

5^e JOURNÉES DE L'HYDRODYNAMIQUE

22, 23, 24 mars 1995 – ROUEN

**SIMULATION NUMERIQUE DE L'ÉCOULEMENT TURBULENT INCOMPRESSIBLE
AUTOUR D'UNE CARENE DE NAVIRE :
VERS UNE PRISE EN COMPTE RIGOUREUSE DES CONDITIONS DE SURFACE LIBRE
EN FLUIDE VISQUEUX**

Bertrand ALESSANDRINI, Gérard DELHOMMEAU

*Division Hydrodynamique Navale, Laboratoire de Mécanique des Fluides, URA 1217 du CNRS
Ecole Centrale de Nantes, 1, rue de la Noë 44072 Nantes cedex 03*

Résumé

Cet article s'inscrit dans le cadre général du calcul de l'écoulement à surface libre d'un fluide visqueux incompressible autour d'une carène de navire animée d'un mouvement rectiligne. Il présente une méthode originale permettant de résoudre la majeure partie des problèmes théoriques liés à la prise en compte des conditions de surface libre dans les équations tridimensionnelles de Navier-Stokes-Reynolds.

Le système d'équations convectives linéarisées pour les inconnues de vitesses, pression et élévation de surface libre est discrétisé par différences finies. La matrice alors obtenue est inversée de façon couplée par application de l'algorithme itératif CGSTAB préconditionné par une décomposition LU incomplète du sous-système sur la pression.

Un modèle k- ϵ fondé sur la résolution de deux équations de transport est utilisé pour le calcul de la viscosité turbulente.

Summary

This paper deals with the calculation of free surface flow of viscous incompressible fluid around the hull of a boat moving with rectilinear motion. An original method to avoid a large part of the theoretical problems connected with the free surface boundary conditions in the three-dimensional Navier-Stokes-Reynolds equations is proposed here.

The linearised system of convective equations for the velocities, pressure and free surface elevation unknowns is discretised by finite differences and the obtained matrix is inverted in a coupled mode by the iterative CGSTAB algorithm preconditioned by an incomplete LU decomposition of pressure bloc.

A k- ϵ model funded on the resolution of two transport equations is used for the calculation of turbulent viscosity.

1 INTRODUCTION

A l'heure actuelle une grande majorité des codes de calcul fondés sur la résolution des équations de Navier-Stokes et prenant en compte des effets de surface libre puisent leur origine dans une méthode de résolution en double modèle [3] [10] [11] [17]. La méthode utilisée repose alors sur un découplage total entre les inconnues de vitesses et pression d'une part et l'élévation de surface libre, calculée par intégration de la condition cinématique, d'autre part. Si elle semble naturelle, cette évolution des logiciels vers la prise en compte de ces conditions aux limites se révèle malheureuse et nombre des problèmes rencontrés par les différents auteurs en découlent.

L'utilisation de l'équation cinématique pour calculer la hauteur de surface libre, le champ des vitesses étant supposé connu par ailleurs, implique nécessairement l'adjonction de conditions aux limites non physiques pour cette inconnue. Au voisinage de la carène, c'est à dire là où la condition cinématique devient singulière, l'utilisation d'une extrapolation pour calculer la hauteur de surface libre devient alors indispensable et toute tentative de résolution des conditions dynamiques tangentielles ou d'introduction de termes liés à la viscosité ou à la tension superficielle est vouée à l'échec. Ce phénomène se trouve bien sûr renforcé lorsque l'inconnue "élévation de surface libre" est localisée sur les nœuds des interfaces, positionnant par là même des inconnues sur la singularité.

Dans cette optique l'équation dynamique normale apparaît nécessairement comme une condition de type Dirichlet pour la pression et interdit la prise en compte de l'équation de continuité (conservation de la masse) dans la maille située sous la surface libre. Théoriquement, le problème n'est pas insoluble puisque cette équation peut fort bien constituer, avec les conditions dynamiques tangentielles, l'ensemble des trois conditions aux limites pour le champ de vitesses sur la surface libre. Numériquement cependant, cette méthode s'avère délicate à mettre en œuvre en raison, d'une part de la nature même de l'équation de continuité qui couple les trois composantes du champ de vitesses, d'autre part du choix délicat de la distribution des trois équations sur ces composantes pouvant procurer des systèmes au conditionnement médiocre, délicats à inverser [1]. Généralement l'équation de continuité est délaissée au profit d'une condition non physique plus simple (de type Neumann par exemple) [4] [11] [17].

On aboutit ainsi à un logiciel incapable de prendre en compte les conditions aux limites de surface libre complètes, ne vérifiant pas, qui plus est, la conservation globale de la masse, mais présentant, dans la plupart des cas, un accord avec les résultats expérimentaux acceptable. La résolution théorique et numérique de l'ensemble de ces problèmes apparaît alors indispensable et constitue l'objectif de la présente étude.

L'origine de ces difficultés est liée à la nuance fondamentale qui distingue les problèmes avec ou sans conditions de surface libre. Le champ de pression en double modèle, issu de la résolution des équations de Navier-Stokes moyennées au sens de Reynolds, est défini à une constante additive près. La prise en compte de conditions aux limites de surface libre lève cette indétermination et le champ de pression est alors parfaitement spécifié par le système. Cette remarque qui peut paraître anodine a priori, guidera notre réflexion quant aux choix concernant la localisation des inconnues sur la grille de maillage, la discrétisation des équations et le problème du couplage entre les inconnues de vitesses, de pression et d'élévation de surface libre.

La formulation proposée ici repose sur une discrétisation implicite au deuxième ordre par différences finies. Les équations tridimensionnelles sont écrites sous une forme convective dans un système de coordonnées curvilignes évoluant au cours du temps et permettant de tenir compte du caractère instationnaire de l'une des frontières du domaine. Une localisation mixte des inconnues sur une grille structurée monobloc, obtenue par interpolation transfinie, est adoptée : Les composantes de la vitesse (u^i) sont situées sur les nœuds du maillage, la pression (p) au centre des volumes élémentaires et l'élévation de surface libre (h) au centre de chacune des interfaces appartenant à cette frontière. Le système linéaire couplé pour les inconnues de vitesses, pression, élévation de surface libre est alors inversé grâce à l'algorithme CGSTAB [20] fondé sur la méthode du gradient conjugué.

Un préconditionnement par décomposition LU incomplète [16] du bloc correspondant aux inconnues de pression s'est avéré indispensable à la convergence de la procédure.

L'introduction des trois composantes d'une inconnue secondaire homogène à une vitesse (u^{*i}) permet, par le biais d'une reconstruction de type Rhie et Chow, généralisée pour tenir compte des conditions de surface libre dans le calcul du flux sur la frontière, d'obtenir un sous système défini pour la pression. Le recours à la condition dynamique, associant naturellement le champ de pression à l'élévation de surface libre, procure alors un système d'équations en vitesses-pression indépendant de l'inconnue h .

