

4e JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE

1, 2, 3 mars 1993 - Nantes

SIMULATION DE LA HOULE PAR METHODE DE DECOMPOSITION MODALE

E. LUNEVILLE

Laboratoire de Simulation et Modélisation
des Phénomènes de Propagation
91120-PALaiseau

Résumé

Le problème de la génération et de la stabilisation de houles progressives dans un bassin requiert l'utilisation d'un modèle hydrodynamique simple. A cet effet, on utilise le modèle linéarisé au premier ordre des équations hydrodynamiques (fluide parfait, écoulement irrotationnel), dans lequel nous avons introduit un terme dissipatif permettant de modéliser l'amortissement de la houle. Pour des géométries simples (bassin rectangulaire ou circulaire), on obtient les solutions sous forme de séries analytiques, en effectuant la décomposition spectrale de l'opérateur spatial. Nous indiquons quelques résultats théoriques relatifs à cette décomposition et nous montrons comment s'implémente cette méthode sur ordinateur. Nous illustrons cette méthode à l'aide de quelques exemples numériques.

Summary

In order to generate and stabilize travelling water waves into a tank, a simple hydrodynamics model is required. In this purpose, we propose to use a first order linearized model of hydrodynamics equations, with a dissipative terms in order to take into account damping. For simple geometries (cylindrical or rectangular tank), a spectral decomposition of the spatial operator leads to analytical series representation of the hydrodynamics solution. Some theoretical results are given and the main numerical ideas are presented. As an illustration, some numerical experiments are given.

INTRODUCTION

La génération et l'entretien de houles complexes (multidirectionnelles, multichromatiques) dans un bassin nécessite, dans une approche globale, une représentation simple des mouvements du fluide dans le bassin. En effet, il est, d'une part, primordial de disposer d'une méthode numérique rapide de calcul de la houle et, d'autre part, d'un modèle simple autorisant la détermination de lois de rétroaction facilement implémentables. Dans cette optique, les modèles fondés sur une représentation modale se révèle bien adaptés : ils sont massivement parallélisables et les techniques classiques d'automatique s'appliquent (stabilisation par une commande de type Ricati par exemple).

On a choisi d'utiliser le modèle linéarisé au premier ordre des équations hydrodynamiques en fluide parfait et en écoulement irrotationnel. En effet, les modèles non linéaires ne permettent pas d'accéder à des représentations spectrales et, par ailleurs, il est possible d'introduire une correction au second ordre, qui s'appuie sur le même opérateur que le modèle au premier ordre. Comme on l'observe dans la réalité, les houles, même dans la zone où la théorie linéaire s'applique, sont amorties et ce d'autant plus que leur longueur d'onde est petite. C'est pourquoi, nous avons introduits un terme de viscosité de surface dans les équations. Ce terme induit des propriétés d'amortissement analogues à celle rencontrées pour les ondes visqueuses.

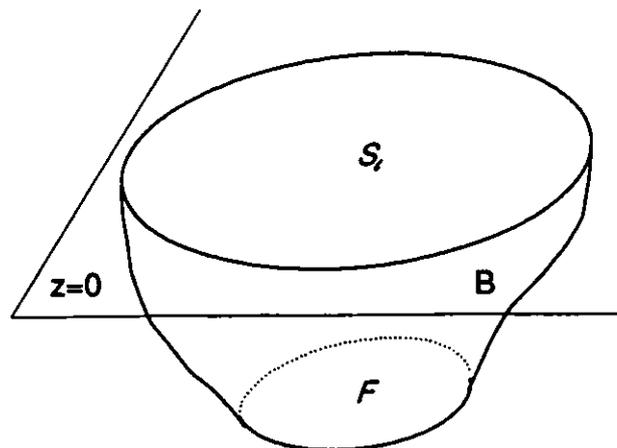
Il existe principalement deux voies d'obtention de représentation modale du potentiel hydrodynamique. La première consiste à s'appuyer sur la solution harmonique des équations hydrodynamiques en domaine semi-infini, associée au mouvement sinusoïdale d'un batteur plan. Cette approche donne de bons résultats dans le cas d'un canal, si celui ci est long ou muni d'une plage absorbante. Mais les solutions ainsi construites ne satisfont pas les équations hydrodynamiques en domaine borné et les effets transitoires et de réflexion sont alors mal pris en compte. C'est pourquoi, nous avons opté pour une représentation s'appuyant sur les fonctions propres de l'opérateur spatial de l'hydrodynamique posé dans toute la cuve. On obtient ainsi es représentations spectrales exactes de la solution.

Nous consacrons la première partie de cet exposé à l'étude du modèle hydrodynamique linéarisé avec amortissement dans un cadre général. Nous établissons l'existence et l'unicité de solutions pour des données régulières en temps, la convergence lorsque le terme dissipatif tend vers 0, la représentation en série des solutions et la convergence de ces séries. La seconde partie traite de la mise en oeuvre numérique des formules de représentation en série de la solution, dans le cas d'une cuve rectangulaire et d'une cuve circulaire. Quelques exemples numériques sont donnés afin de valider numériquement la méthode.

1. ETUDE DU MODELE HYDRODYNAMIQUE

1.1 EQUATIONS DU MODELE

On se place dans un domaine Ω borné de \mathbb{R}^n ($n \leq 3$) avec $\partial\Omega = F \cup B \cup S_L$ et $S_L \subset \Pi_{z=0}$ (plan $z = 0$).



On suppose que le domaine Ω est occupé par un un fluide incompressible parfait, dont l'écoulement est irrotationnel. Le mouvement du fluide est alors caractérisé par un potentiel $\tilde{\varphi}$ ($\vec{v} = \nabla\tilde{\varphi}$) qui, dans le

modèle linéarisé au premier ordre, satisfait aux équations :

$$(1.1) \quad \begin{cases} \Delta \tilde{\varphi} = 0 & \text{sur } \Omega & t > 0 \\ \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n} = h & \text{sur } B & t > 0 \\ \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n} = 0 & \text{sur } F & t > 0 \\ \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial t^2} + g \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} + \varepsilon g \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} = 0 & \text{sur } S_t & t > 0 \\ \tilde{\varphi}(0) = \tilde{\varphi}_0 & \text{sur } S_t & t = 0 \\ -\frac{1}{g} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t}(0) = \tilde{\eta}_0 & \text{sur } S_t & t = 0 \end{cases}$$

l'élévation de surface libre étant donnée par :

$$(1.2) \quad \tilde{\eta} = -\frac{1}{g} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \quad \text{sur } S_t.$$

- La fonction h représente la composante normale de la vitesse des batteurs dans l'hypothèse de petits mouvements de ces batteurs.

