

4e JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE

1, 2, 3 mars 1993 - Nantes

**EVALUATION DE LA FONCTION DE GREEN
DU PROBLEME DE DIFFRACTION/RADIATION EN PROFONDEUR D'EAU FINIE**

Une nouvelle méthode rapide et précise

par

Xiaobo CHEN

Direction Technologie Océanique (DTO)

BUREAU VERITAS

17bis Place des Reflets, 92077 Paris La Défense 2

Résumé

Une nouvelle formulation de la fonction de Green du problème de diffraction et radiation en profondeur d'eau finie est développée. Elle se compose d'une partie de Rankine, d'une partie qui s'identifie à la fonction de Green en profondeur infinie et d'une partie régulière. La partie régulière s'écrit sous forme de deux intégrales simples dont les noyaux décroissent exponentiellement avec la variable d'intégration. Ces deux intégrales sont évaluées numériquement en double précision, puis approchées par deux polynômes de Tchebychev. Ces polynômes de Tchebychev sont tronqués à l'ordre où la somme absolue des coefficients aux ordres supérieurs est inférieure à 10^{-6} et ensuite convertis en polynômes ordinaires. En suivant le même principe, la fonction de Green en profondeur infinie est aussi approchée par des polynômes. Un algorithme dit "Vecteur" permet d'évaluer finalement la fonction de Green en profondeur finie par les polynômes d'une seule variable, après avoir effectué certains calculs pour les facettes classées en groupe. Cette nouvelle méthode rapide et précise est encore plus puissante pour la solution du problème du second ordre.

Summary

A new formulation of the water wave Green function in finite waterdepth has been developed. It is composed of a Rankine part, a term identified with the Green function in infinite waterdepth and two regular functions represented by single integrals whose kernels exponentially decrease with the integral variable. These two regular functions are evaluated with double precision and approximated by Chebyshev expansions. The Chebyshev expansions are truncated at the order where the sum of all upper-order coefficients is less than 10^{-6} and then transformed into normal polynomials of power series. Following the same principle, the Green function for infinite waterdepth is also approximated by polynomials. A so-called "Vecteur" algorithm permits to compute finally the Green function by polynomials of a single variable, having carried out some pre-computation for panel elements classified in groups. This algorithm is even more efficient in the evaluation of the velocity potential and its derivatives on the free surface in the search of the second order solution.

1. Introduction

Dans le cadre des hypothèses de fluide parfait et d'écoulement irrotationnel, l'interaction entre la houle et une structure offshore (fixe ou libre en mouvement) est décrite par le potentiel de vitesse du fluide. Ce potentiel de vitesse satisfait l'équation de Laplace et les conditions non-linéaires sur la surface libre et sur la partie de la surface de structure en contact avec le fluide (la carène). La solution complète de ce problème potentiel non-linéaire pourra être trouvée dans le domaine temporel par intégration numérique complexe des équations différentielles [6].

Si nous supposons, en plus, une faible cambrure de la houle (ce qui est vérifié dans les états de mer sans déferlement) et de petits mouvements du flotteur, le potentiel de vitesse du fluide peut être développé sous forme d'une série d'un paramètre proportionnel à la cambrure de la houle [3]. Dans ce cas, les conditions aux limites sont appliquées sur la surface libre non-perturbée et sur la surface de la carène en position moyenne.

Au premier ordre, le problème est classique avec une condition linéarisée sur la surface libre. En analysant le second membre de la condition de glissement sur la carène, le potentiel de perturbation du premier ordre peut être décomposé en celui de diffraction qui représente l'écoulement diffracté par le corps maintenu fixe, et celui de radiation qui représente l'écoulement engendré par le mouvement du corps sans houle incidente. Ce problème linéaire peut être résolu par la méthode des singularités qui fait intervenir l'évaluation de la fonction de Green. La fonction de Green représente un écoulement créé par une source pulsante et ponctuelle. Elle satisfait les conditions aux limites sur la surface libre, sur le fond marin et à l'infini mais pas celle sur la carène. La fonction de Green est en effet une solution élémentaire du problème. La solution complète est une combinaison linéaire de solutions élémentaires ou écoulements créés par une distribution de sources (ou mixte de sources et doublets) sur la carène. Une équation intégrale peut être établie pour déterminer la distribution de singularités sur la carène afin de satisfaire la condition sur celle-ci. Le nombre d'appels de la fonction de Green est proportionnel au carré du nombre de facettes qui représentent la surface de la carène.

Au second ordre, le problème de diffraction/radiation est plus complexe en raison d'une condition non-homogène sur la surface libre dont le second membre est une fonction quadratique du potentiel du premier ordre. La solution du second ordre pour les efforts peut être obtenue par la méthode de Molin [14]. Cette méthode (de même que la solution complète du problème - l'obtention du potentiel du second ordre) impose une intégrale sur la surface libre dont le noyau dépend de la solution du premier ordre. C'est-à-dire que le potentiel du premier ordre et ses dérivées doivent être déterminés non seulement sur la carène, mais aussi sur la surface libre. Dans certains cas, le nombre de facettes nécessaire à une modélisation précise du flotteur est très élevé. Ainsi, pour calculer les efforts de très hautes fréquences sur une PLT (Chen et Molin [4]), une discrétisation satisfaisante compte environ 14 000 facettes sur la carène et 100 000 facettes sur la surface libre. Le nombre possible d'appels de la fonction de Green au cours du calcul des efforts du second ordre est alors d'environ $(1/8) \times 10^9$ (en utilisant la troisième symétrie dans les directions diagonales de PLT) pour une seule houle bichromatique.