Bien que la surface libre influe considérablement sur les caractéristiques de la turbulence [5], peu d'études théoriques ont abouti à la mise au point de modèles spécifiques, la tendance générale étant d'appliquer et de tester directement les modélisations existantes. La mise au point d'une formulation nouvelle pour la turbulence n'est pas le propos de cette étude. Il ressort cependant de récents travaux en hydrodynamique numérique [10] [11] [17] que la présence de la surface libre tend à déstabiliser les calculs en régime turbulent. Les modèles algébriques de type Badwin-Lomax ou Cebecchi-Smith semblent à proscrire définitivement tant est fluctuant le calcul de la viscosité effective.

Le modèle de Jones-Launder [13] fondé sur la résolution de deux équations de transport pour l'énergie cinétique (k) et la dissipation de la turbulence (ϵ), intégrant par ailleurs les effets des faibles nombres de Reynolds au voisinage des parois, est utilisé ici.

2 EQUATIONS

Les équations de Navier-Stokes-Reynolds sont écrites sous une forme convective pour un écoulement turbulent tridimensionnel et un fluide newtonien incompressible. Les inconnues dépendantes sont les trois composantes de la vitesse (u^i) et la pression (p) incluant les effets gravitationnels ($\rho g x^3$) et l'énergie cinétique turbulente ($2/3\rho k$). Les variables indépendantes sont représentées par les trois directions de l'espace curviligne (ξ^i) associées au temps (t), (x^i) symbolisant la base cartésienne et Ua la vitesse d'avance de la carène. Le système curviligne est évidemment choisi de façon à simplifier autant que faire ce peut la définition des frontières principales (carène et surface libre). $\xi^2 = 0$ et $\xi^3 = 0$ représentent respectivement une équation de la partie mouillée de la carène et de la surface libre à chaque instant.

Une transformation partielle quadridimensionnelle de l'espace cartésien physique en évolution, vers un espace de calcul curviligne fixe est alors appliquée. La métrique de ce changement de variables fait intervenir les bases covariante (a_i) et contravariante (a^i), le tenseur métrique contravariant (g^{ij}), les fonctions de contrôle de grille (f^i) et les vitesses de glissement du domaine de calcul (u_g^i). Les équations de transport de la quantité de mouvement appliquées dans un référentiel non galiléen lié à la carène en accélération s'écrivent :

$$u_{,i}^{\alpha} + \left(a_i^j (u^i - u_g^i) - v_{eff} f^j - a_k^i v_{i,i} a_k^j \right) u_{,j}^{\alpha} + \frac{1}{\rho} a_{\alpha}^k p_{,k} - v_{eff} g^{ij} u_{,ij}^{\alpha} - a_k^i v_{i,i} a_j^{\alpha} u_{,j}^k + \delta_{1\alpha} U a_{,i} = 0 \quad (1)$$

et l'équation de continuité :

$$a_i^j u_{,j}^i = 0 \quad (2)$$

Le modèle k- ϵ classique est établi pour un régime turbulent pleinement développé et ne permet pas de décrire, pour un écoulement de couche limite, la zone pariétale où l'effet de la viscosité turbulente est faible devant celui de la viscosité moléculaire. Le modèle proposé par Jones et Launder [13] permet d'intégrer les équations de transport jusqu'à la paroi. Il présente l'avantage de définir les

fonctions d'amortissement, restituant la décroissance de la turbulence, non pas comme fonction de la distance à la carène mais dépendant du nombre de Reynolds turbulent $Rt = k^2 / (v\tilde{\epsilon})$. Dans l'espace curviligne (ξ^i, t) les deux équations de transport pour k et $\tilde{\epsilon}$ s'écrivent respectivement :

$$k_{,i} + \left(a_i^j (u^i - u_g^i) - \left(v + \frac{v_t}{h_k} \right) f^j - a_k^i \frac{v_{t,i}}{h_k} a_k^j \right) k_{,j} - \left(v + \frac{v_t}{h_k} \right) g^{ij} k_{,ij} - P_r + \tilde{\epsilon} - E_k = 0 \quad (3)$$

$$\tilde{\epsilon}_{,i} + \left(a_i^j (u^i - u_g^i) - \left(v + \frac{v_t}{h_\epsilon} \right) f^j - a_\epsilon^i \frac{v_{t,i}}{h_\epsilon} a_\epsilon^j \right) \tilde{\epsilon}_{,j} - \left(v + \frac{v_t}{h_\epsilon} \right) g^{ij} \tilde{\epsilon}_{,ij} - C_{\epsilon 1} f_1 \frac{\tilde{\epsilon}}{k} P_r + C_{\epsilon 2} f_2 \frac{\tilde{\epsilon}^2}{k} - E_\epsilon = 0 \quad (4)$$

La viscosité turbulente est donnée par :

$$v_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\tilde{\epsilon}} \quad (5)$$

Les fonctions f_1 , f_2 et f_μ s'expriment en fonction du nombre de Reynolds turbulent :

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1 - 0,3 \exp(-Rt^2), \quad f_\mu = \exp(-2,5 / (1 + Rt / 50)) \quad (6)$$

Le terme de production ainsi que les deux termes sources supplémentaires sont donnés par les expressions ci-dessous, n représentant la normale à la carène et Vt la vitesse tangentielle :

$$P_r = v_t a_j^k u_{,k}^i (a_j^i u_{,i}^j + a_i^j u_{,j}^i), \quad E_k = -2v \left((\sqrt{k})_{,n} \right)^2, \quad E_\epsilon = 2v v_t (Vt_{,nn})^2 \quad (7)$$

Les valeurs numériques des constantes intervenant dans ce modèle sont les suivantes :

$$C_\mu = 0,09, \quad C_{\epsilon 1} = 1,44, \quad C_{\epsilon 2} = 1,92, \quad h_k = 1, \quad h_\epsilon = 1,3 \quad (8)$$

3 CONDITIONS AUX LIMITES

La formulation proposée dans cette étude impose de préciser les conditions aux limites sur le champ de vitesses ainsi que sur l'énergie cinétique et la dissipation de la turbulence. En revanche, et cette situation est idéale, aucune équation supplémentaire non physique ne vient préciser les valeurs de la pression ou de l'élévation de surface libre sur les frontières du domaine. En particulier, aucune interpolation algébrique n'est consentie au voisinage de la paroi. On note Γ_c la carène du navire, Γ_e la frontière extérieure, Γ_a le plan de symétrie et Γ_f la surface libre.

On utilise pour k et $\tilde{\epsilon}$ les conditions de frontières :

$$k = k_{\min} \quad \text{et} \quad \tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon}_{\min} \quad \text{sur} \quad \Gamma_e \cup \Gamma_c \cup \Gamma_f, \quad \frac{\partial k}{\partial x^2} = \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_a \quad (9)$$

Expérimentalement [5] on constate l'annulation ou, du moins, un très fort amortissement de la viscosité turbulente sur la surface libre et cela justifie pleinement les conditions aux limites développées en (9). Cependant, cette décroissance se manifeste très localement sous la frontière, et son influence sur les calculs illustrant cet article est faible.