- Sur le fond F on a écrit une condition de glissement du fluide sur la paroi.

- Le terme $\varepsilon g \partial_t \partial_z \tilde{\varphi}$ ($\varepsilon > 0$) apparaissant dans l'équation de surface libre induit une dissipation d'énergie, comme le montre un calcul élémentaire d'énergie, qui lorsque $h = 0$ conduit à :

$$(1.3) \quad \frac{d}{dt} E_H(t) + \varepsilon \int_{S_t} (\partial_t \nabla \tilde{\varphi})^2 d\Omega = 0$$

avec $E_H(t)$ l'énergie hydrodynamique :

$$(1.4) \quad E_H(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \tilde{\varphi})^2 d\Omega + \frac{1}{2g} \int_{S_t} (\partial_t \tilde{\varphi})^2 d\Gamma = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \tilde{\varphi})^2 d\Omega + \frac{1}{2g} \int_{S_t} \tilde{\eta}^2 d\Gamma.$$

Notons que ε est homogène à un temps. L'introduction de ce terme de dissipation trouve son origine dans l'observation effective de houles amorties, surtout celles de petites longueurs d'ondes. Comme on l'observera ultérieurement ce terme introduit une dissipation d'autant plus forte que la longueur d'onde est petite et détruit même le comportement oscillatoire des houles de longueurs d'onde plus petite qu'une longueur critique. Ce comportement rejoint celui des ondes visqueuses décrit par exemple dans Landau-Lifchitz [1]. Signalons que le terme de viscosité de Raleigh ($\varepsilon \partial_t \varphi$), utilisé par exemple par Euvrard [2], conduit à un amortissement quasiment uniforme, les grandes longueurs d'ondes étant par ailleurs les ondes les plus amorties. C'est pourquoi, bien que plus simple, nous n'avons pas retenu cette modélisation.

1.2 SYSTEME DU PREMIER ORDRE

Afin d'étudier le système d'équations (1.1) il est pratique de le formuler comme un système du premier ordre afin d'utiliser les résultats de la théorie des semi-groupes, la théorie variationnelle de l'équation (1.1) étant délicate à faire en présence du terme d'amortissement. On suit en cela une démarche analogue à celle suivie par, Vuillierme-Ledard [3] dans le cadre de l'étude du mouvement sur la houle.

On commence par relever la condition de Neumann par l'intermédiaire du problème suivant :

$$(1.5) \quad \begin{cases} \Delta G = 0 & \text{sur } \Omega \\ \partial_n G = 0 & \text{sur } F \\ \partial_n G = h & \text{sur } B \\ \partial_z G + \nu G = 0 & \text{sur } S_t \end{cases} \quad \text{avec } \nu > 0$$

qui d'après la théorie classique des opérateurs elliptiques admet une unique solution $G \in H^1(\Omega)$ dépendant continuellement de la donnée $h \in L^2(S_t)$. On pose alors :

$$(1.6) \quad \varphi = \tilde{\varphi} - G$$

qui vérifie les équations suivantes :

$$(1.7) \quad \begin{cases} \Delta\varphi = 0 & \text{sur } \Omega & t > 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 & \text{sur } B & t > 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 & \text{sur } F & t > 0 \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \varepsilon g \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -f & \text{sur } S_t & t > 0 \\ \varphi(0) = \varphi_0 & \text{sur } S_t & t = 0 \\ -\frac{1}{g} \frac{\partial\varphi}{\partial t}(0) = \hat{\eta}_0 & \text{sur } S_t & t = 0 \end{cases}$$

avec :

$$(1.8) \quad \begin{cases} f = (\partial_t^2 - \nu g(1 + \varepsilon \partial_t)) G \\ \varphi_0 = \hat{\varphi}_0 - G(0) \\ \hat{\eta}_0 = \tilde{\eta}_0 + \frac{1}{g} \partial_t G(0) \end{cases}$$

On introduit l'opérateur de relèvement de Dirichlet :

$$(1.9) \quad \begin{array}{ccc} B : H^{1/2}(S_t) & \longrightarrow & H^1(\Omega) \\ \mu & \longrightarrow & B\mu = \psi \end{array}$$

où ψ est l'unique solution dans $H^1(\Omega)$ du problème :

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 & \text{sur } \Omega \\ \partial_n\psi = 0 & \text{sur } F \cup B \\ \psi = \mu & \text{sur } S_t \end{cases}$$

et on désigne par γ , l'opérateur de trace sur $S_t : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(S_t)$.

On pose, ce qui n'est pas le seul choix possible :

$$(1.10) \quad \eta = -\frac{1}{g} \gamma(\partial_t\varphi) = -\frac{1}{g} \partial_t \gamma\varphi$$

Par définition de l'opérateur B et par construction de η on a :

$$(1.11) \quad \partial_t\varphi = -gB\eta \quad \text{sur } \Omega$$

d'où on déduit une nouvelle expression de la condition de surface libre :

$$(1.12) \quad -\partial_t\eta + \partial_z\varphi - \varepsilon g \partial_z B\eta = -\frac{1}{g} f$$

Les relations (1.11) et (1.12) nous conduisent à la reformulation du problème (1.7) sous forme d'un système du premier ordre :

$$(1.13) \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{Trouver } U(t) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \eta \end{pmatrix} (t) \text{ tels que } \Delta\varphi(t) = 0 \text{ sur } \Omega \text{ et } \partial_n\varphi = 0 \text{ sur } B \cup F \text{ et} \\ \frac{d}{dt} U(t) = A_\varepsilon V(t) + F(t) \\ U(0) = U_0 \end{array}}$$

avec :

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & -gB \\ \partial_z & -\varepsilon g \partial_z B \end{bmatrix} \quad U_0 = \begin{pmatrix} B\varphi_0 \\ \hat{\eta}_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Pour éliminer des difficultés techniques, liées aux solutions constantes, on translate ce problème à l'aide du changement d'inconnu suivant:

$$(1.14) \quad V = e^{-\alpha t} U \quad \text{avec } \alpha > 0.$$

Le système (1.13) devient :

$$(1.15) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} V(t) = (-\alpha I + A_\varepsilon)V(t) + F_\varepsilon^\alpha(t) \\ V(0) = V_0^\alpha \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F_\varepsilon^\alpha(t) = e^{-\alpha t} F \\ V_0^\alpha = e^{-\alpha t} U_0 \end{cases}$$

et on pose par la suite :

$$A_\varepsilon^\alpha = -\alpha I + A_\varepsilon.$$

Pour étudier l'équation fonctionnelle (1.15), on se place naturellement dans l'espace de Hilbert suivant :

$$(1.16) \quad H = \{(\varphi, \eta) \in H^1(\Omega) \times L^2(S_\ell) \text{ tel que } \Delta\varphi = 0 \text{ sur } \Omega, \partial_n\varphi = 0 \text{ sur } B \cup F\}$$

muni de la norme d'énergie :

$$(1.17) \quad \left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \eta \end{pmatrix} \right\|_H^2 = \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 d\Omega + \frac{4\alpha^2}{g} \int_{S_\ell} |\gamma\varphi|^2 d\Gamma + g \int_{S_\ell} |\eta|^2 d\Gamma.$$