Pour le problème de diffraction et radiation d'un corps animé d'une faible vitesse d'avance, la méthode consistant à développer le potentiel de vitesse par rapport au nombre de Strouhal (τ) est la plus courante [12] [19]. Dans cette méthode, la correction d'ordre τ de la fonction de Green est obtenue par la fonction de Green sans vitesse d'avance ($\tau=0$) et ses dérivées. L'approximation dite "fréquence de rencontre" donne aussi, dans certains cas, de très bons résultats en ce qui concerne le mouvement du corps et la résistance ajoutée qui est nécessaire, en outre, pour calculer l'amortissement de dérive. Dans cette approche, la fonction de Green reste la même sauf la fréquence de houle qui est remplacée par la fréquence de rencontre.

Depuis Wehausen et Laitone [21], la fonction de Green ont été considérablement étudiée et diverses représentations sous forme d'intégrale ont été obtenues. L'arrivée des ordinateurs puissants a permis d'effectuer des calculs numériques dans le domaine tri-dimensionnel et a incité les chercheurs à trouver des formulations efficaces et des algorithmes numériques correspondants.

En profondeur d'eau infinie, la formulation obtenue par Guével & al. [11] sous forme d'intégration en termes de fonction exponentielle intégrale, est précise pour calculer les coefficients d'influence lorsque le point influençant et le point influencé sont proches. La formulation et l'algorithme numérique développés par Noblesse [17] (similaires à Newman [15]) sont efficaces, en partitionnant le domaine d'application et en utilisant des formules semi-analytiques spécifiques aux différents sous-domaines. Les tabulations créées par Delhommeau [8] ou plus récemment par Ba, Ponizi et Noblesse [2] sont très rapides, malgré un compromis entre la taille des tableaux et la précision d'interpolation.

Une façon ingénieuse de formuler la fonction de Green en profondeur d'eau finie est d'extraire des termes qui peuvent être identifiés avec la fonction de Green en profondeur d'eau infinie, et de faire l'approximation pour le complément qui représente principalement l'influence du fond marin sur l'écoulement. La formulation

développée par Guével & al. [11] ou de Newman [15] contient 4 fonctions de Green de profondeur infinie. Le terme complémentaire dans la formulation de [11] est donné par une intégrale dont le pôle du noyau est éliminé. Ce noyau est approché par une série finie d'exponentielles dont les coefficients sont déterminés au moyen de l'algorithme numérique développé par Daubisse [7]. Dans la formulation de [15], le terme complémentaire est représenté par une intégrale dont le noyau a deux pôles singuliers. Ce terme est calculé numériquement et ensuite approché par les polynômes de Tchebychev. Plus récemment Newman [16] a présenté un résumé sur les améliorations dans l'approximation de la fonction de Green en profondeur infinie et en profondeur finie.

Dans le présent travail, la méthode de la transformation de Hankel d'ordre zéro est utilisée pour obtenir la représentation de la fonction de Green sous forme d'intégrale. A partir de cette représentation intégrale, une nouvelle formulation est présentée dans la section 2. Cette formulation se compose d'une partie de Rankine, d'une partie qui s'identifie à la fonction de Green en profondeur infinie et d'une partie régulière.

La partie régulière se compose de deux fonctions qui s'écrivent sous forme de deux intégrales simples dont les noyaux décroissent exponentiellement avec la variable d'intégration. L'évaluation numérique de ces intégrales et l'algorithme d'approximation par les polynômes de Tchebychev de trois variables sont présentés dans la section 3. En suivant le même principe, la fonction de Green en profondeur infinie est aussi approchée par des polynômes plus quelques termes de fonctions élémentaires qui peuvent s'écrire également sous forme de séries polynômiales ou rationnelles, et un terme de type logarithmique lorsque le point de calcul et la source sont proches et près de la surface libre. La fonction de Green en profondeur d'eau finie est ainsi représentée par des polynômes, excepté la partie de Rankine et le terme logarithmique.

La section 4 décrit l'algorithme numérique pour l'évaluation de la fonction de Green. Les polynômes à trois variables peuvent être réduits à deux puisque les termes dépendant de la profondeur peuvent être calculés d'abord et une seule fois pour une fréquence de houle. Les polynômes sont d'une grande efficacité en termes de calcul numérique (schéma de Hörner). Un algorithme dit "Vecteur" consiste à regrouper les facettes suivant leurs distances verticales par rapport à la surface libre et à calculer les coefficients pour la variable horizontale après avoir effectué les boucles pour chaque groupe de même variable verticale. La fonction de Green est ainsi évaluée par les polynômes d'une seule variable. Un gain de temps de 10 à 20 est possible. Cet algorithme est d'autant plus puissant qu'il permet d'évaluer beaucoup plus rapidement le potentiel et ses dérivées sur la surface libre (recherche de la solution du second ordre) car le nombre de groupes de même distances verticales est au moins divisé par deux.

