

$$g^{ii} \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \varepsilon^{j^2}} = \left\{ \frac{1}{Jv} (u^j - v_s^j) b_j^k - f^k \right\} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \varepsilon^k} + \frac{1}{v} \frac{\partial u^\alpha}{\partial t} + \left\{ \frac{1}{\rho Jv} b_\alpha^k \frac{\partial p}{\partial \varepsilon^k} - g^{ii} \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \varepsilon^k \partial \varepsilon^l} \Big|_{k \neq l} \right\} \quad (6)$$

Après une normalisation par  $\varepsilon^{*i} = \varepsilon^i / \sqrt{g^{ii}}$ , l'équation (6) s'écrit avec  $\phi = u^\alpha$  :

$$\phi_{\varepsilon^{*1} \varepsilon^{*1}} + \phi_{\varepsilon^{*2} \varepsilon^{*2}} = 2A_1^* \phi_{\varepsilon^{*1}} + 2A_2^* \phi_{\varepsilon^{*2}} + \frac{1}{v} \phi_t + S_\phi \quad (7)$$

Les termes de convection  $A_1^*$ ,  $A_2^*$  et les termes source  $S_\phi$  seront calculés avec les valeurs du pas de temps précédent.

La discrétisation de l'équation de transport est effectuée en utilisant un schéma multi-exponentiel basé sur la décomposition symétrique de l'équation (7) suivant chacune des deux coordonnées curvilignes. Les termes  $A_i^*$  et  $G_i$  étant supposés constants sur chaque maille et en prenant un schéma du premier ordre décentré amont pour le terme instationnaire, la forme discrète finale de l'équation de transport en  $\phi$  au nœud  $P$  est donnée par :

$$\left( \frac{1}{C_{R_1}} + \frac{1}{C_{P_2}} + \frac{1}{\nu\tau} \right) \phi_P^{(n)} - \sum_{i=1}^2 \frac{1}{C_{P_i}} (C_{i^-} \phi_{i^-} + C_{i^+} \phi_{i^+}) - \frac{1}{\nu\tau} \phi_P^{(n-1)} + S_\phi = 0 \quad (8)$$

Discretiser l'équation de continuité (2) et les termes du gradient de pression issus du terme source  $S_\phi$  par des schémas centrés précis au second ordre provoque des problèmes de découplage pair-impair [19]. Des schémas décentrés au 1er ordre (soit 3 nœuds) sont donc utilisés. Le décentrement se fait vers l'amont pour l'équation de continuité et vers l'aval pour le gradient de pression [1].

### 3.3. Constitution et résolution du système couplé en vitesses-pression

Pour les frontières autres que la surface libre, des conditions de Dirichlet ou de Neumann sur les vitesses et les pressions sont utilisées. Pour la surface libre, la condition dynamique normale (4) fournit une relation sur la pression (la tension superficielle étant négligée). La condition dynamique tangentielle (5) fournit, quant à elle, une relation sur  $u^1$ . Pour  $u^2$ , une discrétisation sur la surface libre de l'équation de continuité (2) sera si possible utilisée.

La discrétisation de l'équation de transport, de l'équation de continuité et des différentes conditions limites donne donc finalement le double système matriciel suivant :

$$(E-A)U + GP = f, \quad DU = g \quad (9)$$

Le vecteur  $U$  regroupe les vitesses  $u^1$  et  $u^2$  en chaque point du maillage ; le vecteur  $P$  les pressions  $p$ .  $E$  est une matrice purement diagonale,  $A$  une matrice à diagonale nulle.  $D$  et  $G$  sont les matrices issues de la discrétisation, respectivement, de la divergence et du gradient de pression.  $f$  contient les termes sources et les termes croisés d'ordre deux.

L'équation de pression  $D(E-A)^{-1}(f-GP) = g$  obtenue par combinaison des systèmes linéaires (9) ne peut être résolue du fait de l'impossibilité pratique d'inverser la matrice pleine  $D(E-A)^{-1}G$ . Cette inversion nécessiterait, en effet, une place mémoire considérable.

L'utilisation d'un algorithme itératif de type SIMPLER [12] va permettre de contourner ce problème. Cet algorithme repose sur l'utilisation de  $E^{-1}$  comme inverse approchée de  $(E-A)$ , l'équation de pression devenant alors  $(DE^{-1}G)P = DE^{-1}(AU + f) - g$ .

L'utilisation de cet algorithme suppose l'inversion des matrices  $(E-A)$  et  $(DE^{-1}G)$ . Ces matrices sont des matrices creuses et l'emplacement des coefficients non nuls est bien déterminé du fait de l'utilisation de maillages structurés. La matrice  $(E-A)$  s'avère bien conditionnée car présentant une diagonale dominante, ce qui n'est pas le cas de la matrice  $(DE^{-1}G)$ . Un algorithme de type CGSTAB [18] avec préconditionnement LU incomplet est donc utilisé. Cet algorithme est inspiré de l'algorithme du double gradient conjugué (issu des méthodes de descente reposant sur des minimisations de normes) mais se révèle plus robuste que celui-ci.

### 3.4. Actualisation de la déformée de surface libre

Une fois les nouveaux champs de vitesses et de pression déterminés, la déformée de surface libre correspondante est calculée à l'aide de la condition cinématique (3).

La dérivée temporelle de l'élévation  $h$  de surface libre est discrétisée par un schéma décentré du premier ordre, la dérivée spatiale étant discrétisée, quant à elle, par un schéma de Dawson décentré en 4 points. Ce schéma permet de réduire le déphasage introduit par des schémas précis au 1er ou au 2ème ordre. Le décentrement du schéma de Dawson dépend du signe du coefficient  $A^1$  et assure sa stabilité :

$$\begin{cases} A^1 > 0 \Rightarrow (\partial h / \partial \varepsilon^1)_i = C_0 h_i + C_1 h_{i-1} + C_2 h_{i-2} + C_3 h_{i-3} \\ A^1 < 0 \Rightarrow (\partial h / \partial \varepsilon^1)_i = -C_0 h_i - C_1 h_{i+1} - C_2 h_{i+2} - C_3 h_{i+3} \end{cases} \quad (10)$$

Les coefficients  $C_i$  du schéma sont donnés par  $C_0 = 5/3$ ,  $C_1 = -5/2$ ,  $C_2 = 1$ ,  $C_3 = -1/6$ .

Une résolution explicite avec un sous-pas de temps est utilisée de préférence à une résolution implicite [1]. Après ce calcul, la hauteur de surface libre sur le cylindre (c'est à dire  $h_1$ ), impossible à calculer par intégration de la condition cinématique, est déduite à l'aide d'une extrapolation linéaire.