Les conditions aux limites pour le champ de vitesses sur les frontières autres que Γ_s , s'expriment comme suit :

$$u^i = 0 \text{ sur } \Gamma_c, u^1 = Ua, u^2 = u^3 = 0 \text{ sur } \Gamma_e, u^2 = 0, \frac{\partial u^1}{\partial x^2} = \frac{\partial u^3}{\partial x^2} = 0 \text{ sur } \Gamma_a \quad (10)$$

Les conditions aux limites sur Γ_s se décomposent en une condition cinématique, deux conditions dynamiques tangentielles et une condition dynamique normale. La condition cinématique, issue directement de l'hypothèse de continuité, traduit le fait que les particules fluide de la surface libre demeurent sur cette frontière matérielle. Pour exprimer cette condition dans un système curviligne, il convient de remarquer que la variable h est une fonction surfacique ne dépendant que de deux variables indépendantes. En notant (b^i) la base contravariante de la transformation métrique bidimensionnelle, on obtient :

$$h_{,j} + \left(b_i^j (u^i - u_s^i) h_{,j} \right)_{(i,j) \in \{1,2\}} - u^3 = 0 \text{ sur } \Gamma_s \quad (11)$$

Cette équation est à l'origine de difficultés numériques importantes dès l'instant où la carène perce la surface libre. En effet, il existe dans ce cas une courbe intersection des deux frontières sur laquelle s'appliquent à la fois, les conditions d'adhérence et les conditions de surface libre. Un raisonnement simpliste consistant à injecter les conditions d'adhérence dans la condition cinématique semble prouver que $\partial h / \partial t = 0$. La condition d'adhérence inhiberait donc la progression de la surface libre le long de la carène. Cette conclusion, en désaccord total avec les résultats expérimentaux, ne remet pas en cause pour autant la validité des équations mais dévoile le caractère singulier de la condition cinématique sur l'intersection. Mathématiquement la seule possibilité pour que cette ligne de contact évolue sur la carène correspond au cas où les plans tangents de chacune des deux frontières sont confondus. Cette alternative qui coïncide avec l'annulation du jacobien de la transformation nous permet de conclure à l'impossibilité d'intégrer la condition cinématique sur la carène.

Les conditions dynamiques traduisent la continuité des contraintes sur la surface libre. Si l'on suppose que le vide règne au dessus de cette frontière et que, par ailleurs, on néglige tout effet lié à la tension superficielle, la condition dynamique normale, isolant l'influence prépondérante de la pression, devient :

$$p - \rho gh - 2 \frac{\rho v_{eff}}{|a^3|^2} a_i^3 a_j^3 a_j^k u_{,k}^i = 0 \text{ sur } \Gamma_s \quad (12)$$

et les conditions dynamiques tangentielles s'écrivent simplement comme une combinaison linéaire des dérivées premières des vitesses :

$$a_{ai} g^{j3} u_{,j}^i = 0 \quad (13)$$

4 DISCRETISATION DES EQUATIONS

Un ensemble de points (Ω) répartis de façon structurée sur les lignes de coordonnées curvilignes définit le maillage volumique de calcul sur lequel sont situées les composantes discrètes de la vitesse (U_i^α) , de l'énergie cinétique (K_i) et de la dissipation de la turbulence (E_i) . Cette localisation permet d'écrire naturellement les conditions aux limites sur la frontière $(\partial\Omega)$. Les inconnues de pression (P_k) sont distribuées au centre de chacun des volumes élémentaires (ensemble Ω_v), ceci afin de conserver

localement la masse sans traitement particulier pour les frontières du domaine. La hauteur de surface libre (H_k) est positionnée au centre des interfaces de la surface libre (ensemble $\partial\Omega_s$) et évite de ce fait la ligne de singularité de la condition cinématique. On note par ailleurs $\partial\Omega_s$ les nœuds de Ω appartenant à la surface libre et à aucune autre frontière et $\partial\Omega_b$ le complémentaire de $\partial\Omega_s$ dans $\partial\Omega$.

L'ensemble de la discrétisation temporelle et spatiale proposée dans la suite de ce chapitre est obtenu par une méthode de différences finies précise au deuxième ordre.

4.1 Discrétisation des équations de transport de la quantité de mouvement

Cette discrétisation présuppose une linéarisation des équations : les vitesses de convection ainsi que les termes liés à la turbulence sont calculés à l'itération précédente. Les termes de convection sont évalués à l'aide de différences finies décentrées amont au second ordre et nécessitent une maille à 13 points. La diffusion est calculée sur une maille à sept points, les dérivées secondes croisées étant isolées explicitement dans les termes sources. Le gradient de pression, exprimé sur les nœuds du maillage, requiert une maille à 8 points. On obtient ainsi au nœud i :

$$U_i^\alpha + (\chi u)_{ij} U_{j \neq i}^\alpha + (\chi p)_{ik} P_k = f u_i^\alpha \quad \text{sur } \Omega \setminus \partial\Omega \quad (14)$$

4.2 Discrétisation des équations de transport de l'énergie cinétique et de la dissipation de la turbulence

Les équations de transport pour k et ε présentent, après linéarisation, une structure générale identique à celle des équations de convection-diffusion, la différence fondamentale provenant du couplage linéaire de l'énergie cinétique et de la dissipation de la turbulence. Les termes dépendants des constantes $C_{\varepsilon 1}$ et $C_{\varepsilon 2}$ ne sont pas introduits dans les termes sources mais présentent un caractère implicite lorsque ε est mis en facteur dans les termes de convection. Des schémas de différences finies précis au deuxième ordre permettent d'accéder aux équations discrètes :

$$\begin{cases} (\chi k)_{ij} K_j + \gamma_i E_i = f k_i & \text{sur } \Omega \setminus \partial\Omega \\ (\chi \varepsilon)_{ij} E_j = f \varepsilon_i & \text{sur } \Omega \setminus \partial\Omega \end{cases} \quad (15)$$

4.3 Discrétisation des conditions de surface libre

Afin de mieux comprendre les principes de la discrétisation des conditions de surface libre, il convient de préciser le cadre général de leur utilisation. Classiquement, les méthodes découplées utilisent l'équation cinématique pour calculer la hauteur de surface libre et la condition dynamique normale, privée des termes d'origine visqueuse, comme condition aux limites de Dirichlet sur la pression. Les faiblesses de ce type de modélisation ayant été précisées, la démarche abordée ici est radicalement différente. Les deux conditions dynamiques tangentielles associées à la condition cinématique forment un système composant les trois conditions aux limites pour les vitesses sur la surface libre, la condition dynamique normale constituant l'équation qui permet d'évaluer la hauteur de surface libre.