Enfin dans la section 5, des discussions sont portées sur la signification importante de la nouvelle formulation de la fonction de Green et sur l'efficacité de différents algorithmes numériques. L'application de l'Algorithme Vecteur est possible pour le problème d'un navire animé d'une vitesse d'avance.

2. Formulations analytiques de la fonction de Green

Le système de repère avec les coordonnées cylindriques est défini par son origine se situant sur la surface libre non-perturbée et l'axe oz verticalement ascendant. La coordonnée du temps s'écrit à l'aide d'un facteur complexe qui applique à toutes les variables de la même façon : $V(M,t) = \text{Re}\{v(M) \cdot e^{-i\omega t}\}$. La variable réelle $V(M,t)$ est représentée par le complexe $v(M)$, en omettant le facteur $e^{-i\omega t}$. La profondeur d'eau h est supposée constante. La fréquence ω et l'accélération gravitaire g définissent le paramètre $\bar{k} = \omega^2/g$ qui correspond au nombre d'onde en profondeur infinie.

Comme le problème présente manifestement une symétrie de révolution autour de l'axe vertical qui coïncide avec la source, nous supposons que la source est de débit unitaire et centrée sur le point $M'(0,0,z')$ de l'axe oz . Le potentiel $G(M,M')$ de l'écoulement engendré par cette source au point $M(r,\theta,z)$ est donné par la solution du système d'équations différentielles suivant :

$$\nabla^2 G(M,M') = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) G = \delta(r) \delta(z-z') \quad (1a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \bar{k} \right) G(M,M') = 0 \quad \text{sur} \quad z = 0 \quad (1b)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} G(M,M') = 0 \quad \text{sur} \quad z = -h \quad (1c)$$

$$G(M,M') \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad |MM'| \rightarrow \infty \quad (1d)$$

Ces équations peuvent être résolues par la méthode de séparation des variables ou bien par la méthode de la transformation de Fourier (voir [10] [11] dans lesquelles les coordonnées cartésiennes sont utilisées). Nous préférons, ici, la méthode de la transformation de Hankel d'ordre zéro, en raison de sa simplicité dans le cas

d'un problème cylindrique (présence d'une symétrie de révolution).

Pour assurer le respect de la condition de radiation à l'infini, Guével [10] a introduit la notion de fluide "presque parfait" en ajoutant dans l'équation dynamique un terme légèrement dissipatif qui est contrôlé par un paramètre positif infinitésimal. Cet amortissement fictif joue un rôle essentiel, au cours du développement de la formulation, pour choisir le contour d'intégration sur le plan complexe et déterminer le résidu correspondant. Nous appliquons implicitement cette notion dans la formulation de la fonction de Green. L'apparition explicite du paramètre est omise pour la simple raison d'alléger l'écriture.

2.1 Représentation intégrale

Une solution particulière de l'équation (1a) est donnée par : $4\pi G(M, M') = -1/|MM'|$ bien connue et facile à vérifier. En ajoutant un deuxième terme $-1/|MM'_2|$, la solution générale de l'équation (1a) est supposée sous la forme suivante :

$$4\pi G(M, M') = -\frac{1}{|MM'|} - \frac{1}{|MM'_2|} - H(r, z, z') \quad (2)$$

où $M'_2(0, 0, -z'-2h)$ est le point symétrique de $M'(0, 0, z')$ par rapport au fond. La fonction $H(r, z, z')$ est régulière et harmonique dans l'espace ($z \leq 0$) et déterminée avec les conditions aux limites. En introduisant l'expression (2) dans les équations (1a, 1b et 1c), nous obtenons le système des équations suivant :

$$\nabla^2 H = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) H = 0 \quad (3a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \bar{k} \right) H = - \left(\frac{\partial}{\partial z} - \bar{k} \right) (1/|MM'| + 1/|MM'_2|) \quad \text{sur } z = 0 \quad (3b)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} H(r, z, z') = 0 \quad \text{sur } z = -h \quad (3c)$$

Ces équations différentielles peuvent être résolues par la méthode de la transformation de Hankel d'ordre zéro. La transformée de Hankel pour la fonction $H(r, z, z')$ est notée par $\bar{H}(k, z, z')$. Les relations entre les deux fonctions $H(r, z, z')$ et $\bar{H}(k, z, z')$ sont définies avec la fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéro $J_0(kr)$:

$$\bar{H}(k, z, z') = \int_0^\infty H(r, z, z') J_0(kr) r dr \quad \text{et inversement} \quad H(r, z, z') = \int_0^\infty \bar{H}(k, z, z') J_0(kr) k dk \quad (4)$$

Les transformées de Hankel pour $1/|MM'|$ et $1/|MM'_2|$ sont données par :

$$\overline{(1/|MM'|)} = e^{-k|z-z'|}/k \quad \text{et} \quad \overline{(1/|MM'_2|)} = e^{-k(z+z'+2h)}/k \quad (5)$$

Les équations (3a, 3b et 3c) deviennent les équations suivantes pour $\bar{H}(k, z, z')$ après avoir appliqué l'opérateur de la transformation de Hankel :