Nous présentons dans les trois paragraphes suivants les principaux résultats théoriques permettant de justifier la décomposition spectrale du problème (1.1). La connaissance du spectre de l'opérateur A_ε^α , nous permet de montrer l'existence d'un semi-groupe de contraction associé à l'équation d'évolution (1.15). La théorie de semi-groupe nous fournit alors l'existence d'une unique solution à l'équation d'évolution (1.15) qui admet une représentation spectrale. La décomposition spectrale du relèvement achève alors l'étude théorique. Nous renvoyons à Lunéville [4] pour le détail des démonstrations.

1.3 PROPRIETES SPECTRALES DE L'OPERATEUR A_ε^α

Rappelons un résultat fondamental concernant l'opérateur non borné sur $L^2(S_\ell)$:

$$(1.18) \quad N = \partial_z \circ B$$

sur lequel s'appuie la théorie spectrale de l'opérateur A_ε^α .

Boujot [5] a étudié le spectre de cet opérateur, en particulier il a montré :

L'opérateur N admet une infinité de valeurs propres réelles positives $(\nu_j^2)_{j \geq 0}$ telles que :

$$0 = \nu_0^2 < \nu_1^2 \leq \dots \leq \nu_j^2 \leq \dots \text{ avec } \lim_{j \rightarrow \infty} \nu_j^2 = +\infty.$$

associées aux vecteurs propres $(\eta_j)_{j \geq 0}$, cette famille formant un système orthonormal complet de $L^2(S_\ell)$ et orthogonal complet dans $H^{1/2}(S_\ell)$

On a de plus les relations $\forall j \geq 0$:

$$(1.19) \quad \int_\Omega \nabla B \eta_j \cdot \nabla \psi d\Omega = \nu_j^2 \int_{S_\ell} \eta_j \gamma \psi d\Gamma \quad \forall \psi \in H^1(\Omega).$$

On démontre alors les propriétés suivantes :

pour tout $\varepsilon \geq 0$:

- le domaine de l'opérateur :

$$D(A_\varepsilon^\alpha) = \left\{ (\varphi, \eta) \in H, A_\varepsilon^\alpha \begin{pmatrix} \varphi \\ \eta \end{pmatrix} \in H \right\} \\ \left\{ (\varphi, \eta) \in H, \eta \in H^{1/2}(S_\ell) \text{ et } (\partial_z \varphi - \varepsilon g \partial_z B \eta) \in L^2(S_\ell) \right\}$$

est dense dans H ,

- l'opérateur A_ε^α est dissipatif et maximal.

On déduit de ces résultats à l'aide du théorème de Hille-Philips que :

$\forall \varepsilon \geq 0$, l'opérateur A_ε est un opérateur fermé et est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe C^0 de contraction dans H , noté $T_\varepsilon^\alpha(t)$.

Nous allons maintenant effectuer la décomposition spectrale de l'opérateur $\mathcal{A}_\varepsilon^\alpha$, qui nous permettra de montrer que lorsque $\varepsilon > 0$, le semi-groupe $T_\varepsilon^\alpha(t)$ est en fait analytique, ce qui implique des effets régularisants analogues à ceux rencontrés pour l'équation de la chaleur.

Observons dans un premier temps, que :

la famille $(u_j, v_j)_{j \geq 0}$ est une base orthonormale de l'espace H , où :

$$u_j = \frac{1}{\sqrt{\nu_j^2 + 4\alpha^2/g}} \begin{pmatrix} B\eta_j \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } v_j = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_j \end{pmatrix}$$

et le sous-espace $H_j = \text{Vect}(u_j, v_j)$ est un sous-espace invariant de $\mathcal{A}_\varepsilon^\alpha$.

La détermination du spectre se ramène donc à la détermination du spectre sur le sous-espace H_j , c'est-à-dire à la détermination des vecteurs propres de la matrice :

$$A_j = \begin{bmatrix} -\alpha & -\frac{g}{s_j} \\ s_j \nu_j^2 & -\alpha - \varepsilon g \nu_j^2 \end{bmatrix} \text{ avec } s_j = \frac{g}{\sqrt{g\nu_j^2 + 4\alpha^2}}.$$

Un calcul élémentaire montre alors que :

les valeurs propres sont donnés par $(x_j = \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{g} \nu_j)$:

$$(1.20) \quad \begin{cases} \lambda_j^\mp = \frac{2}{\varepsilon} x_j (-x_j \mp i \sqrt{1 - x_j^2}) - \alpha & \text{si } x_j < 1 \\ \lambda_j^\mp = \frac{2}{\varepsilon} x_j (-x_j \mp \sqrt{x_j^2 - 1}) - \alpha & \text{si } x_j \geq 1 \end{cases}$$

associées aux vecteurs propres :

$$(1.21) \quad w_j^\mp = \rho_j^\mp \begin{pmatrix} -g \\ \lambda_j^\mp + \alpha \end{pmatrix} \text{ où } \rho_j^\mp \text{ est un coefficient de normalisation.}$$

On remarque que :

si $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de valeurs propres de partie imaginaire non nulle, correspondant à des ondes amorties, et un nombre infini de valeurs propres réelles, correspondant à des ondes "évanescentes",

si $\varepsilon = 0$, toutes les valeurs propres sont de la forme $\mp i \sqrt{g} \nu_j - \alpha$.

Par ailleurs, il est facile de vérifier que :

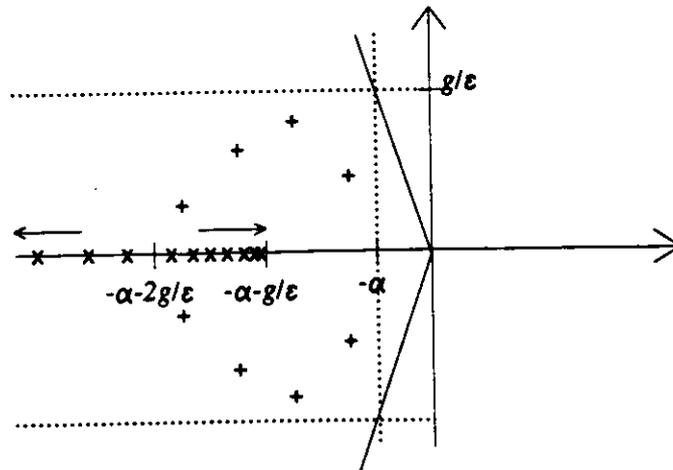
la valeur propre pour $j = 0$ est double : $\lambda_0 = -\alpha$ et que le sous-espace propre associé est de dimension 1. Il en va de même, si $\nu_j = \frac{2}{\varepsilon \sqrt{g}}$.