Cette formulation sous-entend une linéarisation de la condition cinématique non plus sous la forme de l'équation de convection habituelle, mais plutôt d'une relation implicite entre les trois composantes du champ de vitesses et l'élévation de la surface libre :

$$h_j + A^1 u^1 + A^2 u^2 - u^3 = A^1 u_g^1 + A^2 u_g^2 \quad (16)$$

Les dérivées spatiales de la hauteur de surface libre intervenant dans les termes A^i sont exprimées à l'aide de schémas centrés d'ordre 2 sur une maille à 4 points. Le terme instationnaire est représenté par un schéma décentré à trois points. \tilde{H} représentant l'élévation de surface libre sur les nœuds des interfaces obtenue par interpolation de H, l'expression discrète de la condition cinématique s'écrit :

$$\lambda_i^{1,1}U_i^1 + \lambda_i^{1,2}U_i^2 + \lambda_i^{1,3}U_i^3 + \eta_i^{1,4}\tilde{H}_i = fcc_i \text{ sur } \partial\Omega_s \quad (17)$$

La discrétisation des deux conditions dynamiques tangentielles sur une maille à six points peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\begin{cases} \lambda_i^{2,1}U_i^1 + \lambda_i^{2,2}U_i^2 + \lambda_i^{2,3}U_i^3 + (\eta_{ij}^{2,1}U_j^1 + \eta_{ij}^{2,2}U_j^2 + \eta_{ij}^{2,3}U_j^3)_{j \neq i} = 0 \\ \lambda_i^{3,1}U_i^1 + \lambda_i^{3,2}U_i^2 + \lambda_i^{3,3}U_i^3 + (\eta_{ij}^{3,1}U_j^1 + \eta_{ij}^{3,2}U_j^2 + \eta_{ij}^{3,3}U_j^3)_{j \neq i} = 0 \end{cases} \text{ sur } \partial\Omega_s \quad (18)$$

Cet ensemble de trois équations (17) et (18) constitue des conditions aux limites pour le champ des vitesses sur la surface libre. Le problème réside évidemment dans l'attribution de chacune de ces équations à une des composantes. La situation idéale consiste à assurer une dominance diagonale pour la matrice, ce que ne permet aucune des combinaisons possibles sur l'ensemble du domaine simultanément. Une solution élégante repose sur la résolution analytique, en chaque nœud, du système linéaire de trois équations (17) et (18) pour les inconnues U^i . Cela à pour effet de symétriser les équations dans les trois directions curvilignes et lève, de fait, le problème de l'attribution des conditions aux limites. Celles-ci deviennent :

$$U_i^\alpha + (\chi su)_{ij}^\alpha U_{j \neq i}^\alpha + (\chi sh)_i^\alpha \tilde{H}_i = fs_i^\alpha \text{ sur } \partial\Omega_s \quad (19)$$

Il est intéressant de remarquer qu'un meilleur conditionnement de l'équation (19) est obtenu en décentrant chacune des dérivées de la condition dynamique tangentielle de manière à rendre maximum, en valeur absolue, chacun des coefficients λ^u .

La discrétisation de la condition dynamique normale, utilisée pour calculer la hauteur de surface libre, ne pose pas de difficulté particulière. Les termes d'origine visqueuse sont tous explicités dans le second membre. L'unique point négatif provient de ce que la pression est connue au centre des volumes de contrôle et l'élévation de surface libre au centre des interfaces. La pression sur la frontière est ainsi évaluée par extrapolation linéaire sur deux points :

$$H_k + (\chi sp)_{kj} P_j = fh_k \text{ sur } \partial\Omega_{si} \quad (20)$$

4.4 Discrétisation de l'équation de continuité, obtention de l'équation de pression par une méthode de type Rhie et Chow généralisée

La méthode de Rhie et Chow est aujourd'hui communément utilisée pour obtenir, à partir de l'équation de continuité, une équation de pression affranchie du problème de découplage pair-impair classique. Cette technique fournit un sous système non cramérien correspondant, en double modèle, à l'existence d'une infinité de solutions toutes définies à une constante près. La résolution numérique du problème suppose alors la vérification d'une relation de compatibilité sur le second membre. Dans le cas d'un problème à surface libre, les nouvelles conditions aux limites assurent l'inversibilité du système linéaire couplé et par là même, l'unicité de la solution. Malheureusement, en raison du caractère non défini du sous système sur la pression, la convergence d'un algorithme de résolution itératif est impossible à réaliser en un temps de calcul raisonnable. Partant de cette constatation, une

méthode permettant d'obtenir une matrice de pression définie a été mise au point : l'ensemble des conditions aux limites de surface libre intervient alors explicitement dans l'équation de continuité pour le calcul de la divergence. Les symboles surmontés d'un \sim (respectivement surlignés) correspondent à des variables ou des opérateurs interpolés ou reconstruits sur les nœuds du maillage (respectivement au centre des interfaces).

Dans un premier temps la hauteur de surface libre est éliminée de l'équation (19) à l'aide de la condition dynamique normale (20) :

$$U_i^\alpha + (\chi su)_{ij}^\alpha U_{j\neq i}^\alpha - (\chi sh)_i^\alpha (\tilde{\chi} sp)_{ii} \tilde{P}_i = fs_i^\alpha - (\chi sh)_i^\alpha \tilde{f}h_i \quad \text{sur } \partial\Omega_s \quad (21)$$

Le parallèle entre les trois équations de transport de la quantité de mouvement (14) et les conditions cinématique et dynamiques tangentielles de surface libre (21) écrites sous leur forme discrète devient alors naturel. L'ensemble de ces six équations, moyennant l'introduction d'une inconnue secondaire sur les nœuds du maillage ($U_i^*\alpha$), permet d'exprimer le champ des vitesses au centre des interfaces du maillage (Ω_i) sous la forme suivante :

$$\bar{U}_n^\alpha - \bar{U}_n^*\alpha + \sigma_v (\bar{\chi} p)_{nk}^\alpha P_k - \sigma_s (\bar{\chi} sh)_n^\alpha (\chi sp)_{nj} P_j = 0 \quad \text{sur } \Omega_i \quad (22)$$

avec :

$$\begin{cases} U_i^*\alpha + \sigma_v \left((\chi u)_{ij} U_{j\neq i}^\alpha - fu_i^\alpha \right) + \sigma_s \left((\chi su)_{ij} U_{j\neq i}^\alpha - fs_i^\alpha + (\chi sh)_i^\alpha \tilde{f}h_i \right) = 0 \quad \text{sur } \Omega \\ \sigma_v = 1 \quad \text{sur } (\Omega \cup \Omega_i) \setminus (\partial\Omega \cup \partial\Omega_i), \quad \sigma_v = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \cup \partial\Omega_i \\ \sigma_s = 0 \quad \text{sur } (\Omega \cup \Omega_i) \setminus (\partial\Omega_s \cup \partial\Omega_{si}), \quad \sigma_s = 1 \quad \text{sur } \partial\Omega_s \cup \partial\Omega_{si} \end{cases} \quad (23)$$

L'équation de pression est alors obtenue en traduisant l'annulation de la divergence sur chacun des volumes de contrôle. Le cas $\sigma_s = 0$ correspond à la méthode de Rhie et Chow classique et aboutit à un sous système indéfini et à un système couplé numériquement très difficile à inverser. L'introduction des conditions aux limites pour le calcul de la divergence sous la surface libre ($\sigma_s \neq 0$) vient corriger l'équation initiale et assure le caractère inversible du sous-système ainsi qu'une résolution aisée, donc rapide, par les méthodes itératives classiques. L'équation de pression s'écrit alors :

$$(\chi mp)_{ki} P_i + (\chi d)_{ki}^\alpha U_i^*\alpha = 0 \quad \text{sur } \Omega_v \quad (24)$$

5 SOLUTION COUPLEE

Le système linéaire permettant d'obtenir l'énergie cinétique et la dissipation de la turbulence étant résolu indépendamment, il convient, à ce stade, d'effectuer le bilan des équations susceptibles de fournir les vitesses, la pression et l'élévation de surface libre à chaque itération. On vérifie ainsi, les équations de transport de la quantité de mouvement sur $\Omega \setminus \partial\Omega$ (14), les relations reliant les inconnues principales de vitesses aux inconnues secondaires sur $\Omega \setminus \partial\Omega$ (23), les conditions de surface libre cinématique et dynamiques tangentielles sur $\partial\Omega_s$ (21), la définition implicite des inconnues secondaires compatible avec les valeurs prises par σ_v et σ_s sur $\partial\Omega_s$ (23), les conditions aux limites classiques sur les vitesses et les relations implicites pour les inconnues secondaires sur $\partial\Omega_b$, l'équation de pression sur Ω_v (24) et enfin, la condition dynamique normale sur $\partial\Omega_{si}$. Il est intéressant de constater que les conditions aux limites sur les vitesses sont nécessaires et suffisantes à

la résolution du système linéaire couplé. En particulier, aucune condition aux limites portant sur la pression ou l'élévation de surface libre ne doit intervenir.