Une itération (k) du code instationnaire comprend donc les étapes suivantes : un remaillage du domaine avec la position du cylindre à l'itération (k) et la déformée de surface libre calculée à (k-1), le calcul de la métrique correspondant à ce nouveau maillage, la détermination de tous les éléments de la discrétisation : termes de convection-diffusion, termes sources, coefficients du schéma multi-exponentiel et des opérateurs gradient et divergence discrétisés, la construction et la résolution du système en vitesses-pression et enfin, le calcul de la nouvelle déformée de surface libre à l'aide de la condition cinématique.

## 4. RESULTATS

### 4.1. Principe de calcul des efforts et des coefficients hydrodynamiques

Le problème simulé est le mouvement forcé en pilonnement d'un corps perçant la surface libre. Il est supposé que le corps ne sera jamais totalement émergé ou immergé.

Le mouvement forcé en pilonnement est donné par  $y_c(t) = A \sin \omega t$  où  $A$  est l'amplitude et  $\omega$  la pulsation du mouvement. Le rayon  $r$  du cylindre sera pris égal à 1 m.

Les efforts hydrodynamiques calculés, par unité de longueur, sont les résultantes verticales des forces de pression et de frottement s'exerçant sur le cylindre, notées respectivement  $Rpy(t)$  et  $Rfy(t)$ .  $Rpy(t)$  est calculée à l'aide de la pression totale  $P$ . Ces efforts sont calculés à chaque itération de la simulation en temps sur la partie immergée exacte du cylindre.  $n_y$  est la composante verticale de la normale unitaire extérieure au cylindre (qui est défini par la ligne de maillage  $\varepsilon^1 = 0$ ).

$$Rpy(t) = - \int_{cyl} P n_y dl = - \int_0^1 (p - \rho g x^2) b_2^1 d\varepsilon^2 \quad (11) \quad Rfy(t) = \int_0^1 \rho v \left( \frac{\partial u^2}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^2} \right) b_j^1 d\varepsilon^2 \quad (12)$$

Pour le calcul des coefficients hydrodynamiques, il faut tenir compte de la masse d'eau du cylindre au repos  $Ms$  et de la masse d'eau dynamique  $Md(t)$  correspondant au mouvement du cylindre :

$$Ms = \rho \pi \frac{r^2}{2} \quad (13) \quad Md(t) = -\rho (\delta r^2 + y_c(t) r \cos \delta) \text{ avec } \delta = \arcsin\left(\frac{y_c(t)}{r}\right) \quad (14)$$

Les coefficients de masse ajoutée  $CM_{22}$ , en phase avec l'accélération du mouvement, et d'amortissement  $CA_{22}$ , en phase avec la vitesse, pour un mouvement de pilonnement sont déterminés par une analyse de Fourier de la fonction :

$$Rpy(t) + Rfy(t) - gMs - gMd(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (15)$$

Les adimensionalisations utilisées sont  $CM_{22} = \frac{|b_1|}{A\omega^2 0,5\rho\pi r^2}$  et  $CA_{22} = \frac{|a_1|\sqrt{r/g}}{A\omega 0,5\rho\pi r^2}$  [7] [15] (16)

Pour le calcul des forces  $F_a^{(n)}$  et des déphasages  $\delta_n$  aux différents ordres, seule la masse d'eau statique est retirée aux efforts hydrodynamiques, soit :

$$\begin{aligned}
 Rpy(t) + Rfy(t) - gMs &= \sum_{n=0}^{+\infty} (a'_n \cos n\omega t + b'_n \sin n\omega t) \\
 &= 2\rho g r^2 \left(\frac{A}{r}\right)^2 F_a^{(0)} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\rho g r^2 \left(\frac{A}{r}\right)^n F_a^{(n)} \sin(n\omega t + \delta_n) \quad [7] \quad [15] \quad (17)
 \end{aligned}$$

Cette séparation du calcul des différents coefficients du 1er ordre,  $F_a^{(1)}$  et  $\delta_1$  d'une part,  $CM_{22}$  et  $CA_{22}$  d'autre part, a été imposée par le fait que la masse d'eau dynamique  $Md(t)$  n'est pas une simple fonction en  $\sin \omega t$  directement incorporable au terme de masse ajoutée. Il s'avère toutefois que les harmoniques d'ordre supérieur de  $Md(t)$  sont très faibles. En pratique, calculer les coefficients  $F_a^{(0)}$ ,  $F_a^{(n)}$  et  $\delta_n$  pour  $n \geq 2$  avec les coefficients  $a_n$  et  $b_n$  ou avec les coefficients  $a'_n$  et  $b'_n$  donne des résultats à peu près identiques (les seuls écarts relevés supérieurs à 5% concernent le calcul de la force au 3ème ordre, les ordres de grandeur restant les mêmes).

De plus, la force de dérive verticale  $F_a^{(0)}$  calculée à partir des coefficients de Fourier en  $n=0$  est définie, en théorie fluide parfait, comme la partie constante du terme au deuxième ordre. Par la suite, elle sera notée  $F_0^{(2)}$ .

Un calcul en pilonnement défini par une amplitude  $A/r=0,2$  et une pulsation  $\omega = 3,16 \text{ rad.s}^{-1}$  a été effectué pour deux maillages de 5000 points (100 sur la surface libre, 50 sur le cylindre) : l'un, peu resserré sur le cylindre (maillage grossier) avec une taille réduite  $d/r$  de la première maille sur le cylindre égale à 0,03 et l'autre présentant un resserrement conséquent sur le cylindre (maillage fin) soit  $d/r=10^{-4}$ . Seul le calcul avec le maillage fin permet de capturer la couche limite sur le cylindre et donc d'estimer de façon correcte les efforts visqueux  $Rfy(t)$ . Un tel calcul pose cependant de nombreux problèmes de convergence (voir § 4.4. et 4.5.) dont les sauts sur la courbe des efforts (figure 2) sont un exemple. De plus, des temps de calcul beaucoup plus importants sont nécessaires (sur une machine 40 Mflops, pour 12 s de simulation, 18 h CPU contre 3 h 30 CPU avec le maillage grossier).