Enfin un calcul simple, montre que :

w_j^+ n'est pas orthogonale à w_j^- , mais que par contre w_j^\pm est orthogonal à w_k^\pm si $j \neq k$.

Ces remarques montrent que l'opérateur $\mathcal{A}_\varepsilon^\alpha$ n'est pas diagonalisable dans H , mais seulement diagonalisable par bloc. Un bloc, voire deux sont des blocs de Jordan. Ceci montre que la base de vecteurs propres n'est pas complète dans H .

En outre, on a la répartition spectrale suivante :



Pour terminer cette étude spectrale, indiquons une estimation de la résolvante lorsque $\varepsilon > 0$, qui assure que le semi-groupe est analytique :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, |\operatorname{Arg} \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta \text{ avec } \delta > 0 \text{ on a } \left\| (\lambda I - \mathcal{A}_\varepsilon^\alpha)^{-1} \right\|_H \leq \frac{M}{|\lambda|} \quad \lambda \neq 0.$$

Cette estimation repose sur le fait le spectre de $\mathcal{A}_\varepsilon^\alpha$ est situé dans un cône strictement inclus dans le demi-plan $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Dans le cas où $\varepsilon = 0$, cette propriété n'est plus vérifiée car le spectre est non borné et situé sur la droite $\operatorname{Re} \lambda = -\alpha$. Ce n'est pas très surprenant car dans ce cas le modèle est hyperbolique et propage les singularités.

1.4 RESULTATS DE LA THEORIE DES SEMI-GROUPES

Dans ce paragraphe, nous tirons les conséquences du paragraphe précédent en s'appuyant sur la théorie des semi-groupes, voir par exemple Pazy [6].

Ainsi, on a les résultats suivants pour l'équation d'évolution (1.15) :

si $\varepsilon > 0$ et $V_0^\alpha \in H$, $F_\varepsilon^\alpha \in C^{0,s}([0, T], H)$ avec $s \in]0, 1]$ ou si $\varepsilon = 0$ et $V_0^\alpha \in D(\mathcal{A}_0^\alpha)$ et $F_0^\alpha \in C^0([0, T], D(\mathcal{A}_0^\alpha))$ alors le problème (1.15) admet une unique solution :

$$\bar{V}_\varepsilon^\alpha \in C^0([0, T], H) \cap C^1(]0, T[, H) \cap C^0(]0, T[, D(\mathcal{A}_\varepsilon^\alpha))$$

qui se représente sous la forme :

$$\bar{V}_\varepsilon^\alpha(t) = T_\varepsilon^\alpha(t)V_0^\alpha + \int_0^t T_\varepsilon^\alpha(t-s)F_\varepsilon^\alpha(s)ds.$$

Pour se trouver dans le cadre d'application de ce résultat, une condition suffisante sur les données $h(t)$, $\tilde{\varphi}_0(t)$ et $\tilde{\eta}_0$ est, compte-tenu de (1.8) :

$$(1.21) \quad \left| \begin{array}{l} \text{si } \varepsilon > 0 : \\ \text{si } \varepsilon = 0 : \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} h \in C^{2,s}([0, T], L^2(B)), \tilde{\varphi}_0 \in H^{1/2}(S_\ell) \text{ et } \tilde{\eta}_0 \in L^2(S_\ell) \\ h \in C^2([0, T], L^2(B)), \tilde{\varphi}_0 \in H^{1/2}(S_\ell) \text{ et } \tilde{\eta}_0 \in HL^{1/2}(S_\ell) \\ \text{avec } \partial_x B \tilde{\varphi}_0 \in L^2(S_\ell) \end{array}$$

Compte-tenu de ce qui précède, l'existence d'une solution $\begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix}$ au problème initial (1.1) repose sur des résultats de régularité du relèvement G car :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} (t) = \begin{pmatrix} G \\ -\frac{1}{g} \partial_x \gamma G \end{pmatrix} (t) + e^{\alpha t} \bar{V}_\varepsilon^\alpha.$$

Or par construction de G , sous les hypothèses (1.21) on a :

$$G \in C^2([0, T], H^1(\Omega)) \text{ et } \partial_x \gamma G \in C^1([0, T], H^{1/2}(S_\ell)).$$

On énonce donc le résultat d'existence et d'unicité du problème (1.1) :

Sous les hypothèses (1.21), le problème (1.1) admet une unique solution :

$$(1.22) \quad \begin{array}{l} \tilde{\varphi} \in C^0([0, T], H^1(\Omega)) \cap C^1(]0, T[, H^1(\Omega)) \\ \tilde{\eta} \in C^0([0, T], L^2(S_\ell)) \cap C^1(]0, T[, L^2(S_\ell)) \cap C^0(]0, T[, H^{1/2}(S_\ell)). \end{array}$$

La théorie des semi-groupes permet également de démontrer simplement la convergence des solutions lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ à l'aide du théorème de Trotter-Kato qui implique que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon^\alpha(t)V = T_0^\alpha(t)V \quad \forall t \geq 0, \forall V \in H,$$

Ce résultat permet d'en déduire, compte-tenu de la représentation de $\bar{V}_\varepsilon^\alpha$, donné ci-dessus, le résultat de convergence :

On suppose que :

$$\begin{array}{l} \tilde{\varphi}_0 \in H^{1/2}(S_\ell) \text{ et } \tilde{\eta}_0 \in H^{1/2}(S_\ell) \text{ avec } \partial_x B \tilde{\varphi}_0 \in L^2(S_\ell) \\ \text{et } h \in C^{2,s}([0, T], L^2(B)) \text{ avec } s \in]0, 1]. \end{array}$$

On note $(\tilde{\varphi}_\varepsilon, \tilde{\eta}_\varepsilon)$ la solution du problème (1.1). On a alors :

$$\begin{array}{l} \sup_{t \in [0, T]} \|\tilde{\varphi}_\varepsilon(t) - \tilde{\varphi}_0(t)\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \\ \sup_{t \in [0, T]} \|\tilde{\eta}_\varepsilon(t) - \tilde{\eta}_0(t)\|_{L^2(S_\ell)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \end{array}$$

1.5 REPRESENTATION SPECTRALE DE LA SOLUTION

Dans ce paragraphe, on se place sous les hypothèses (1.21).