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \bar{H} = 0 \quad (6a)$$

$$\left(\frac{d}{dz} - \bar{k} \right) \bar{H} = (1 + \bar{k}/k) e^{-\bar{k}h} \text{chk}(z'+h) \quad \text{sur } z=0 \quad (6b)$$

$$\frac{d}{dz} \bar{H} = 0 \quad \text{sur } z = -h \quad (6c)$$

La solution générale de l'équation différentielle ordinaire (6a) est : $\bar{H} = A e^{\bar{k}z} + B e^{-\bar{k}z}$ où A et B sont constantes arbitraires. La condition de glissement sur le fond (6c) montre que $\bar{H} = \bar{H} \text{chk}(z+h)/\text{chk}h$. Enfin, le terme \bar{H} est déterminé par la condition sur la surface libre (6b). Nous obtenons donc :

$$\bar{H}(k, z, z') = \frac{2(1+\bar{k}/k) e^{-\bar{k}h}}{k \text{sh}kh - \bar{k} \text{ch}kh} \text{chk}(z+h) \text{chk}(z'+h) \quad (7)$$

La fonction régulière $H(r, z, z')$ est donnée par la transformation inverse (équation 4). Elle s'écrit par :

$$H(r, z, z') = \int_0^\infty \frac{2(k+\bar{k}) e^{-\bar{k}h}}{k \text{sh}kh - \bar{k} \text{ch}kh} \text{chk}(z+h) \text{chk}(z'+h) J_0(kr) dk \quad (8)$$

Le noyau de cette intégrale présente un pôle simple réel $k = k_0$ et un nombre infini de pôles purement imaginaires $k = ik_m$ avec ($m=1, 2, \dots, \infty$) qui sont définis par l'équation de dispersion :

$$k_0 \text{th}k_0 h = \bar{k} \quad \text{et} \quad k_m \tan k_m h = -\bar{k} \quad \text{pour } m \geq 1 \quad (9)$$

Si nous choisissons un contour d'intégration dans le premier quadrant du plan complexe, la valeur principale de Cauchy de l'intégrale (8) est purement réelle. La partie imaginaire de $H(r, z, z')$ est donnée par le résidu

correspondant au pôle simple $k=k_0$. La fonction régulière est finalement écrite par :

$$H(r, z, z') = VP \int_0^{\infty} \frac{2(k+\bar{k})e^{-kh}}{kshkh - \bar{k}chkh} chk(z+h)chk(z'+h)J_0(kr) dk + \frac{i4\pi k_0}{2k_0h + sh2k_0h} chk_0(z+h)chk_0(z'+h)J_0(k_0r) \quad (10)$$

La partie imaginaire de $H(r, z, z')$ est donc explicite et facile à calculer numériquement. En remplaçant $H(r, z, z')$ (équation 10) dans l'expression (2), la fonction de Green en profondeur d'eau finie est représentée sous la forme suivante :

$$4\pi G(M, M') = 4\pi(G_R + iG_I) \quad (11)$$

avec la partie réelle de la fonction de Green qui est donnée par :

$$G_R = -\frac{1}{|MM'|} - \frac{1}{|MM'_2|} - VP \int_0^{\infty} \frac{2(k+\bar{k})e^{-kh}}{kshkh - \bar{k}chkh} chk(z+h)chk(z'+h)J_0(kr) dk \quad (12)$$

et la partie imaginaire par :

$$G_I = -\frac{4\pi k_0}{2k_0h + sh2k_0h} chk_0(z+h)chk_0(z'+h)J_0(k_0r) \quad (13)$$

Si nous faisons tendre la profondeur d'eau h vers l'infini, les expressions (12) et (13) donnent les deux parties de la fonction de Green en profondeur d'eau infinie :

$$G_R = -\frac{1}{|MM'|} - VP \int_0^{\infty} \frac{k+\bar{k}}{k-\bar{k}} e^{-k|z+z'|} J_0(kr) dk \quad \text{et} \quad G_I = -2\pi k_0 e^{-k_0|z+z'|} J_0(k_0r) \quad (14)$$

Nous retrouvons les mêmes expressions pour la fonction de Green en profondeur finie et en profondeur infinie que celles énoncées dans la synthèse de Wehausen et Laitone [21] (équations 13.18 et 13.17").

2.2 Représentation en série de fonctions de Bessel

Une représentation en série de fonctions de Bessel a été obtenue par John [13]. Il était parti de la représentation intégrale dont le noyau était développé en série de fonctions fractionnelles. La fonction de Green était obtenue en faisant l'intégration terme par terme. Avec une modification de la forme des coefficients, la représentation en série de John s'écrit :

$$4\pi G = \frac{-i4\pi k_0}{2k_0h + sh2k_0h} chk_0(z+h)chk_0(z'+h)H_0(k_0r) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8k_0}{2k_mh + \sin 2k_mh} \cos k_m(z+h) \cos k_m(z'+h) K_0(k_m r) \quad (15)$$

Dans cette expression (15), H_0 est la fonction de Hankel de premier espèce et K_0 la fonction de Bessel modifiée. La même expression a été trouvée dans [11] en utilisant la méthode de séparation des variables. Cette formulation explicite de la fonction de Green est très intéressante puisque le terme dans la série infinie décroît exponentiellement avec la variable $k_m r$. En analysant l'équation de dispersion (9), nous avons en effet :

$$\frac{m-1}{2}\pi \leq k_m h \leq m\pi \quad \rightarrow \quad K_0(k_m r) = O(e^{-m\pi r/h}) \quad (16)$$

Il est facile à vérifier que moins de 5 termes sont suffisants pour avoir une précision de 6 décimales, lorsque le rapport r/h est supérieur à l'unité. Quand ce rapport est petit, non seulement plus de termes sont nécessaires mais aussi la formule est divergente pour $r/h = 0$. Dans ce cas, nous préférons développer une nouvelle formulation à partir de la représentation intégrale.