Une représentation matricielle du système linéaire couplé est figurée ci-dessous :

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline Id & & & -Id & & & \chi_P \\ \hline & Id & & -Id & & & \chi_{shp} \\ \hline \chi_{cl} & \chi_{cl} & \chi_{cl} & & & & \\ \hline \chi_u & \chi_u & \chi_u & Id & & & \\ \hline \chi_{su} & \chi_{su} & \chi_{su} & & Id & & \\ \hline & & -Id & & & Id & \\ \hline & & & \chi_d & \chi_d & \chi_d & \chi_{mp} \\ \hline & & & & & & \chi_{sp} \\ \hline & & & & & Id & \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline U / (\Omega \setminus \partial\Omega) \\ \hline U / \partial\Omega_s \\ \hline U / \partial\Omega_b \\ \hline U^* / (\Omega \setminus \partial\Omega) \\ \hline U^* / \partial\Omega_s \\ \hline U^* / \partial\Omega_b \\ \hline P / \Omega_v \\ \hline H / \partial\Omega_{si} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline f_{cl} \\ \hline f_u \\ \hline f_{ssh} \\ \hline \\ \hline \\ \hline f_h \\ \hline \end{array} \quad (25)$$

Il est important de souligner ici l'un des principaux intérêts de la méthode de discrétisation proposée. Le système matriciel fait apparaître un bloc vitesses-pression découplé du champ de surface libre. En d'autres termes, la solution en vitesses pression du système totalement couplé peut être obtenue indépendamment de l'élévation de surface libre, celle-ci pouvant être calculée a posteriori par résolution de la condition dynamique normale.

Les maillages permettant d'obtenir des solutions de bonne qualité autour de géométrie moyennement complexes (Series 60 par exemple) comportent de 100000 à 1000000 de nœuds. Le rang de la matrice du système couplé devient alors si conséquent que l'utilisation d'une méthode d'inversion directe du système occasionne des temps de calculs prohibitifs. En revanche les procédés itératifs fondés sur la théorie du gradient conjugué constituent actuellement une alternative séduisante. Ainsi, l'algorithme CGSTAB [20], développé pour des matrices non symétriques, s'est, de part sa robustesse et sa rapidité, naturellement imposé. Un préconditionnement assurant une convergence plus efficace a été réalisé. Celui-ci consiste à multiplier à gauche l'ensemble du système linéaire couplé par la matrice issue d'une décomposition LU incomplète du bloc sur la pression (χ_{mp}). On résout finalement :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \chi_{lu} & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \chi_{mv} & \chi_{pp} & & \\ \hline \chi_d & \chi_{mp} & & \\ \hline & \chi_{sp} & Id & \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline UU^* \\ \hline P \\ \hline H \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \chi_{lu} & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline f_u \\ \hline f_h \\ \hline \end{array} \quad (26)$$

Il convient de remarquer que ce type de préconditionnement affecte non seulement le bloc de pression χ_{mp} mais aussi l'ensemble des coefficients situés sur les lignes correspondant aux inconnues de pression (matrice χ_d). Par contre les équations se rapportant aux composantes des vitesses ou à l'élévation de surface libre reste inchangées.

6 APPLICATION NUMERIQUE

L'écoulement autour d'une carène de Série 60 CB = 0,60 pour un nombre de Froude de 0,316 et un nombre de Reynolds de $4,5 \cdot 10^6$, représentant le cas test au sein de la communauté internationale [4] [10] [17] pour les écoulements tridimensionnels à surface libre, est étudié ici.

Les résultats numériques présentés constituent les premiers tests de validation de la méthode proposée dans cet article et dont la motivation principale est la prise en compte des conditions de

surface libre complètes. L'ensemble des conditions dynamiques et cinématique incluant les termes d'origine visqueuse est ainsi intégré, au voisinage de la paroi, jusque dans la sous-couche visqueuse démontrant, a posteriori, la pertinence de la formulation. La supériorité d'un modèle de turbulence à deux équations de transport de type k- ϵ sur les modèles algébriques (Baldwin-Lomax, Cebecci-Smith ...) utilisés jusqu'à présent pour les problèmes à surface libre [10] [11] est également démontré ici, non pas en termes d'adéquation de la solution numérique avec les expériences, mais tout simplement en terme de stabilité des grandeurs turbulentes. Un maillage de taille moyenne comportant 57 points dans la direction longitudinale (ξ^1), 41 points dans la direction transversale (ξ^2) et 33 points dans la direction verticale (ξ^3) est utilisé (figure 1).

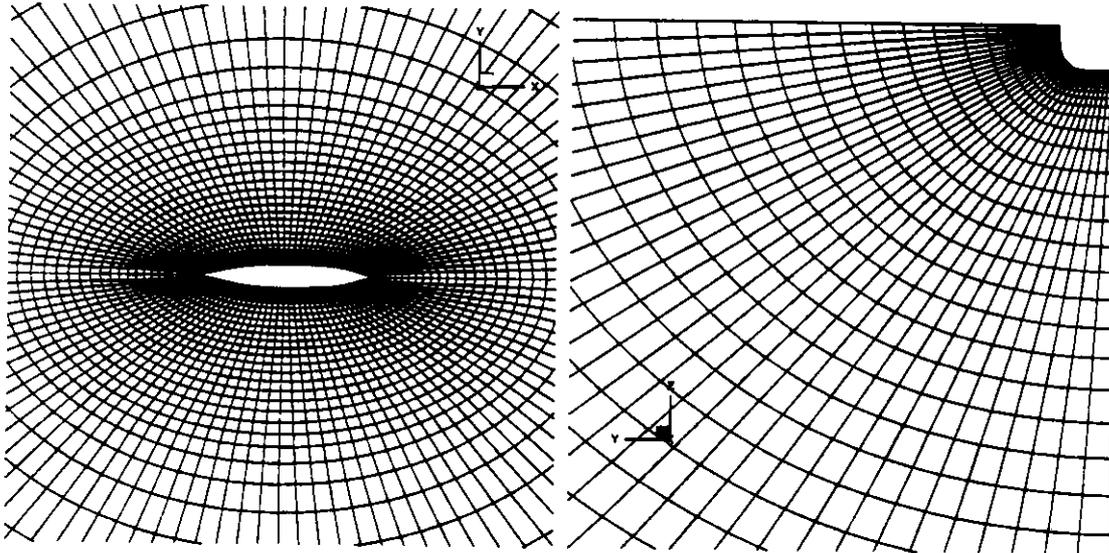


Figure 1, maillage volumique : vues de la surface libre et d'une coupe transversale