La formule de représentation spectrale de la solution $\begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{\eta} \end{pmatrix}$ du problème (1.1) s'obtient à l'aide de deux décompositions spectrales : l'une correspondant au relèvement et l'autre correspondant à la solution $\begin{pmatrix} \varphi \\ \eta \end{pmatrix}$ du problème (1.7), cette dernière pouvant s'obtenir de deux manières équivalentes : soit par l'utilisation de la décomposition spectrale de l'opérateur $\mathcal{A}_\varepsilon^\alpha$ sur chaque sous-espace H_j , soit en travaillant directement sur la formulation (1.7), ce qui se révèle plus simple.

La solution $\varphi(t)$ du problème (1.7), se représente sous la forme :

$$(1.23) \quad \varphi(t) = \sum_{j \geq 0} a_j(t) B \eta_j.$$

Injectons cette représentation dans les équations (1.7), il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 0} \ddot{a}_j(t) \eta_j + g \partial_z B \eta_j + \varepsilon g \dot{a}_j(t) \partial_z B \eta_j &= -f(t) \quad \forall t > 0 \\ \sum_{j \geq 0} a_j(0) \eta_j &= \varphi_0 \quad \text{et} \quad \sum_{j \geq 0} \dot{a}_j(0) \eta_j = -g \hat{\eta}_0 \end{aligned}$$

Par construction, on a : $\partial_z B \eta_j = \nu_j^2 \eta_j$ et $(\eta_j)_{j \geq 0}$ est une base orthogonale de S_ε . On en déduit que la fonction $a_j(t)$ est solution de l'équation différentielle du second ordre :

$$\begin{cases} \ddot{a}_j(t) + \varepsilon g \nu_j^2 \dot{a}_j(t) + g \nu_j^2 a_j(t) = -(f(t), \eta_j)_{S_\varepsilon} & \forall t > 0 \\ a_j(0) = (\varphi_0, \eta_j)_{S_\varepsilon} \quad \text{et} \quad \dot{a}_j(0) = -g (\hat{\eta}_0, \eta_j)_{S_\varepsilon} \end{cases}$$

dont une solution est donnée par :

$$(1.24) \quad \begin{aligned} a_j(t) &= - \int_0^t E_j^\varepsilon(t-s) (f(s), \eta_j)_{S_\varepsilon} ds \\ &\quad + \dot{E}_j^\varepsilon(t) (\varphi_0, \eta_j)_{S_\varepsilon} + E_j^\varepsilon(t) (\varepsilon g \nu_j^2 (\varphi_0, \eta_j)_{S_\varepsilon} - g (\hat{\eta}_0, \eta_j)_{S_\varepsilon}) \end{aligned}$$

où E_j^ε désigne la solution élémentaire de l'équation différentielle, donnée par :

$$E_j^\varepsilon(t) = \frac{e^{\tilde{\lambda}_j^+ t} - e^{\tilde{\lambda}_j^- t}}{\tilde{\lambda}_j^+ - \tilde{\lambda}_j^-} \quad \text{si } j > 0, \quad E_0^\varepsilon(t) = t$$

avec $\tilde{\lambda}_j^\pm = \lambda_j^\pm + \alpha$.

Par définition de η , on déduit que :

$$(1.25) \quad \eta = \sum_{j \geq 0} b_j(t) \eta_j$$

avec :

$$(1.26) \quad \begin{aligned} b_j(t) &= \frac{1}{g} \int_0^t \dot{E}_j^\varepsilon(t-s) (f(s), \eta_j)_{S_\varepsilon} ds \\ &\quad + \nu_j^2 E_j^\varepsilon(t) (\varphi_0, \eta_j)_{S_\varepsilon} + \dot{E}_j^\varepsilon(t) (\hat{\eta}_0, \eta_j)_{S_\varepsilon} \end{aligned}$$

Les résultats d'existence et d'unicité des solutions, nous assurent que :

les représentations spectrales (1.23) et (1.24) sont convergentes respectivement dans $C^0([0, T], H^1(\Omega))$ et $C^0([0, T], L^2(S_\ell)) \cap C^0(]0, T[, H^{1/2}(S_\ell))$.

Il s'agit maintenant d'exhiber une représentation spectrale du relèvement G . Pour ce faire, on introduit les éléments propres (ω_k^2, τ_k) du problèmes suivant :

$$\begin{cases} \Delta \tau_k = 0 & \text{sur } \Omega \\ \partial_n \tau_k = 0 & \text{sur } F \\ \partial_n \tau_k = \omega_k^2 \tau_k & \text{sur } B \\ \partial_x \tau_k + \nu \tau_k = 0 & \text{sur } S_\ell \end{cases}$$

Par des arguments similaires à ceux utilisés lors de la décomposition spectrale de N , on montre que : la famille $(\tau_k|_B)_{k \geq 0}$ forme une base orthonormale de $L^2(B)$ et

$$0 < \omega_0^2 \leq \omega_1^2 \leq \dots \leq \omega_k^2 \leq \dots \rightarrow +\infty.$$

Par conséquent, si $h(t) \in L^2(S_\ell)$, on a :

$$(1.27) \quad h(t) = \sum_{k \geq 0} h_k(t) \tau_k|_B \text{ avec } h_k(t) = \int_B h(t) \tau_k d\Gamma.$$

Le relèvement $G(t)$ (ainsi que ses dérivées d'ordre 1 et 2), solution du problème (1.5) se représente alors par la série convergente dans $H^1(\Omega)$:

$$(1.28) \quad G^{(l)}(t) = \sum_{k \geq 0} h_k^{(l)}(t) \tau_k, \quad l = 0, 1, 2.$$

On est maintenant en mesure d'énoncer le théorème de représentation spectrale de la solution du problème (1.1).