2.3 Nouvelle formulation

Comme la partie imaginaire de la fonction de Green (13) ne pose aucune difficulté dans l'évaluation numérique, seule la partie réelle (12) est considérée ici. Dans la suite, la valeur principale de Cauchy est prise pour les expressions intégrales (le symbole "VP" étant omis). Nous analysons d'abord le noyau $F(k, r, z, z')$ de l'intégrale dans l'expression (12). En explicitant le produit $chk(z+h)chk(z'+h)$ par une somme d'exponentielles, il peut s'écrire :

$$F(k, r, z, z') = \frac{e^{kh}}{2chkh} \frac{k+\bar{k}}{kthkh - \bar{k}} \left(e^{k(z+z')} + e^{-k(4h+z+z')} + e^{-k(2h+z-z')} + e^{-k(2h-z+z')} \right) J_0(kr) \quad (17)$$

Nous pouvons définir un facteur $f(k, h) = (e^{kh}/2chkh)[(k+\bar{k})/(kthkh - \bar{k})]$ dont la limite est égale à l'unité lorsque k tend vers l'infini. Cette expression du noyau nous incite à extraire les termes de type Rankine. En effet, 4 points symétriques de M' par rapport à la surface libre et au fond sont définis comme suit :

$$M'_1(0, 0, -z'), \quad M'_3(0, 0, z' - 2h), \quad M'_4(0, 0, z' + 2h) \quad \text{et} \quad M'_5(0, 0, -z' - 4h) \quad (17-)$$

En introduisant les transformées inverses de Hankel pour $1/|MM'_1|, 1/|MM'_3|, 1/|MM'_4|$ et $1/|MM'_5|$,

l'expression suivante est obtenue :

$$G_R = - \frac{1}{|MM'|} - \sum_{j=1}^5 \frac{1}{|MM'_j|} - \int_0^{\infty} [f(k, h) - 1] (e^{-k(z+z')} + e^{-k(4h+z+z')} + e^{-k(2h+z+z')} + e^{-k(2h-z+z')}) J_0(kR) dk \quad (18)$$

Maintenant nous introduisons dans l'expression précédente (18) les variables adimensionnelles suivantes :

$$R = r/h, \quad Z_p = -(z+z')/h, \quad Z_M = -(z-z')/h \quad \text{et} \quad H = k_0 h \quad (19)$$

et faisons le changement de la variable d'intégration k en multipliant par k_0 . Nous obtenons une autre expression qui peut être regroupée de la façon suivante :

$$G_R = -R_n(M, M') - 2k_0 (G_p(R, Z_p, H) + G_M(R, Z_M, H)) \quad (20)$$

avec une partie évidente de Rankine qui est indépendante de la fréquence de houle :

$$R_n(M, M') = \frac{1}{|MM'|} + \sum_{j=1}^5 \frac{1}{|MM'_j|} \quad (21)$$

et une partie régulière dépendant de la fréquence de houle composée d'une fonction "plus" qui est définie par :

$$G_p(R, Z_p, H) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [f(k, H) - 1] (e^{-kHZ_p} + e^{-kH(4-Z_p)}) J_0(kR) dk \quad \text{avec} \quad f(k, H) = \frac{e^{kH}}{2chkh} \frac{k+thH}{kthkH-thH} \quad (22)$$

et d'une fonction "moins" qui s'écrit par :

$$G_M(R, Z_M, H) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [f(k, H) - 1] (e^{-kH(2-Z_M)} + e^{-kH(2+Z_M)}) J_0(kR) dk \quad (23)$$

D'après les définitions de Z_p et Z_M (19), il est évident que les intervalles de variation sont $[0, 2]$ pour Z_p et $[-1, 1]$ pour Z_M . Une identité entre la fonction "plus" G_p et la fonction "moins" G_M est trouvée lorsque la variable Z_p est dans $[1, 2]$:

$$G_p(R, Z_p, H) = G_M(R, 2-Z_p, H) \quad \text{pour} \quad 1 \leq Z_p \leq 2 \quad (24)$$

L'expression (23) de la fonction "moins" possède une propriété de symétrie par rapport à $Z_M = 0$:

$$G_M(R, -Z_M, H) = G_M(R, Z_M, H) \quad (25)$$

Pour $0 \leq Z_p \leq 1$, les termes dans l'expression intégrale de G_p sont réorganisés sous la forme : $G_p = g_p + thH\bar{G}$ avec les définitions suivantes :

$$g_p = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left\{ [f(k, H) - 1] e^{-kH(4-Z_p)} + \left(f(k, H) - \frac{k+thH}{k-thH} \right) e^{-kHZ_p} \right\} J_0(kR) dk \quad (26)$$

et :

$$\bar{G} = \int_0^{\infty} \frac{1}{k-thH} e^{-kHZ_p} J_0(kR) dk = \int_0^{\infty} \frac{1}{k-1} e^{-k\bar{Z}} J_0(k\bar{R}) dk \quad (27)$$

où la deuxième expression intégrale de \bar{G} (27) est obtenue par le changement de la variable d'intégrale k en multipliant par thH . Dans cette expression, \bar{Z} et \bar{R} sont définies à l'aide du nombre d'onde \bar{k} : $\bar{Z} = \bar{k}|z+z'|$ et $\bar{R} = \bar{k}r$. En effet, $\bar{G}(\bar{R}, \bar{Z})$ est la partie régulière de la fonction de Green en profondeur d'eau infinie.