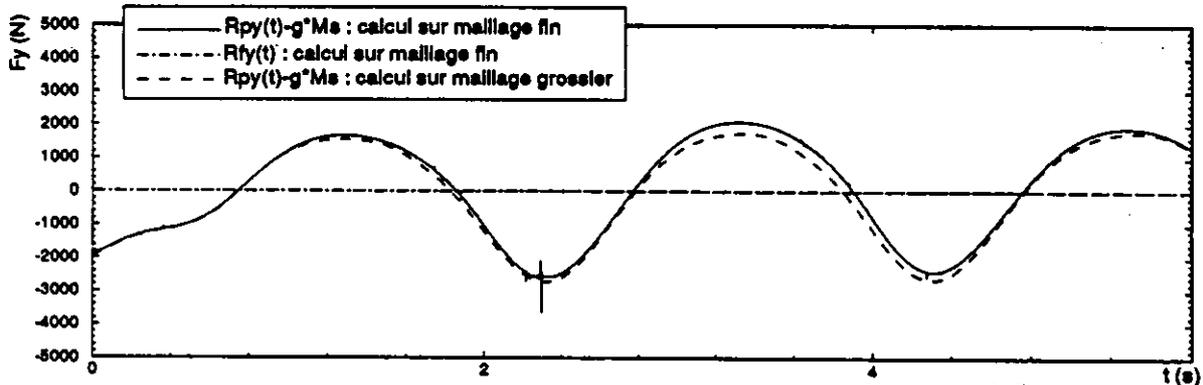


Fig. 2 : Comparaison des efforts pour deux types de maillage.

Mouvement du cylindre circulaire :  $y_c(t) = A \sin(\omega t)$  avec  $A/r=0,2$ ,  $\omega = 3,16 \text{ rad.s}^{-1}$ .

Les écarts entre les efforts de pression  $Rpy(t)$  obtenus avec le maillage grossier et avec le maillage fin sont peu importants (figure 2). Un calcul sur maillage grossier semble donc suffisant pour converger sur les efforts de pression.

Le tableau ci-dessous présente les écarts sur les coefficients hydrodynamiques calculés par les efforts de pression  $Rpy(t)$  obtenus avec les deux maillages :

	$CM_{22}$	$CA_{22}$	$F_a^{(1)}$	$\delta_1$ (deg)	$F_a^{(2)}$	$\delta_2$ (deg)	$F_0^{(2)}$	$F_a^{(3)}$
maillage grossier	0,643	0,350	0,555	210	0,449	-30	-0,115	0,225
maillage fin	0,625	0,348	0,567	209	0,428	-33	0,104	0,228

Pour l'ensemble des coefficients hydrodynamiques, excepté la force de dérive verticale, l'accord entre le calcul sur maillage grossier et sur maillage fin est satisfaisant.

Il semble donc légitime, afin de limiter les temps de calcul, de déterminer les différents coefficients hydrodynamiques en considérant uniquement les efforts de pression calculés sur des maillages grossiers où la couche limite n'apparaîtra pas et où les efforts visqueux seront mal modélisés.

#### 4.2. Résultats sur les coefficients hydrodynamiques

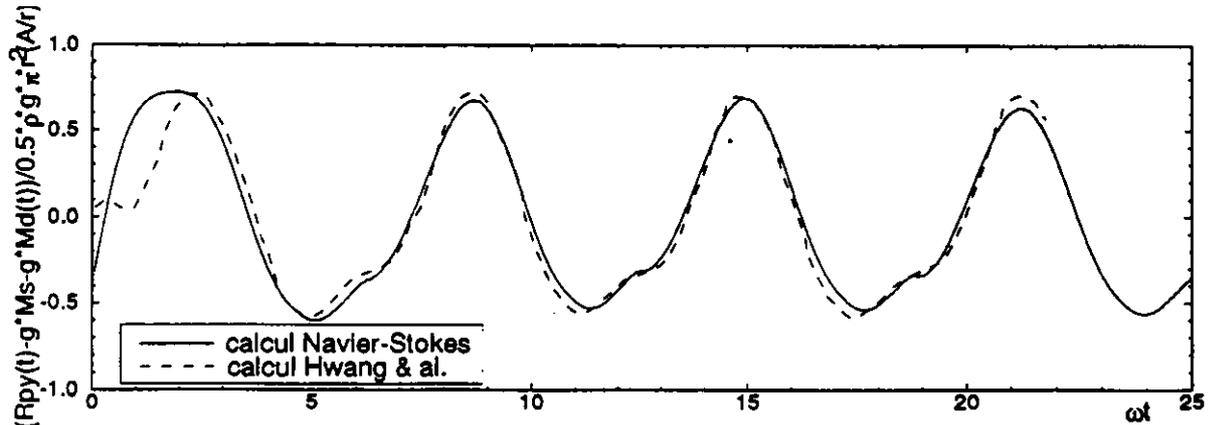


Fig. 3 : Variation temporelle des efforts de pression adimensionnalisés.

Mouvement du cylindre circulaire :  $y_c(t) = A \sin(\omega t)$  avec  $A/r=0,4$ ,  $\omega^2 r / g = 0,64$ .

La figure 3 montre l'évolution temporelle des efforts de pressions diminués des efforts  $gMs$  et  $gMd(t)$  puis adimensionnalisés, pour une amplitude réduite  $A/r=0,4$  et un coefficient sans dimension  $Kr = \omega^2 r / g$  égal à 0,64 (calcul fait sur un maillage grossier). Le régime permanent pour les efforts semble atteint très rapidement, et ce quelles que soient les amplitudes et les pulsations utilisées. L'accord avec un calcul fluide parfait non-linéaire de Hwang et al. [5] est bon. La différence entre les deux signaux au début de la simulation est due à des mises en mouvement du cylindre différentes.

Les calculs Navier-Stokes qui ont permis de déterminer les coefficients hydrodynamiques pour les amplitudes relatives  $A/r=0,2$  et  $0,4$  et des pulsations comprises entre  $1,1$  et  $4,43 \text{ rad.s}^{-1}$  ont donc été effectués sur des maillages de 5000 points relativement grossiers et peu resserrés au niveau du cylindre. La longueur du domaine varie de 15 à 100 m (le rayon du cylindre valant 1 m) suivant la pulsation du pilonnement. Comme précisé ci-dessus, seuls les efforts de pression ont été pris en compte pour le calcul des coefficients hydrodynamiques.

Les coefficients hydrodynamiques en pilonnement calculés sont les coefficients de masse ajoutée  $CM_{22}$  et d'amortissement  $CA_{22}$ , les efforts et déphasages des premier et second ordre,  $F_a^{(1)}$ ,  $\delta_1$ ,  $F_a^{(2)}$ ,  $\delta_2$ , la force de dérive verticale  $F_0^{(2)}$  et la force du 3ème ordre  $F_a^{(3)}$ . Ceux-ci sont comparés aux résultats expérimentaux de Yamashita [20], de Tasai et Koterayama [15] ainsi qu'aux calculs en fluide parfait de Papanikolaou [9] et Papanikolaou et Nowacki [10] (figures 4 à 11).