Sous les hypothèses de régularité des données (1.21), l'unique solution $\begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix}$ du problème (1.1) se représente sous la forme :

$$(1.30) \quad \begin{aligned} \tilde{\varphi}(t) &= \sum_{k \geq 0} h_k(t) \tau_k + \sum_{j \geq 0} a_j(t) B \eta_j \\ \tilde{\eta}(t) &= -\frac{1}{g} \sum_{k \geq 0} \dot{h}_k(t) \gamma \tau_k + \sum_{j \geq 0} b_j(t) \eta_j \end{aligned}$$

a_j, b_j et h_k étant respectivement donné par (1.24), (1.26) et (1.27); les séries convergeant respectivement, uniformément en t , dans $H^1(\Omega)$ et $L^2(S_\ell)$ et uniformément sur tout compact de $]0, T[$ dans $H^{1/2}(S_\ell)$

Sur tout compact de $]0, T[$, on peut estimer la vitesse de convergence des séries. En effet, la convergence de $\tilde{\eta}(t)$ dans $H^{1/2}(S_\ell)$, nous permet d'obtenir une estimation, compte-tenu de la relation :

$$\|\eta_j\|_{H^{1/2}(S_\ell)} = (g + \nu_j^2) \|\eta_j\|_{L^2(S_\ell)}.$$

Plus précisément, on a les estimations des restes des séries :

$$(1.31) \quad \begin{cases} \left\| \sum_{k \geq 0}^K h_k(t) \tau_k + \sum_{j \geq 0}^J a_j(t) B \eta_j \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\Delta_{JK}(t)}{\min(\omega_K, \nu_J)} \quad \forall t > 0 \\ \left\| -\frac{1}{g} \sum_{k > K} \dot{h}_k(t) \gamma \tau_k + \sum_{j > J} b_j(t) \eta_j \right\|_{L^2(S_\ell)} \leq \frac{\Delta_{JK}(t)}{\min(\omega_K, \nu_J)} \quad \forall t > 0 \end{cases}$$

où $\Delta_{JK}(t)$ converge, uniformément sur tout compact de $]0, T[$, vers 0 lorsque $J, K \rightarrow \infty$.

L'amélioration de la vitesse de convergence de ses séries nécessite des propriétés de régularité en espace des solutions qu'ils semblent difficile à obtenir à cause de la singularité géométrique liée à l'intersection $S_t \cap B$.

2. METHODE NUMERIQUE

Nous allons voir dans cette partie comment les formules de représentation spectrale établies au paragraphe précédent conduisent à une méthode numérique efficace dès lors que les géométries sont simples (cuve circulaire ou cuve rectangulaire). En effet, ces représentations reposent sur la connaissance analytique des fonctions propres.

2.1 FONCTIONS PROPRES SUR DES GEOMETRIES SIMPLES

Un calcul à variables séparées élémentaire fournit toutes les fonctions propres η_j, τ_k dans le cas d'une cuve rectangulaire ou circulaire.

• Cuve circulaire

On suppose que Ω est le cylindre de rayon R et de hauteur H . B est donné par le bord latéral du cylindre $r = R$.

Les éléments propres de l'opérateur N , sont données par :

$$\eta_{mn}^i(r, \theta) = \mathcal{N}_{nm}^\eta J_n(\zeta_{mn} r) \begin{cases} \cos(n\theta) & \text{si } i = 1 \\ \sin(n\theta) & \text{si } i = 2 \end{cases} \quad i = 1, 2, \quad m, n \geq 0,$$

$$\nu_{mn}^2 = \zeta_{mn} \operatorname{th}(\zeta_{mn} H)$$

et on a :

$$B\eta_{mn}^i(r, \theta, z) = \eta_{mn}^i(r, \theta) \frac{\operatorname{ch}(\zeta_{mn}(z + H))}{\operatorname{ch}(\zeta_{mn} H)}$$

avec \mathcal{N}_{nm}^η un coefficient de normalisation, J_n la fonction de Bessel et $\zeta_{mn} R$ la $m^{\text{ème}}$ racine de J_n' .

Les éléments propres du relèvement sont de la forme :

$$\tau_{mn}^i(r, \theta, z) = \mathcal{N}_{mn}^\tau I_n(mr) \cos(m(z + H)) \begin{cases} \cos(n\theta) & \text{si } i = 1 \\ \sin(n\theta) & \text{si } i = 2 \end{cases} \quad i = 1, 2, \quad mn \geq 0,$$

$$\omega_{mn}^2 = \frac{m I_n'(mr)}{I_n(nR)}$$

où m est la $m^{\text{ème}}$ racine positive de l'équation : $\operatorname{tg}(xH) = -\frac{x}{z}$ et I_n la $n^{\text{ème}}$ fonction de Bessel modifiée.

• Cuve rectangulaire

On suppose que Ω est un parallélépipède de longueur l_x , de largeur l_y et de profondeur H . Le bord supportant les batteurs est constitué des quatre faces latérales $B = \Gamma_1 U \Gamma_2 U \Gamma_3 U \Gamma_4$ avec $\Gamma_1 = \{x = 0\}$, $\Gamma_2 = \{x = l_x\}$, $\Gamma_3 = \{y = 0\}$ et $\Gamma_4 = \{y = l_y\}$.

On obtient dans ce cas :

$$\eta_{mn}(x, y) = \mathcal{N}_{mn}^\eta \cos\left(\frac{m\pi}{l_x} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l_y} y\right)$$

$$B\eta_{mn}(x, y, z) = \mathcal{N}_{mn}^\eta \cos\left(\frac{m\pi}{l_x} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l_y} y\right) \frac{\operatorname{ch}(\zeta_{mn}(z + H))}{\operatorname{ch}(\zeta_{mn} H)} \quad m, n \geq 0,$$

$$\nu_{mn}^2 = \zeta_{mn} \operatorname{th}(\zeta_{mn} H)$$

avec $\zeta_{mn} = \pi \sqrt{\left(\frac{m}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{l_y}\right)^2}$.

Pour chaque Γ_i , on obtient une famille de fonctions propres τ_k qui prend la forme suivante dans le cas $i = 1$, les autres cas s'obtenant par symétrie :

$$\tau_{mn}^1(x, y, z) = \mathcal{N}_{mn}^{\tau, 1} \operatorname{ch}(\delta_{mn}(l_x - x)) \cos\left(\frac{n\pi}{l_y} y\right) \cos(mz) \quad m, n \geq 0,$$

$$\omega_{mn}^2 = \delta_{mn} \operatorname{th}(\delta_{mn} l_x)$$

avec m la $m^{\text{ème}}$ racine positive de l'équation $\text{tg}(xH) = -\frac{\nu}{x}$ et $\delta_{mn} = \sqrt{\frac{2}{m} + \left(\frac{n\pi}{l_y}\right)^2}$.

L'estimation de ces fonctions propres ne soulève pas beaucoup de difficulté. Les fonctions de Bessel sont estimées par récurrence. Il faut toutefois effectuer ces calculs avec une bonne précision.