Quand la variable d'intégration k tend vers l'infini, les limites de deux facteurs dans les expressions (23) et (26) sont données ici :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [f(k, H) - 1] = O(2thH/k) \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left(f(k, H) - \frac{k+thH}{k-thH} \right) = O(2e^{-kH}) \quad (28)$$

Les noyaux dans les expressions (23) et (26) pour $G_M(R, Z_M, H)$ et $g_p(R, Z_p, H)$ décroissent donc à l'ordre inférieur ou égal à $O(e^{-kH})$, lorsque k tend vers l'infini. Cela signifie que l'évaluation numérique de ces intégrales de borne demie ouverte est aisée pour ce qui concerne la convergence et l'estimation de l'erreur de troncature.

Finalement, la partie régulière de la fonction de Green qui dépend de la fréquence de houle s'exprime :

$$G_p(R, Z_p, H) + G_M(R, Z_M, H) = \begin{cases} g_p(R, Z_p, H) + G_M(R, Z_M, H) + thH \cdot \bar{G}(\bar{R}, \bar{Z}) & 0 \leq Z_p < 1 \\ G_M(R, 2-Z_p, H) + G_M(R, Z_M, H) & 1 \leq Z_p \leq 2 \end{cases} \quad (29)$$

En plus du terme de Rankine (21), la fonction de Green ainsi formulée comprend deux fonctions régulières et un terme s'identifiant à la fonction de Green en profondeur infinie. Cette dernière est appelée une seule fois au cas

où la somme de la coordonnée verticale du point M et celle du point M' est inférieure à la profondeur d'eau.

3. Approximations de la fonction de Green

Le problème de l'approximation fonctionnelle est classique pour les ordinateurs digitaux et essentielle lorsqu'une fonction est calculée en nombre très élevé. C'est le cas de la fonction de Green qui est développée avec les représentations intégrales (équations 23, 26 et 27). En s'inspirant des travaux de Newman [15], on a choisi la méthode de l'approximation polynomiale de Tchebychev. Cette méthode est souvent utilisée pour approcher des fonctions à une seule variable. L'extension pour des fonctions à plusieurs variables est obtenue par Chen [5] et résumée ici dans la section 3.1. L'important, avec cette méthode, est que la fonction approchée doit se comporter assez régulièrement sur les plages de variation. Une régularité suffisante assure que les coefficients dans la série polynomiale décroissent rapidement avec les ordres des polynômes. Pour ceci, il est nécessaire d'extraire les singularités de la fonction approchée et de les représenter analytiquement. Pour les deux fonctions (23 et 26) de la partie régulière de la fonction de Green en profondeur d'eau finie, ce travail est fait dans la section 2.3. Leur évaluation numérique et approximation sont décrites dans la section 3.2. Pour la fonction de Green en profondeur infinie (équation 27), des analyses supplémentaires sont nécessaires et présentées dans la section 3.3.

3.1 Approximation polynomiale de Tchebychev d'une fonction à n variables

Soit $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction à n variables. Son développement en série des polynômes de Tchebychev $T_{k_j}(x_j)$ d'ordre k_j ($j=1, 2, \dots, n$) est écrite sous la forme suivante :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} C_{k_1, k_2, \dots, k_n} T_{k_1}(x_1) T_{k_2}(x_2) \dots T_{k_n}(x_n) \quad (30)$$

En utilisant la propriété d'orthogonalité des polynômes, les coefficients de la série peuvent être obtenus par :

$$C_{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{2^{n-\delta_{k_1}-\delta_{k_2}-\dots-\delta_{k_n}}}{\pi^n} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \dots \int_{-1}^1 \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n) T_{k_1}(x_1) T_{k_2}(x_2) \dots T_{k_n}(x_n)}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2) \dots (1-x_n^2)}} dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (31)$$

où les symboles δ_{k_j} sont définis tels que $\delta_{k_j} = 1$ pour $k_j = 0$ avec ($j=1, 2, \dots, n$) et que $\delta_{k_j} = 0$ partout ailleurs. En faisant le changement de variables $x_j = \cos \alpha_j$ avec ($j=1, 2, \dots, n$), l'équation (31) devient :

$$C_{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{2^{n-\delta_{k_1}-\delta_{k_2}-\dots-\delta_{k_n}}}{\pi^n} \int_0^\pi \int_0^\pi \dots \int_0^\pi f(\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \dots, \cos \alpha_n) \cos(k_1 \alpha_1) \cos(k_2 \alpha_2) \dots \cos(k_n \alpha_n) d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_n \quad (32)$$

Les coefficients de la série (30) sont donc calculés par les intégrales multiples (32) qui peuvent être évaluées à l'aide d'une quadrature numérique.