Les masses ajoutées (figure 4) augmentent avec l'amplitude de pilonnement tandis que les coefficients d'amortissement (figure 5) diminuent dans le même temps. Cette tendance est confirmée par les résultats expérimentaux. Les masses ajoutées sont globalement surestimées pour  $A/r=0,4$  et les coefficients d'amortissement sous-évalués pour  $A/r=0,2$ . A noter que pour les faibles pulsations, le calcul Navier-Stokes ne donne pas une valeur correcte pour les coefficients d'amortissement. Ceci provient sans doute des effets visqueux qui, d'après Yeung et Yu [23], peuvent devenir significatifs à basse fréquence. Seul un calcul sur un maillage fin avec prise en compte des efforts visqueux  $Rfy(t)$  pourra résoudre ce problème. Les force et déphasage au premier ordre (figures 6 et 7) ainsi que le déphasage au second ordre (figure 9) sont bien représentés, et ce, pour les deux amplitudes réduites. La force de dérive verticale (figure 10) est, quant à elle, sous-évaluée pour  $A/r=0,2$ . Enfin, les écarts importants visibles sur le coefficient d'amortissement (figure 5), les forces au 2ème et 3ème ordre (figures 8 et 11) pour  $A/r=0,4$  et à de grandes pulsations montrent sans doute l'insuffisance des maillages grossiers dans de tels cas de calcul.

En conclusion, les calculs en fluide visqueux sur des maillages grossiers donnent une estimation correcte de l'évolution des coefficients hydrodynamiques avec la pulsation, et ce pour les deux amplitudes traitées.

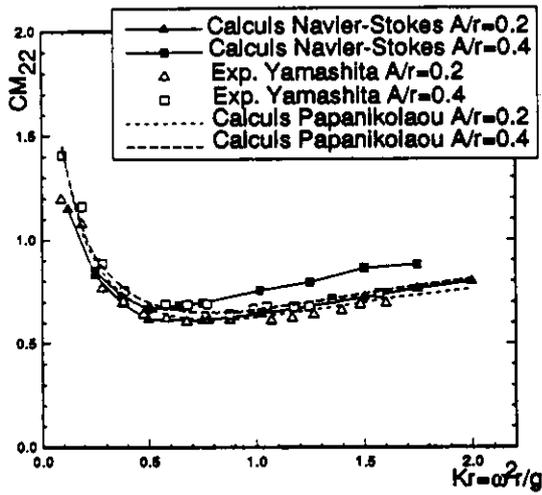


Fig. 4 : Coefficient de masse ajoutée  $CM_{22}$ .

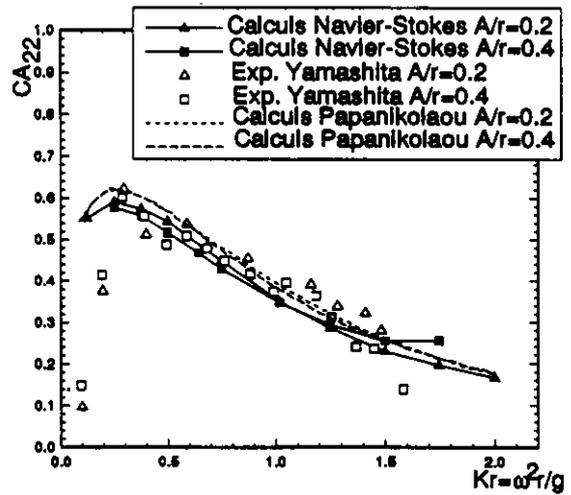


Fig. 5 : Coefficient d'amortissement  $CA_{22}$ .

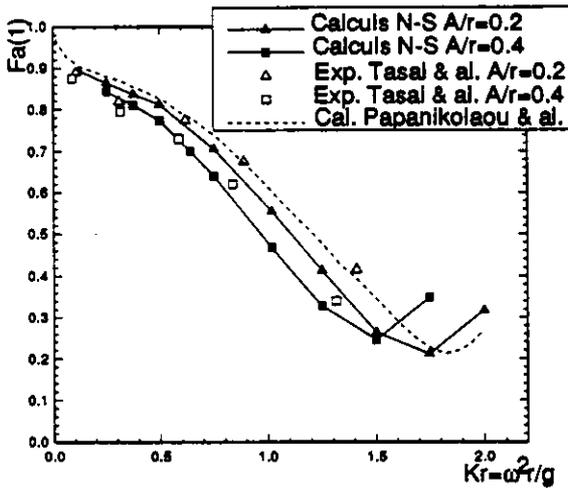


Fig. 6 : Force du premier ordre  $F_a^{(1)}$ .

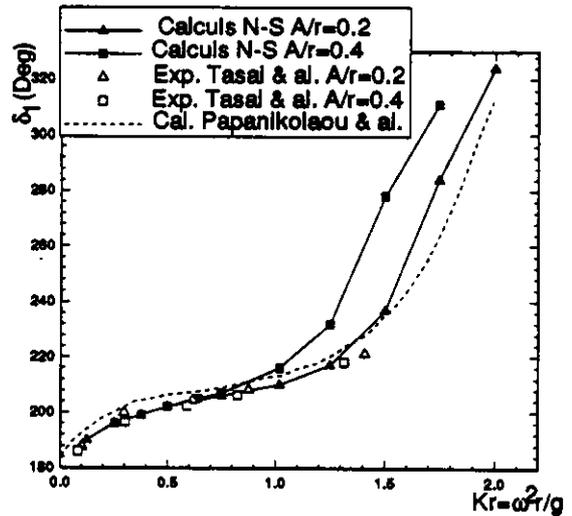


Fig. 7 : Déphasage du premier ordre  $\delta_1$ .

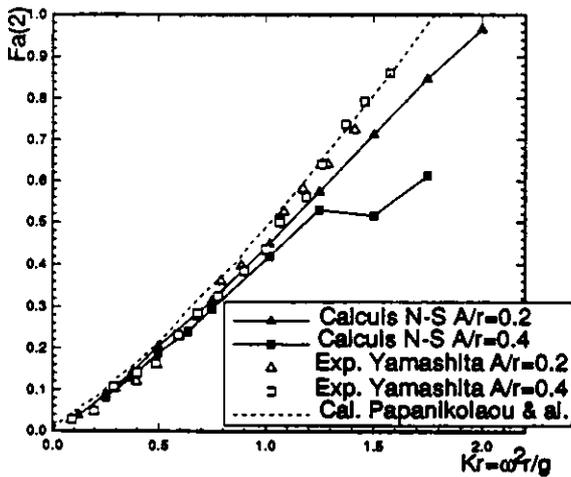


Fig. 8 : Force du second ordre  $F_a^{(2)}$ .

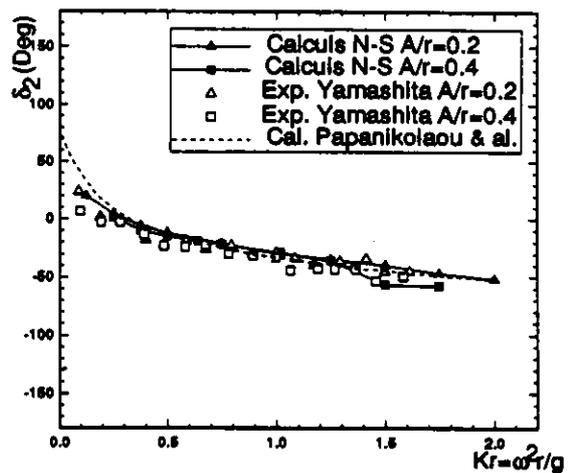


Fig. 9 : Déphasage du second ordre  $\delta_2$ .