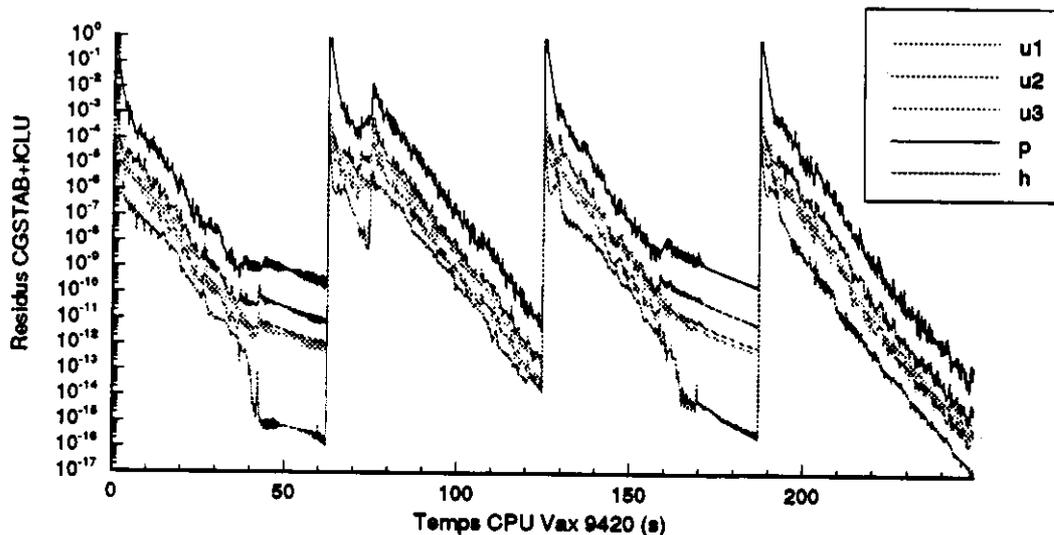


Figure 2, résolution du système linéaire, évolution des résidus

La topologie (O-O) choisie évite la concentration de nœuds sur le plan de symétrie. La coexistence de différents phénomènes physiques (ondes de gravité, ménisque instationnaire, couche limite) de longueurs caractéristiques très différentes a imposé une séparation, en trois zones distinctes,

de la répartition des points dans la direction transversale. La zone pariétale est caractérisée par un premier point de calcul très proche de la paroi (concentration de $5 \cdot 10^{-5}$ environ, soit $y^+ = 1$) et un étirement important (rapport d'aspect de 1,2) permettant un calcul cohérent des profils de vitesses dans la couche limite et du ménisque de surface libre sur la carène. Une zone intermédiaire comprise entre l'extérieur de la couche limite et une surface sphérique fictive, d'un rayon d'une longueur de carène, caractérisée par un étirement nul, autorise une bonne représentation du champ de vagues autour du navire. Enfin une zone qui s'étend jusqu'à cinq longueurs de carène, dont le rôle est d'amortir les ondes de gravité jusqu'à la frontière extérieure sur laquelle le champ de vitesses à l'infini est imposé (figure 1).

Afin de limiter le choc sur la surface libre lors de l'introduction brutale d'une carène dans l'écoulement incident, le calcul simule l'accélération du navire jusqu'à la vitesse choisie (exactement comme lors d'un essai de traction en bassin de carènes). Si T représente un temps adimensionnel défini par $T = U_{\infty} t / l$, la vitesse finale est alors atteinte pour $T = 1$ et le calcul se poursuit jusqu'à obtention d'un état stationnaire autour de la carène ($T = 5$). La résolution du système totalement couplé nous permet d'utiliser un pas de temps relativement important ($\tau = 2,5 \cdot 10^{-3}$) et de limiter ainsi le temps de calcul par rapport à une méthode faiblement couplée ($\tau = 1,0 \cdot 10^{-3}$ avec l'algorithme SIMPLER).

La figure 2 représente l'évolution des résidus du système linéaire pour quelques itérations et démontre l'efficacité de l'algorithme CGSTAB associé à la méthode de préconditionnement par factorisation LU incomplète du bloc de pression. Le système est résolu sans difficultés jusqu'au zéro machine. En pratique, cependant, une réduction de trois ordres de l'ensemble des résidus à chaque itération s'avère suffisante et permet de diminuer d'autant le temps de calcul.

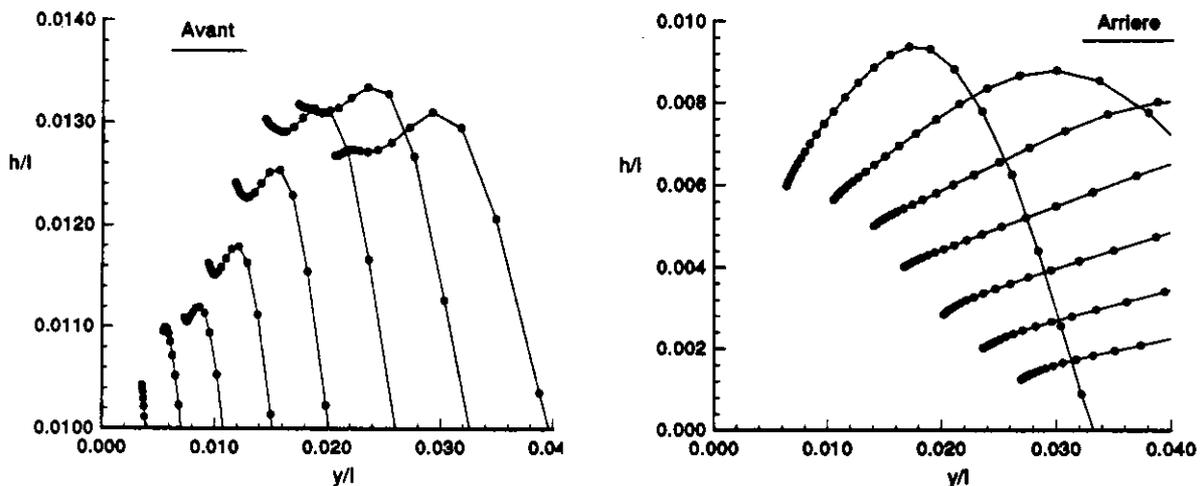


Figure 3, visualisation du ménisque sur les vagues avant et arrière de la carène

La figure 3 nous renseigne sur la complexité et la diversité des formes prises par le ménisque de la surface libre dans la couche limite. On comprend ainsi l'inefficacité d'une extrapolation fondée sur des conditions aux limites non physiques pour décrire convenablement les évolutions fines mais fondamentales de la surface libre au voisinage de la carène. C'est la structure de ce ménisque, induit par la viscosité du fluide et pouvant être éventuellement influencée par les effets de tension superficielle, qui régit la progression de la surface libre dans la zone de proche paroi. La localisation des inconnues "hauteurs de surface libre" au centre des interfaces et non pas au nœuds du maillage, évitant ainsi une hypothétique intégration de la condition cinématique sur la paroi, prend toute sa valeur.