2.2 CALCUL EFFECTIF DES COEFFICIENTS DES SERIES

Nous allons nous placer, à titre d'exemple, dans le cas de la mise en mouvement du fluide par P batteurs plans identiques répartis sur le pourtour du bassin. On suppose donc que :

$$\tilde{\varphi}_0 = 0 \text{ et } \tilde{\eta}_0 = 0 \text{ et } h(t, z, u) = b(z) \sum_{p=1}^P v_p(t) \chi_{B_p}(u),$$

u signifiant soit x ou y dans le cas du bassin rectangulaire, soit θ dans le cas du bassin circulaire.

La fonction $v_p(t)$ représente la loi de mouvement du batteur p et on suppose que $v_p(0) = \dot{v}_p(0) = 0$. La fonction $b(z)$, indépendante des batteurs car ceux-ci sont supposés tous identiques, représente la loi de variation de la vitesse suivant la profondeur. On a ainsi :

- pour un batteur piston : $b(z) = 1$
- pour un batteur articulé à la profondeur a : $b(z) = \frac{a+z}{a}$

• Calcul des coefficients du relèvement

Le calcul des coefficients h_k , donnés par la relation (1.27) prend la forme suivante :

$$h_k = \sum_{p=1}^P v_p(t) \int_{B_p} b(z) \tau_k d\Gamma$$

qui compte-tenu de la forme des fonctions τ_k , se calcule analytiquement. On obtient de façon immédiate le coefficient $\dot{h}(t)$.

• Calcul des coefficients a_j, b_j

Ces coefficients ayant la même forme, nous exposons seulement le calcul du coefficient a_j . En vertu du fait que les conditions initiales sont nulles, l'évaluation du coefficient a_j se réduit à l'évaluation de l'intégrale de convolution :

$$a_j(t) = - \int_0^t E_j^\varepsilon(t-s) \left(\int_{S_t} f(s) \eta_j d\Gamma \right) ds$$

avec $f(s) = (\partial_t^2 - \nu g(1 + \varepsilon \partial_t)) \gamma G(s)$.

En utilisant le fait que la fonction $G(t)$ ainsi que toutes ses dérivées $G^{(l)}(t)$ vérifie un problème de type (1.5) et la relation (1.19), on déduit la relation suivante :

$$\int_{S_t} \gamma G^{(l)} \eta_j d\Gamma = \frac{1}{\nu + \nu_j^2} \int_B h^{(l)} \eta_j|_B d\Gamma,$$

qui montre que le calcul de $a_j(t)$ ne nécessite pas la connaissance explicite du relèvement.

En vertu de ce qui précède, a_j s'exprime donc sous la forme :

$$a_j(t) = - \frac{1}{\nu + \nu_j^2} \sum_{p=1}^P \left(\int_0^t E_j^\varepsilon(t-s) w_p(s) ds \right) \left(\int_{B_p} b(z) \eta_j|_B d\Gamma \right)$$

où on a posé : $w_p(s) = \ddot{v}_p(s) - \nu g(v_p(s) + \varepsilon \dot{v}_p(s))$.

L'intégrale sur B_p se calcule analytiquement et l'intégrale de convolution en temps peut également s'estimer analytiquement dès lors que les lois des mouvements de batteurs sont représentées sur une base de fonctions temporelles (base harmonique par exemple).

L'implémentation informatique de ces formules de représentation spectrale ne soulève pas de difficultés. Il faut néanmoins veiller à utiliser des expressions stables, les fonctions de Bessel modifiées ainsi que les fonctions ch tendant très rapidement vers l'infini.

Afin de valider ces représentations spectrales on a été amené à programmer le cas où les données initiales $\tilde{\varphi}_0, \tilde{\eta}_0$ ainsi que la donnée sur les batteurs $h(t)$ sont construits comme les traces d'une onde plane, solution des équations en domaine non borné. Les calculs précédents, bien que plus compliqués (particulièrement dans le cas circulaire), aboutissent encore à des expressions analytiques. Nous renvoyons à Lunéville [7] pour plus de détails.

2.3 RESULTATS NUMERIQUES

• Précision de la méthode

Afin d'estimer la précision de la méthode, nous avons cherché à calculer l'écart entre la représentation spectrale avec N, M modes du potentiel d'une onde plane et l'onde plane. Les résultats que nous présentons concernent le cas d'une cuve carrée, de côté 1 et de profondeur 1. N (resp. M) représente le nombre de modes suivant x (resp. y). L'onde plane a pour longueur d'onde $k = 4\pi$ et est de direction $\frac{\pi}{4}$, ce choix ayant été fait pour vérifier des propriétés de symétrie.

Sur la planche I, nous avons représenté les lignes de niveau du logarithme décimal de l'écart entre le potentiel calculé et le potentiel de l'onde plane en fonction de N et M , à un instant donné, pour $\varepsilon=0$ et en différents points du domaine : (.5, .5, .5) un point intérieur, (.5, .5, 0) le centre de la surface libre et (.0, .0, .0) un coin de la surface libre. A titre de comparaison, nous donnons en ce dernier point l'erreur obtenu avec $\varepsilon = .01$.

On note tout d'abord, que sur toutes les représentations d'erreur, les lignes d'isovaleurs sont symétriques par rapport à la droite $N = M$, ce qui montre que le programme conserve la symétrie de la donnée.

Par ailleurs, on observe que la précision est excellente à l'intérieur du bassin car pour $N = M = 10$ on atteint la solution avec 6 chiffres significatifs; la simple précision machine (10^{-7}) étant alors atteinte dans certains calculs. Elle est nettement moins bonne sur la surface libre (4 chiffres significatifs avec $N = M = 35$) et se détériore dans le coin (seulement deux chiffres significatifs avec $N = M = 35$). Par contre, elle s'améliore lorsque $\varepsilon > 0$.

La très bonne précision à l'intérieur du domaine est due à un effet local de régularité de la solution, lié au fait que la solution est harmonique. La convergence est alors spectrale (plus rapide que tout polynôme). L'amélioration de la précision lorsque $\varepsilon > 0$ est également liée à des propriétés régularisantes que possède le modèle amorti. Ces résultats mettent également en évidence des convergences ponctuelles en espace, ce qui va au delà des prévisions des estimations théoriques. Les séries étant généralement alternées, la convergence n'est pas monotone vis-à-vis du nombre de modes (pics).

• Simulation dans une cuve cylindrique

Sur la seconde planche de résultats, figure l'élévation de la surface libre, à différents instants, d'un bassin cylindrique (de rayon 1m) équipé de 40 batteurs plans articulés au fond et situés sur la demi-circonférence du bassin. Les lois de mouvement de ces batteurs ont été obtenues par projection de la trace normale d'une onde plane (de longueur d'onde .25m) avec départ différé de chacun des batteurs, le bassin étant initialement au repos. Cette simulation a été réalisée avec 800 modes. Les vitesses de propagation sont en accord avec la théorie.