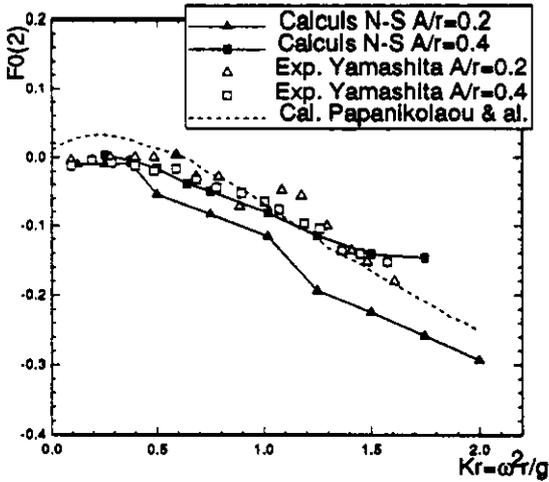


Fig. 10 : Force de dérive verticale  $F_0^{(2)}$ .

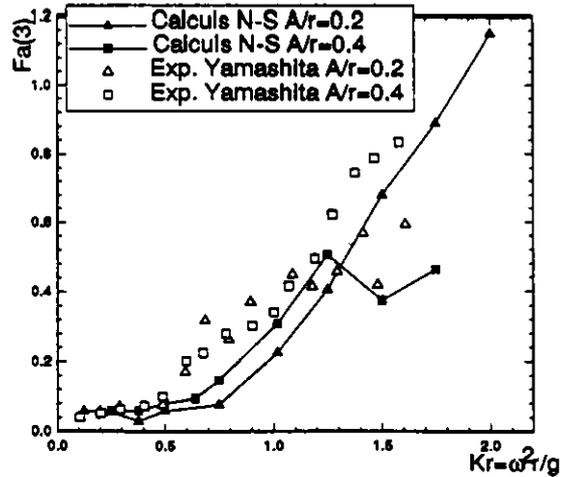


Fig. 11 : Force du troisième ordre  $F_a^{(3)}$ .

4.3. Résultats sur les déformées de surface libre

Au cours des simulations effectuées pour les amplitudes relatives de pilonnement  $A/r=0,2$  et  $0,4$  et différentes pulsations, les hauteurs de surface libre  $h(t)$  ont été interpolées à chaque pas de temps pour un point fixe situé à mi-longueur du domaine. Un développement en série de Fourier a été effectué sous la forme :

$$h(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n \cos(n\omega t + \delta_n) \tag{18}$$

L'amplitude adimensionalisée d'ordre  $n$  est alors définie par  $A_n = h_n / A$ .

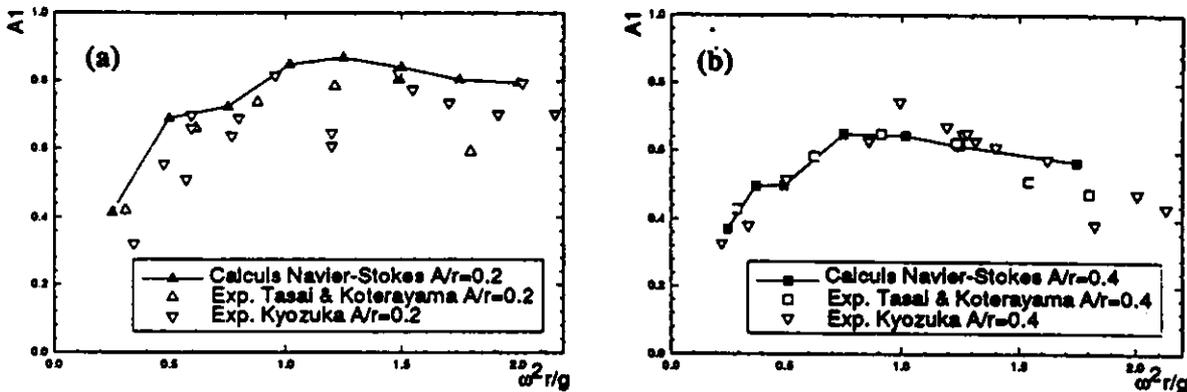


Fig. 12 : Amplitude au premier ordre de la houle générée pour  $A/r=0,2$  (a) et  $A/r=0,4$  (b).

L'amplitude au premier ordre  $A_1$  est comparée aux résultats expérimentaux de Tasai et Koterayama [15] et Kyojuka [6] (figure 12). Pour l'amplitude  $A/r=0,2$ , l'allure de la courbe calculée est correcte mais celle-ci est légèrement surévaluée par rapport aux résultats expérimentaux. Pour  $A/r=0,4$ , l'accord est satisfaisant. Le temps d'établissement du signal de houle étant de quelques périodes, des réflexions parasites sur la frontière extérieure peuvent se produire. Les résultats pourraient donc être améliorés en considérant des domaines plus étendus.

L'allure des déformées de surface libre à proximité du cylindre pour différents instants, dans le cas d'un mouvement de pilonnement défini par  $y_c(t) = A \cos(\omega t)$  avec  $A/r=0,4$  et  $\omega^2 r / g = 2,0$ , a été comparée avec des résultats numériques en fluide parfait non-linéaire obtenus par Hwang et al. [5] (figures 13(a) à 13(f)). La méthode en temps, semi-lagrangienne avec remaillage de la surface libre, utilisée est analogue à celle développée par Faltinsen [4].