Une extrapolation s'avère de toute façon nécessaire puisque la procédure de remaillage de l'espace de calcul impose la connaissance de l'élévation de surface libre sur les nœuds. Cependant celle-ci n'affecte pas directement la résolution des systèmes linéaires à chaque pas de temps et n'influe que faiblement sur les coefficients métriques de l'itération suivante.

La figure 4 représente l'élévation la surface libre de long de la carène. On constate un bon accord des résultats du calcul avec les expériences concernant l'amplitude des pics à l'avant et à l'arrière, par contre les oscillations entre ces pics sont légèrement amorties. Ce phénomène se retrouve de façon plus ou moins prononcée sur l'ensemble des calculs présentés au CFD Workshop de Tokyo (mars 1994). Cet atténuation, liée sans aucun doute au caractère trop grossier du maillage, peut cependant être qualifiée de faible car similaire à celle rencontrée avec la précédente formulation [4], pour un maillage pourtant plus important (140000 points). Il ressort néanmoins qu'une confrontation sérieuse avec les expériences ne peut être effectuée sur des maillages comportant moins de 300000 points, la présente étude se limitant à démontrer l'importance d'une prise en compte précise et rigoureuse des conditions de surface libre, ainsi que la validité de la méthode proposée pour y parvenir.

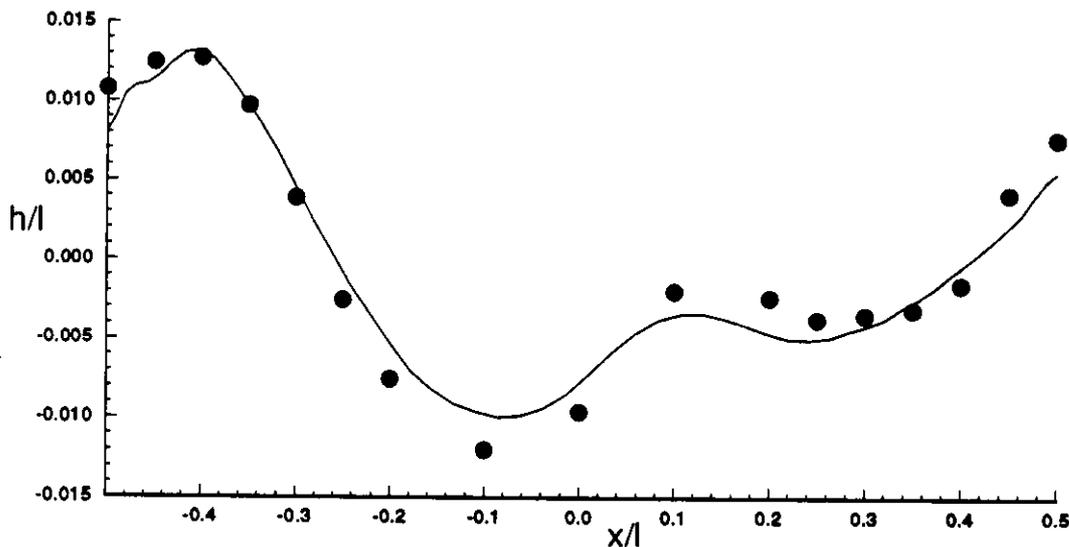


Figure 4, élévation de la surface libre le long de la carène, — : calculs, ● : expériences

La figure 5 précise le champ de vitesses à l'arrière de la carène pour $x/l = 0,4$. Les résultats numériques apparaissent en assez bon accord avec les expériences. On peut, toutefois, souligner deux points importants. L'épaisseur de la couche limite est surévaluée par les calculs et l'intensité maximale des vitesses verticale légèrement sous évalué, ce qui est cohérent avec l'amortissement excessif constaté sur l'élévation de surface libre. Là encore on peut remarquer une très nette amélioration des résultats par rapport à la précédente formulation [4]. L'utilisation d'un maillage plus fin semble indispensable à l'obtention d'un meilleur accord calculs-expériences, mais il ne faut pas oublier le rôle essentiel joué par le modèle de turbulence. Les tests effectués sur des configurations de double modèle ont démontré le bon comportement, pour ce type particulier d'écoulement, des modèles de turbulence algébrique de type Baldwin-Lomax, surclassant même parfois des modèles plus élaborés (k-ε par exemple). Il devenait alors naturel d'utiliser ceux-ci pour des calculs prenant en compte les conditions de surface libre. Malheureusement, car la plupart des auteurs ont envisagés cette alternative [4] [10] [11] [17], le modèle de Baldwin-Lomax s'avère totalement instable. Les viscosités turbulentes calculées par deux logiciels fondés sur ce modèle présentent un caractère fortement oscillatoire ce qui les rend, même qualitativement, totalement inexploitables. L'objectif premier, avant toute confrontation avec l'expérience, est bien de concevoir une modélisation stable, compatible avec les

conditions de surface libre. C'est ce principe qui a guidé notre choix vers un modèle k- ϵ associé à la formulation bas Reynolds proposée par Jones et Launder au voisinage de la paroi. Conformément à notre attente, ce dernier modèle s'est révélé tout à fait stable (figure 6).

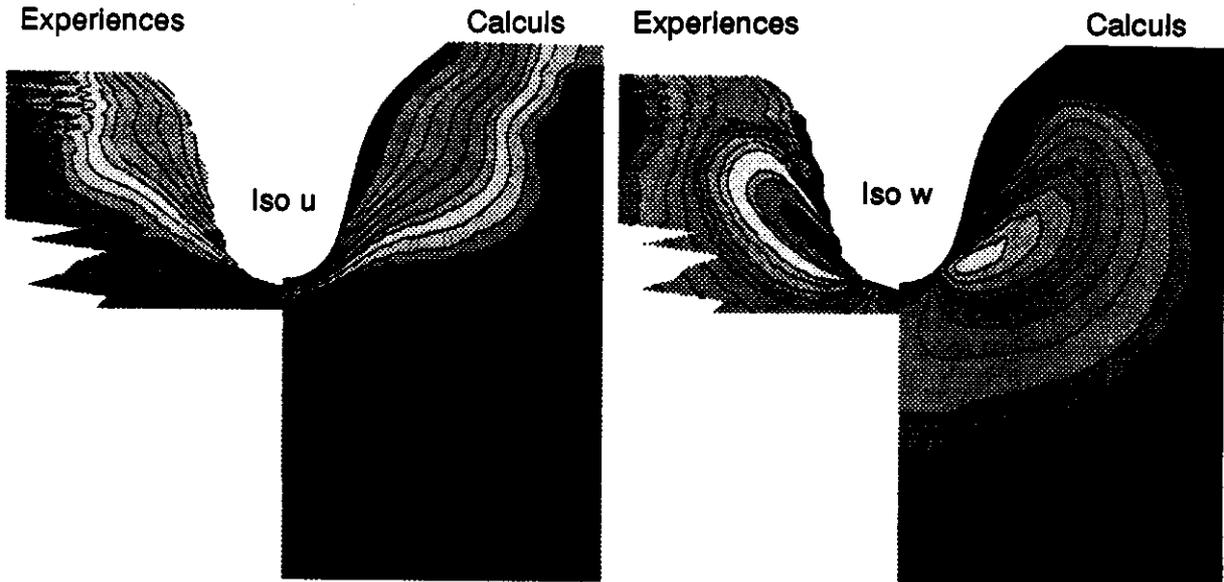


Figure 5, composantes de la vitesse selon x_1 (u) et selon x_3 (w) pour $x/l = 0,4$