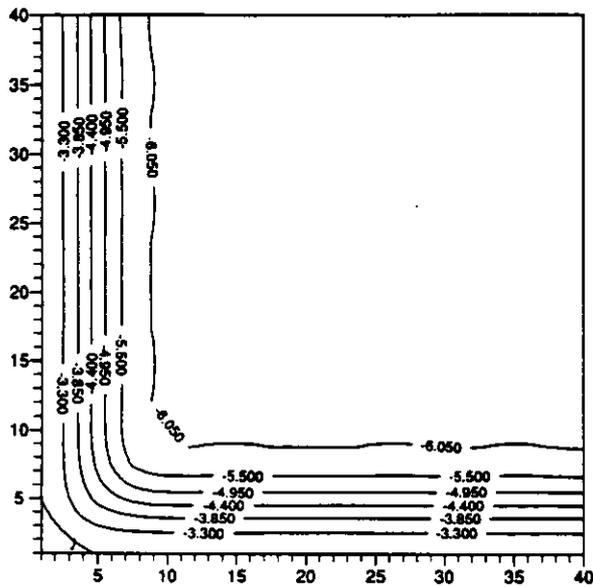
CONCLUSION

Au delà de son intérêt dans le domaine de la simulation directe, ce modèle de décomposition modale est très adapté au calcul de lois de commande optimales de batteurs et de lois de rétroaction stabilisantes. Des résultats de cette nature ont été obtenus pour un canal à houle (situation bidimensionnelle) (voir [8]).

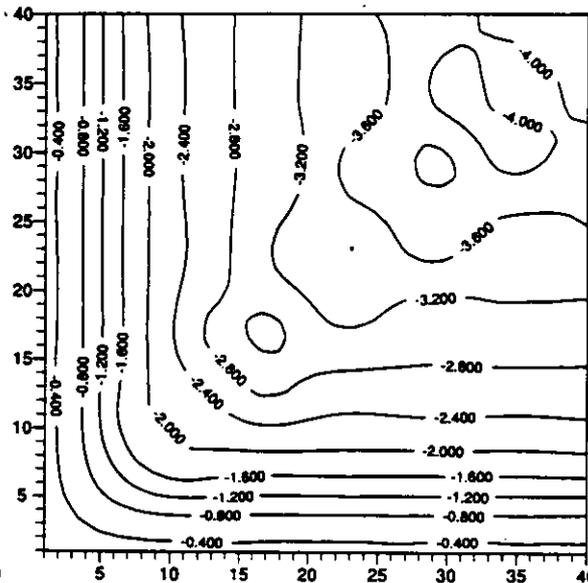
BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. LANDAU, E. LIFCHITZ : Mécanique des fluides, Ed. MIR, 1971.
- [2] D. EUVRARD : Les mille et une facettes de la fonction de Green du problème de la résistance de vagues, Rapport ENSTA N°144, juin 1983.
- [3] M. VUILLIERME LEDART : Problèmes asymptotiques de l'hydrodynamique navale linéarisée et du couplage fluide-structure, Thèse Paris 6, juillet 1987.
- [4] E. LUNEVILLE : Etude théorique d'un modèle hydrodynamique linéarisée avec amortissement, Rapport ENSTA à paraître.
- [5] E. BOUJOT : Sur l'analyse des caractéristiques vibratoires d'un liquide contenu dans un réservoir, Journal de Mécanique, vol.11, N°4, décembre 1972, pp 649-671.
- [6] A. PAZY : Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer Verlag, 1983.
- [7] E. LUNEVILLE : Résolution numérique des équations hydrodynamiques dans une cuve cylindrique ou rectangulaire, Rapport ENSTA, à paraître.
- [8] G.J BLANCHARD, F.QUENTIN, J.P YVON : Optimal control of waves generators in a canal, IFIP, System Modelling and Optimisation, Zurich 1991.

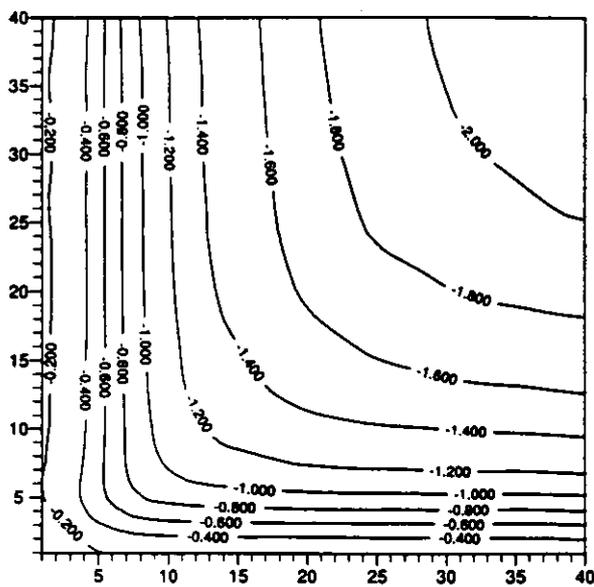
PLANCHE I
 Précision de la méthode vis-à-vis du nombre de modes
 (logarithme décimal de l'erreur)



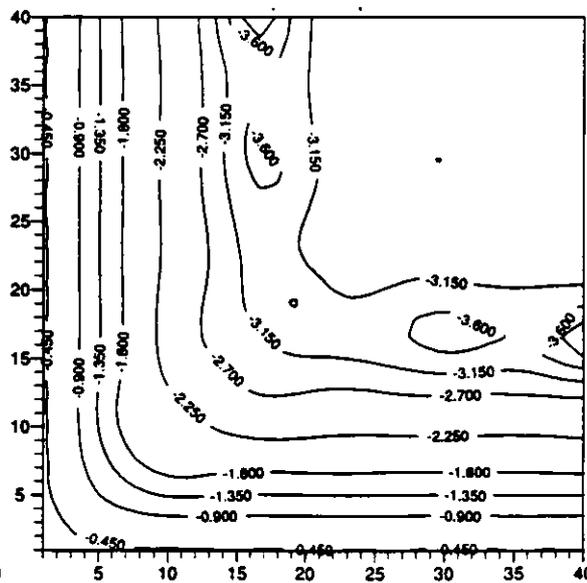
point dans le domaine
 $\epsilon = 0$



point sur la surface libre
 $\epsilon = 0$



point sur le coin
 $\epsilon = 0$



point sur le coin
 $\epsilon = .01$

PLANCHE II
Simulation dans une cuve cylindrique