Les polynômes orthogonaux de Tchebychev ont la propriété remarquable que leurs valeurs varient entre les valeurs minimale (-1) et maximale (+1). La contribution de chaque terme dans la série (30) est donc bornée par la valeur du coefficient correspondant. Pour une série convergente, les coefficients doivent décroître avec une certaine vitesse. La série peut donc être tronquée aux ordres où la somme des coefficients correspondants aux ordres supérieurs est inférieure à la tolérance demandée.

Les polynômes de Tchebychev satisfont une relation récursive :

$$T_{k+1}(x) = 2x T_k(x) - T_{k-1}(x) \quad \text{avec} \quad T_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad T_1(x) = x \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (33)$$

L'algorithme établi en tenant compte de cette relation récursive est efficace pour le calcul de la série tronquée (avec les ordres N_1, N_2, \dots, N_n) de (30). Nous pouvons aussi la convertir en série de polynômes ordinaires :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{N_1} \sum_{k_2=0}^{N_2} \dots \sum_{k_n=0}^{N_n} P_{k_1, k_2, \dots, k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \quad (34)$$

Les coefficients P_{k_1, k_2, \dots, k_n} sont calculés à partir des coefficients C_{k_1, k_2, \dots, k_n} par la relation suivante :

$$P_{k_1, k_2, \dots, k_n} = \sum_{l_1=k_1}^{N_1} \sum_{l_2=k_2}^{N_2} \dots \sum_{l_n=k_n}^{N_n} C_{l_1, l_2, \dots, l_n} \lambda_{l_1, k_1} \lambda_{l_2, k_2} \dots \lambda_{l_n, k_n} \quad (35)$$

où les coefficients de transformation λ_{l_j, k_j} sont définis par :

$$\lambda_{0,0} = 1; \quad \lambda_{l_j, k_j} = 0 \quad \text{si} \quad (l_j + k_j) \text{ est impair} \quad \text{sinon} \quad \lambda_{l_j, k_j} = (-1)^{\lfloor \frac{l_j - k_j}{2} \rfloor} 2^{k_j - 1} \left(l_j \lfloor \frac{l_j + k_j}{2} \rfloor - 1 \right)! / \left(\lfloor \frac{l_j - k_j}{2} \rfloor! k_j! \right) \quad (36)$$

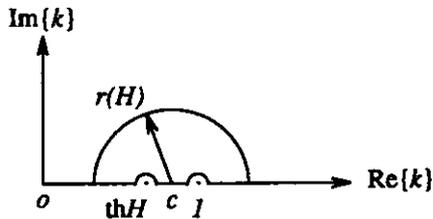
ici $\lfloor (l_j \pm k_j)/2 \rfloor$ signifie qu'on prend la valeur entière la plus grande inférieure à $(l_j \pm k_j)/2$. La forme (34) de la

série polynômiale est particulièrement intéressante du point de vue de calcul des dérivées de la fonction approchée et de mise en oeuvre numérique (schéma de Hörner). L'Algorithme Vecteur est aussi fondé sur cette représentation.

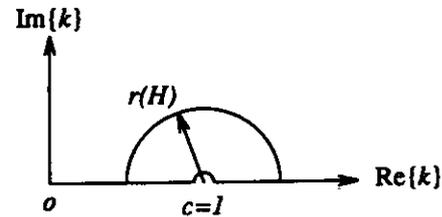
3.2 Evaluation numérique des $g_P(R,Z,H)$ et $G_M(R,Z,H)$ et leurs approximations

Comme $k=1$ est un pôle simple réel dans l'expression de $f(k,H)$ (équation 22), c'est aussi un pôle dans les noyaux des équations (26) et (23) respectives pour $g_P(R,Z,H)$ et $G_M(R,Z,H)$. Un pôle réel supplémentaire $k=thH$ se présente dans le noyau de l'équation (26) pour $g_P(R,Z,H)$. En plus, il y a un nombre infini de pôles purement imaginaires dans ces deux noyaux. Cette situation nous indique que le contour d'intégration ne peut pas passer entièrement par l'axe réel ni par l'axe imaginaire. Une possibilité est de définir un contour d'intégration en passant dans un quadrant entre les deux axes du plan complexe. L'intégration analytique pourrait être formidable vis-à-vis de la complexité des noyaux. L'intégration numérique n'est pas possible puisque les noyaux oscillent de plus en plus vite lorsque la variable k ($\text{Im}\{k\} \neq 0$) tend vers l'infini.

En tenant compte des expressions (28), nous pouvons éventuellement intégrer en suivant l'axe réel excepté aux pôles autour desquels un contour d'intégration est défini dans le premier quadrant du plan complexe. Les contours d'intégration pour $g_P(R,Z,H)$ et $G_M(R,Z,H)$ sont représentés dans les figures ci-dessous :



Contour d'intégration pour $g_P(R,Z,H)$



Contour d'intégration pour $G_M(R,Z,H)$

Pour les deux intégrales, le contour d'intégration se compose donc de trois fractions : de $k=0$ à $k=c-r$, de $k=c+r$ à l'infini et l'arc $k=c+re^{i\theta}$ avec θ de 0 à π . Pour $g_P(R,Z,H)$, l'intégrale (26) s'écrit ici par :

$$g_P(R,Z,H) = \frac{1}{2} \left(\int_0^{c-r} + \int_{c+r}^{\infty} \right) \left\{ [f(k,H) - 1] e^{-kH(4-Z)} + \left(f(k,H) - \frac{k+thH}{k-thH} \right) e^{-kHZ} \right\} J_0(kR) dk + \bar{g}_P \quad (37)$$

avec la définition de \bar{g}_P qui s'écrit à l'aide de $k=c+re^{i\theta}$ dans le noyau de l'intégrale suivante :

$$\bar{g}_P = i\pi [\text{Res}(k=1) + \text{Res}(k=thH)] - \frac{i}{2} \int_0^{\pi} \left\{ [f(k,H) - 1] e^{-kH(4-Z)} + \left(f(k,H) - \frac{k+thH}{k-thH} \right) e^{-kHZ} \right\} J_0(kR) r e^{i\theta} d\theta \quad (38)$$