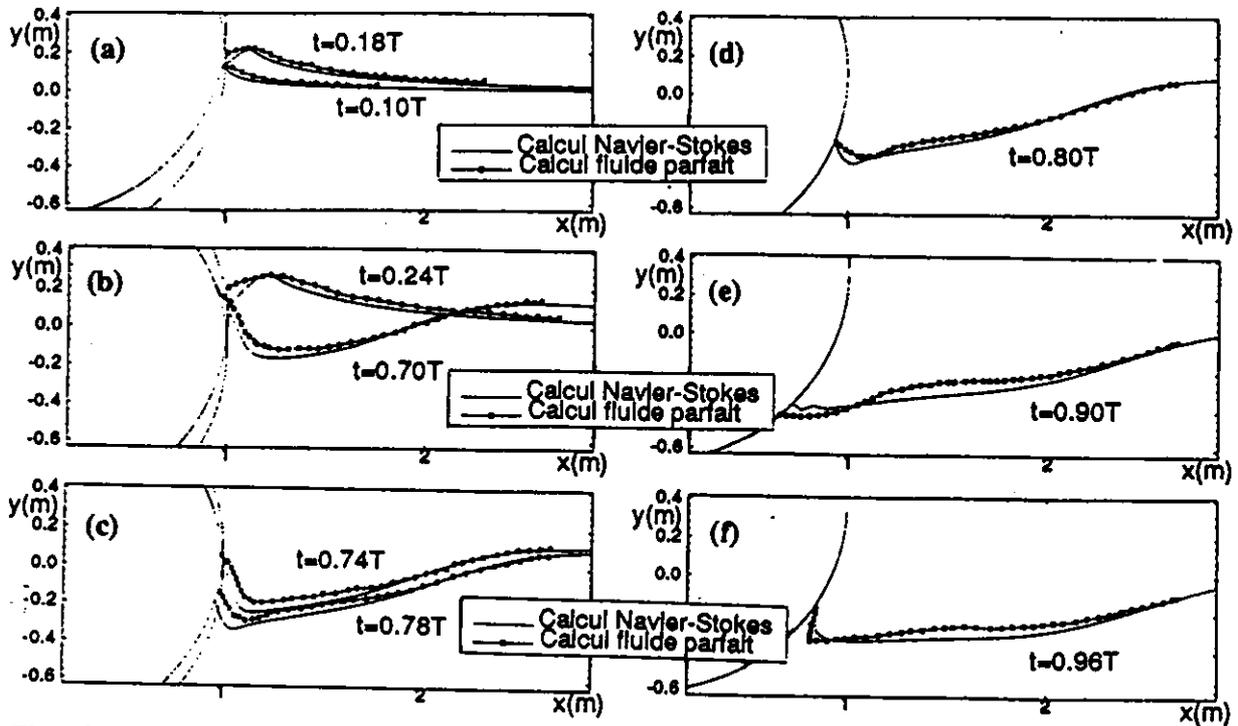


Fig. 13 : Déformées de surface libre générées par le pilonnement d'un cylindre circulaire.  
Mouvement du cylindre :  $y_c(t) = A \cos(\omega t)$  avec  $A/r=0,4$  et  $\omega^2 r / g = 2,0$ .

L'accord qualitatif entre les deux méthodes numériques est correct. Hwang et *al.* notent, pour la figure 13(f), la formation d'un jet dû à une forte augmentation des vitesses le long du cylindre. Ce phénomène conduit à l'interruption de la simulation et représente, physiquement, le début du déferlement. Ce jet semble représenté par la simulation en fluide visqueux.

#### 4.4. Calcul des efforts visqueux

L'estimation correcte des forces de viscosité  $Rfy(t)$  exige des maillages relativement fins sur le corps afin de capter et de simuler correctement la couche limite. Ceci nécessite des pas de temps plus petits et conduit à des temps de calcul relativement importants. De plus, des problèmes numériques apparaissent, en particulier à proximité de l'intersection corps-surface libre (voir § 4.5.). Peu de calculs dans cette configuration avec un cylindre circulaire ont été menés jusque-là.

Il a semblé préférable d'effectuer de tels calculs pour le pilonnement de corps à angles vifs, les effets visqueux étant plus importants.

Un premier calcul destiné à estimer les efforts visqueux pour un rectangle en pilonnement a été effectué dans le cas suivant : mouvement forcé de la forme  $y_c(t) = A \sin(\omega t)$  et paramètres de calcul définis par  $\omega B^2 / \nu = 1000$ ,  $\omega^2 B / 2g = 2,0$ ,  $A/B=0,3$ ,  $d/B=1,0$ .

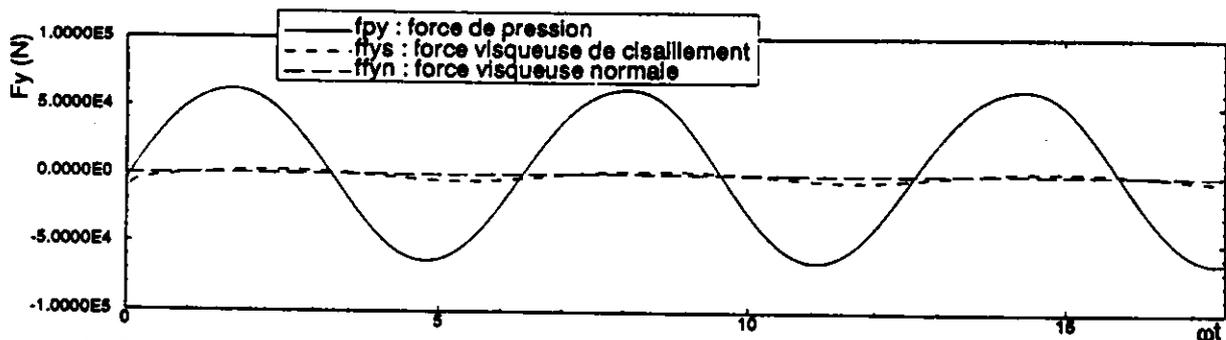


Fig. 14 : Efforts de pression et efforts visqueux pour un cylindre de section rectangulaire en pilonnement.

Mvt du corps :  $y_c(t) = A \sin(\omega t)$  avec  $\frac{\omega B^2}{\nu} = 1000$ ,  $\omega^2 \frac{B}{2g} = 2,0$ ,  $A/B=0,30$ ,  $d/B=1,0$ .

Les efforts visqueux  $Rfy(t)$  ont été séparés en deux termes. La composante dite de cisaillement correspond aux termes facteurs de la composante horizontale de la normale au corps, celle dite normale à la composante verticale de la normale. Les amplitudes de la composante visqueuse de cisaillement et de la composante normale valent, respectivement, à peu près 7 % et 1 % de l'amplitude de la force verticale de pression (figure 14), ce qui est en accord avec les ordres de grandeurs donnés par Yeung et Ananthakrishnan [22].

Un calcul portant sur un corps rectangulaire en pilonnement a également été réalisé avec un mouvement forcé égal à  $y_c(t) = A \sin(\omega t)$  avec  $\omega^2 B / 2g = 2,0$ ,  $A/B = 0,3$  et  $B/d = 1,0$ ,  $B$  et  $d$  étant respectivement le maître-bau et le tirant d'eau initial du rectangle en pilonnement.