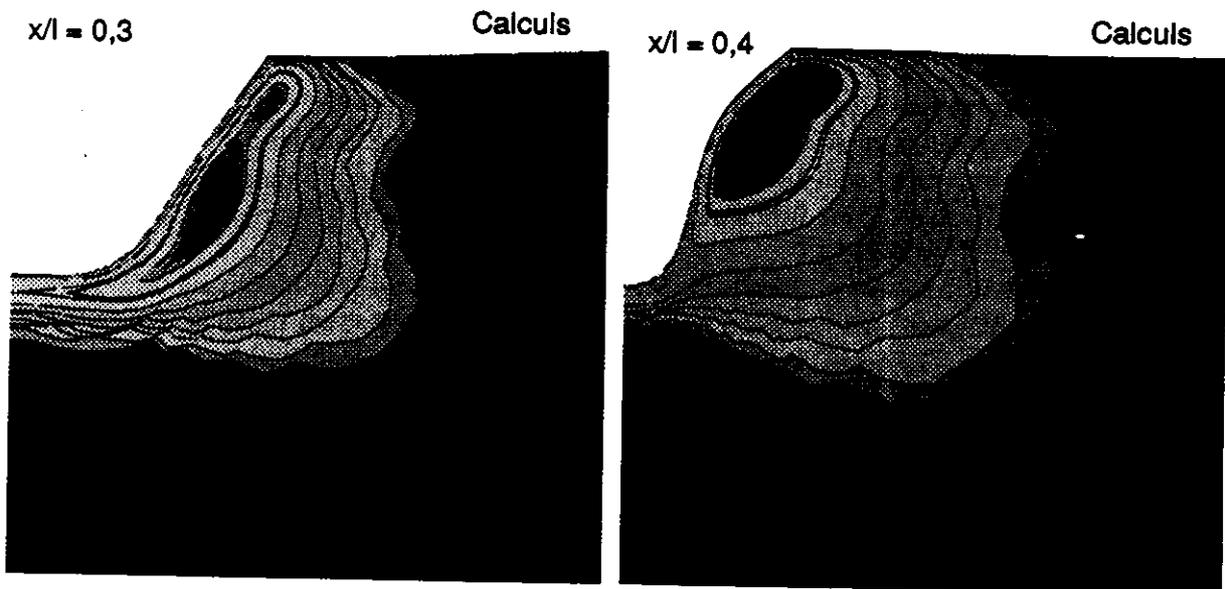


Figure 6, viscosité turbulente dans deux coupes.

7 CONCLUSION

Cette étude présente une méthode numérique fondée sur la résolution des équations tridimensionnelles de Navier-Stokes permettant de prendre rigoureusement en compte l'ensemble des conditions aux limites de surface libre pour un fluide visqueux. L'originalité de l'algorithme repose sur un couplage total des inconnues de vitesses, pression et hauteurs de surface libre à chaque itération. Les premiers résultats sont très encourageants puisqu'ils démontrent sans conteste et ce malgré un maillage relativement grossier, l'efficacité de la formulation.

8 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] B. Alessandrini, "Etude numérique de l'écoulement visqueux autour d'une carène de navire en présence d'une surface libre : résolution des équations de couche limite et de Navier-Stokes", *Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Nantes*, novembre 1993.
- [2] B. Alessandrini, G. Delhommeau, "Résolution des équations de Navier-Stokes autour d'une carène perçant la surface libre", *4e Journées de l'Hydrodynamique*, Nantes, mars 1993.
- [3] B. Alessandrini, G. Delhommeau, "Simulation of three-dimensional unsteady viscous free surface flow around a ship model", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol 19, août 1994.
- [4] B. Alessandrini, G. Delhommeau, "Numerical calculation of three-dimensional viscous free surface flow around a Series 60 CB = 0,6 ship model", *CFD Workshop*, Tokyo, mars 1994.
- [5] I. Celik, W. Rodi, M.S. Hossain, "Modelling of free surface proximity effects on turbulence", *Proc. Refined Modelling of Flows*, Paris, 1982.
- [6] H. C. Chen, W. L. Lin, K. M. Weems, "Interactive zonal approach for ship flows including viscous and nonlinear wave effects", *6th international Conference on Numerical Ship Hydrodynamics*, Iowa City, août 1993.
- [7] E. B. Dussan V, "The moving contact line : the slip boundary condition", *Journal of Fluid Mechanics*, vol 77, part 4, 1976.
- [8] E. B. Dussan V, "On the spreading of liquids on solids surfaces: static and dynamic contact lines", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol 11, 1979.
- [9] L.E. Erikson, "Generation of boundary conforming grids around wing-bodies configuration using a transfinite interpolation.", *AIAA journal*, vol 20, 1982.
- [10] J. Farmer, L. Martinelli, A. Jameson "Multigrid solutions of the Euler and Navier-Stokes equations for a series 60 Cb = 0,6 ship hull for Froude numbers 0,160, 0,220 and 0,316", *CFD Workshop*, Tokyo, mars 1994.
- [11] T. Hino, "Computation of free surface flow around an advancing ship by the Navier-Stokes equations", *5th International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics*, Hiroshima, 1989.
- [12] C. Huh, S. G. Mason, "The steady movement of a liquid meniscus in a capillary tube", *Journal of Fluid Mechanics*, vol 81, part 3, 1977.
- [13] W.P. Jones, B.E. Launder, "The prediction of low Reynolds number phenomena with a two equation model of turbulence", *International Journal of Heat Mass Transfer*, vol 16, 1972.
- [14] E. E. Markovitch, "Effect of free surface tension on the free outflow of a wetting fluid from a horizontal tube", Traduit de *Mekhanika Zhidkosti i Gaza*, No 2, mars-avril 1988.
- [15] J. Piquet, M. Visonneau, "Computation of the flow past Shiplike hulls", *5th International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics*, Hiroshima, 1989.
- [16] J. Strigberger, G. Baruzzi, W. Habashi, "Some special purpose preconditioners for conjugate gradient-like methods applied to CFD", *International Journal For Numerical Methods In Fluids*, vol 16, 1993.
- [17] Y. Tahara, F. Stern, "A large domain approach for calculating ship boundary layers and wakes for nonzero Froude number", *CFD Workshop*, Tokyo, mars 1994.
- [18] Y. Toda, F. Stern, J. longo, "Mean-flow measurements in the boundary layer and wake and wave field of a Series 60 Cb = 0,6 ship model for Froude numbers 0,16 and 0,316", *IIHR report No 352*, août 1991.
- [19] Y. Toda, F. Stern, I. Tanaka, V.C. Patel, "Mean-flow measurements in the boundary layer and wake and wave field of a Series 60 Cb = 0,6 ship model with and without propeller", *Journal of Ship Research*, Vol 34, décembre 1990.
- [20] H. A. Vorst, "Bi-CGSTAB : a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems", *J. Sci. Stat. Comp.* vol 13, 1992.