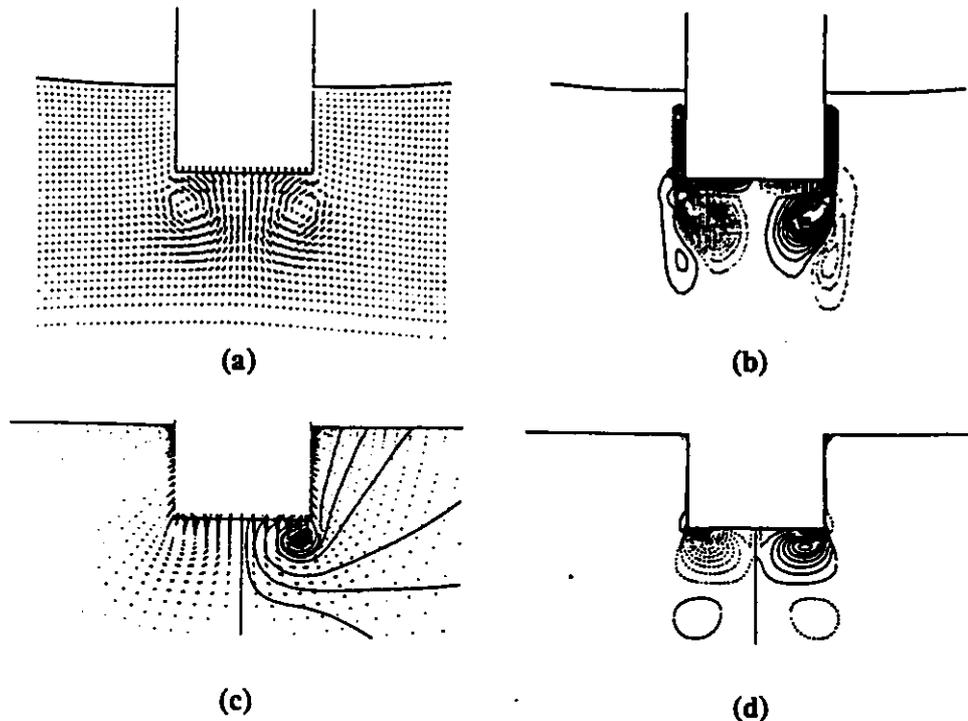


Fig. 15 : Champs de vitesses et vorticités à  $t = 3,18T$  ( $T$  période de pilonnement).

Méth. présentée (c & d), calculs Yeung & Ananthakrishnan (a & b).

Mouvement du corps :  $y_c(t) = A \sin(\omega t)$  avec  $A/B = 0,30$ ,  $B/d = 1,0$ ,  $\omega^2 B / 2g = 2,0$ .

La figure 15 représente le champ des vitesses et les vorticités dans une zone proche du cylindre pour  $t = 3,18T$  ( $T$  période du pilonnement). Ce calcul est comparé au calcul Navier-Stokes de Yeung et Ananthakrishnan [21]. L'accord qualitatif entre les deux calculs est satisfaisant, le tourbillon sous le cylindre étant correctement représenté. En revanche, les niveaux de surface libre sur le cylindre ainsi que l'allure générale de celle-ci présentent des écarts significatifs. Il faut noter que le calcul de Yeung et Ananthakrishnan effectué sur l'ensemble du corps, présente une légère dissymétrie visible au niveau des vorticités (figure 15(b)) (de principe identique à une allée de Von Karmann). Cette dissymétrie n'est bien sûr pas simulable avec la méthode présentée ici, le calcul se faisant seulement sur un demi-corps.

#### 4.5. Problèmes liés à l'interaction corps-surface libre

Les calculs effectués sur des maillages fins ont fait apparaître de nombreux problèmes numériques au niveau de l'intersection corps-surface libre. En effet, dans cette région, les déformées de surface libre ont tendance à osciller en présentant, localement, des pentes très fortes. De telles situations conduisent à une divergence rapide du calcul.

Ce phénomène, décrit par B. Alessandrini [2], provient de la forme singulière prise par l'équation cinématique (3) sur l'intersection corps-surface libre. En ce point, s'appliquent à la fois les conditions d'adhérence et la condition cinématique. Cette dernière s'écrit alors sous la forme suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u^1 \frac{\partial h}{\partial x^1} + u^2 \frac{\partial h}{\partial x^2} = u^2 \text{ et } u^1 = 0, u^2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t} = 0 !! \quad (19)$$

Ceci signifierait que la surface libre ne progresserait pas le long de la paroi. Cette incompatibilité est levée si le terme  $\partial h / \partial x^2$  tend vers l'infini au voisinage de la paroi, de telle sorte que  $u^2 \partial h / \partial x^2$  tende alors vers une valeur finie. Cette relation implique alors que la surface libre soit tangente à la paroi, ce qui se traduit par la formation d'un ménisque au niveau de cette paroi. Cette hypothèse se vérifie numériquement (figure 16), le sens du ménisque dépendant du mouvement (ascendant ou descendant) du cylindre.

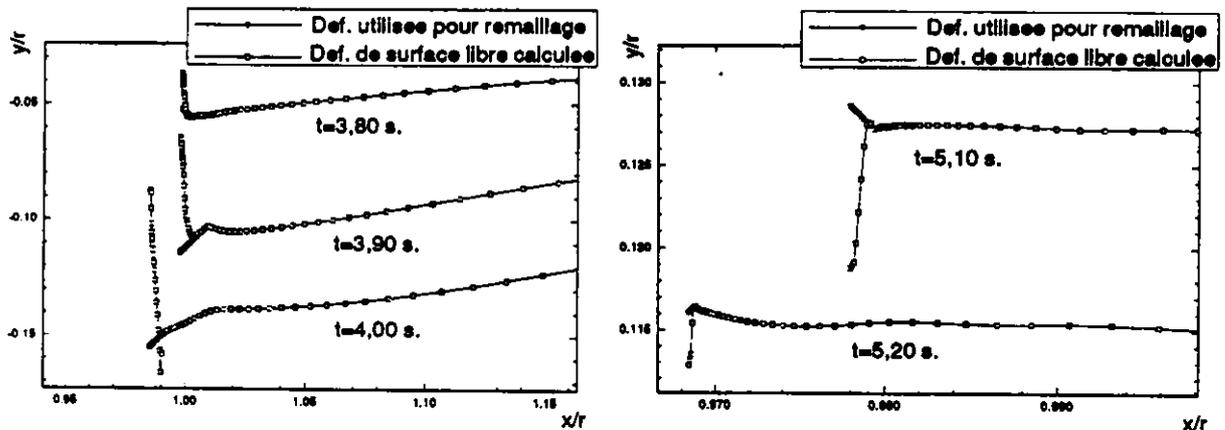


Fig. 16 : Allure des déformées de surface libre près d'un cylindre circulaire sur un maillage fin.  
Mouvement du cylindre :  $y_c(t) = A \sin(\omega t)$  avec  $A/r=0,2$  et  $\omega = 3,16 \text{ rad.s}^{-1}$ .

Malheureusement, ce comportement de la surface libre conduit à une singularité de la métrique ou à une impossibilité de remillage. D'autre part, il s'est avéré qu'il était impossible dans ces cas-là, d'utiliser la conservation de la masse pour déterminer la vitesse verticale sur la surface libre, la divergence du calcul étant alors encore plus rapide. Ces problèmes ont été résolus en considérant, d'une part, une condition de type Dirichlet pour la vitesse verticale sur la surface libre, d'autre part, en modifiant le calcul de la déformée de surface libre près du corps. Pour éviter autant que possible une singularité au niveau de la métrique, une extrapolation de la surface libre, destinée à supprimer la pente trop importante du ménisque, est effectuée dans la région proche de la paroi (figure 16). Cette extrapolation est utilisée uniquement pour le remillage et le calcul de la métrique [1].

Malgré ces modifications, la convergence des calculs sur des maillages fins reste délicate et les conditions aux limites de surface libre ne peuvent pas être utilisées sous leur forme exacte.

## 5. CONCLUSION

Les résultats obtenus ici s'avèrent globalement satisfaisants et prouvent la capacité d'un code bidimensionnel, résolvant les équations du fluide réel en présence d'une surface libre, à traiter correctement le cas d'un corps perçant la surface libre en mouvement forcé. Outre les grandeurs traditionnellement calculées par des codes fluide parfait, l'estimation des efforts visqueux semble désormais accessible. Cependant, des problèmes importants, notamment le traitement de l'intersection corps-surface libre, se posent encore. A terme, la solution semble être l'utilisation d'un système totalement couplé vitesses-pression-surface libre résolu par une méthode directe [2], ce qui permettrait la prise en compte rigoureuse des conditions aux limites de surface libre et l'accès au problème global de diffraction-radiation.

## 6. REFERENCES

- [1] Alessandrini B., Delhommeau G., "Simulation of Three-Dimensional Unsteady Viscous Free Surface Flow Around a Ship Model", Int. Jour. for Num. Meth. in Fluids, vol 19, 321-342, 1994.
- [2] Alessandrini B., Delhommeau G., "Simulation numérique de l'écoulement turbulent incompressible autour d'une carène de navire : vers une prise en compte rigoureuse des conditions de surface libre en fluide visqueux", 5èmes Journées de l'Hydrodynamique, Rouen, 1995.
- [3] Eriksson L.E., "Generation of Boundary-Conforming Grids Around Wing-Body Configurations Using Transfinite Interpolation", AIAA Journal, vol 20, no 10, 1313-1320, 1982.
- [4] Faltinsen O.M., "Numerical Solutions of Transient Nonlinear Free-Surface Motion outside or inside Moving Bodies", Proc., 2nd Int. Conf. on Num. Ship Hydrodyn., Univ. of California, Berkeley, 347-357, 1977.
- [5] Hwang J.H., Kim Y.J., Kim S.Y., "Nonlinear Forces Due to Two-dimensional Forced Oscillation", Proc., IUTAM Symp. on Nonlinear Water Waves (Tokyo), Springer-Verlag, 231-238, 1987.
- [6] Kyojuka Y., "Experimental Study on Second-Order Forces Acting on Cylindrical Body in Waves", Proc., 14th Symp. on Naval Hydrodynamics, Ann Arbor, Mich., 319-382, 1982.
- [7] Lee C.M., "The Second-Order Theory of Heaving Cylinders in a Free Surface", Journal of Ship Research, vol 12, 313-327, 1968.
- [8] Nichols B.D., Hirt C.W., "Nonlinear Hydrodynamic Forces on Floating Bodies", Proc., 2nd Int. Conf. on Num. Ship Hydrodyn., Univ. of California, Berkeley, 382-394, 1977.
- [9] Papanikolaou A., "On calculations of Nonlinear Wave-Body Interaction Effects", Proc., IUTAM Symp. on Nonlinear Water Waves (Tokyo), Springer-Verlag, 247-258, 1987.
- [10] Papanikolaou A., Nowacki H., "Second-Order Theory of Oscillating Cylinders in a Regular Steep Wave", Proc., 13th Symp. on Naval Hydrodynamics, 303-331, 1984.
- [11] Parissis G., "Second-Order Potentials and Forces for Oscillating Cylinders on a Free Surface", MIT-Report, no 66-10, Dept. of Ocean Engineering, 1966.
- [12] Piquet J., Visonneau M., "Computation of the flow past shiplike hull", Comp. & Fluids, vol 19, no 2, 183-215, 1991.
- [13] Potash R.L., "Second-Order Theory of Oscillating Cylinders", Journal of Ship Research, vol 15, no 4, 295-324, déc. 1971.
- [14] Shanks S.P., Thompson J.F., "Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations for 2D Hydrofoils in or below a Free Surface", Proc., 2nd Int. Conf. on Num. Ship Hydrodyn., Univ. of California, Berkeley, 202-220, 1977.
- [15] Tasai F., Koterayama W., "Nonlinear Hydrodynamic Forces Acting on Cylinders Heaving on the Surface of a Fluid", Reports of Res. Inst. for Appl. Mech., Kyushu Univ., vol 23, no 77, 1976.
- [16] Telste J.G., "Calculation of Fluid Motion Resulting from Large-Amplitude Forced Heave Motion of a Two-Dimensional Cylinder in a Free Surface", Proc., 4th Int. Conf. Num. Ship Hydrodyn., Washington, D.C., 82-93, 1985.
- [17] Ursell F., "On the Heaving Motion of a Circular Cylinder on the Free Surface of a Fluid", Quartely Journal of Mechanics and Applied Mathematics, vol 2, 218-231, 1949.
- [18] Van der Vorst H.A., "Bi-CGSTAB : a fast and smoothly converging variant of bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems", J. Sci. Stat. Comp., vol 13, 1992.
- [19] Visonneau M., "Simulation numérique des équations de Navier-Stokes pour un fluide visqueux incompressible", Ecole de printemps de MFN, Carcans-Maubuisson, mai 1993.
- [20] Yamashita S., "Calculations of the Hydrodynamic Forces Acting upon Thin Cylinders Oscillating Vertically with Large Amplitude", J. Soc. Naval Arch. of Japan, vol 141, 61-69, 1977.
- [21] Yeung R.W., Ananthakrishnan P., "Large-Amplitude Oscillation of Two-Dimensional Bodies In a Viscous Fluid with a Free Surface", Extended abstract for the sixth Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Woods Hole, Massachusetts, 1991.
- [22] Yeung R.W., Ananthakrishnan P., "Oscillation of a floating body in a viscous fluid", Journal of Engineering Mathematics 26, 211-230, 1992.
- [23] Yeung R.W., Yu C.F., "Viscosity effects on the radiation hydrodynamics of horizontal cylinders", Journal of Offshore Mechanics and Artic Engineering, 113, 334-343, 1991.