La borne de troncature de la deuxième intégrale dans l'expression (37) est facilement déterminée par l'analyse asymptotique du noyau (cf. 28). L'intégration dans les deux intervalles bornés sans aucune singularité est effectuée numériquement en double précision en utilisant une méthode standard de quadrature.

Quelques précautions sont nécessaires pour calculer l'intégrale dans l'expression (38). La variable k étant complexe, la valeur du noyau peut osciller surtout pour H grand. Aussi nous avons défini le rayon de l'arc tel que : $r=c$ pour $H \leq 2$ et $r=2c/H$ quand $H > 2$. La fréquence d'oscillation du noyau reste ainsi presque constante. La méthode de Gauss est retenue pour l'évaluation numérique de cette intégrale. En plus du test de convergence de l'intégrale, un contrôle supplémentaire de la précision est que la partie imaginaire totale de \bar{g}_P (équation 38) y comprise les valeurs des résidus doit être nulle. Des tests montrent que le calcul en utilisant de 10 à 20 points de Gauss donne une précision de 10^{-10} et que moins de 50 points de Gauss sont suffisants pour diminuer la valeur de la partie imaginaire de \bar{g}_P à 10^{-15} .

Suivant le même principe, la fonction $G_M(R,Z,H)$ est évaluée numériquement en double précision à l'aide du contour d'intégration spécifié par : $r=0.5$ pour $H \leq 1$ et $r=0.5/H$ quand $H > 1$.

Les deux fonctions ainsi calculées sont illustrées sur la dernière page. La figure de gauche présente les surfaces (de haut en bas) de $2+g_P(R,Z,H)$ pour les valeurs de $H=1.5, 1.2, 1.0, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6$ et 0.5 . La figure de droite présente les surfaces (de haut en bas) de $2+G_M(R,Z,H)$ pour les valeurs de $H=2.0, 1.5, 1.2, 1.0, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6$ et 0.5 . Les intervalles de R et Z sur les figures sont de 0.0 à 1.0. Les deux fonctions sont bien régulières. Ceci suggère qu'elles pourront être approchées par des séries polynômiales.

Les approximations pour $g_P(R,Z,H)$ et $G_M(R,Z,H)$ sont obtenues en utilisant la méthode exposée dans la section 3.1 pour une fonction à trois variables. Comme la dérivée par rapport à R des deux fonctions est nulle pour $R=0$, nous pouvons supposer que les fonctions sont symétriques par rapport à $R=0$. Seuls les ordres pairs des

polynômes de Tchebychev correspondants à la variable R sont donc retenus (de même pour ceux correspondants à la variable Z de $G_M(R, Z, H)$ - identité 25). Pour la variable H , plusieurs partitions sont nécessaires. La transformation de la variable H dans l'intervalle $[H_{\min}, H_{\max}]$ en une autre $t(H)$ dont la variation est entre $[-1, 1]$ peut être définie par :

$$t(H) = \frac{2H}{H_{\max} - H_{\min}} - \frac{H_{\max} + H_{\min}}{H_{\max} - H_{\min}} \quad \text{pour } H_{\max} \text{ finie sinon } t(H) = 1 - \frac{2H_{\min}}{H} \quad (39)$$

Les deux séries polynômiales de Tchebychev sont sous les formes suivantes :

$$g_P(R, Z, H) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{Pijk} T_{2i}(R) T_j(2Z-1) T_k(t(H)) \quad G_M(R, Z, H) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_{Mijk} T_{2i}(R) T_j(Z) T_k(t(H)) \quad (40)$$

Les coefficients sont obtenus par la formule (32). Les intégrales multiples sont calculées en utilisant la formule du trapèze. De 16 à 20 points dans chaque intégration sont largement suffisants pour la convergence en double précision.

Les séries sont tronquées aux ordres (N_i, N_j, N_k) et transformées en séries polynômiales ordinaires. Les expressions finales de $g_P(R, Z, H)$ et $G_M(R, Z, H)$ sont données par :

$$g_P(R, Z, H) = \sum_{i=0}^{N_i} \sum_{j=0}^{N_j} \sum_{k=0}^{N_k} P_{Pijk} R^{2i} Z^j t^k(H) \quad G_M(R, Z, H) = \sum_{i=0}^{N_i} \sum_{j=0}^{N_j} \sum_{k=0}^{N_k} P_{Mijk} R^{2i} Z^{2j} t^k(H) \quad (41)$$

Les coefficients P_{Pijk} et P_{Mijk} sont calculés par l'identité (35). Notons que pour $R > 1$ la formulation de John (15) est utilisée. Sept intervalles pour la variable de la profondeur $H = k_0 h$ sont définies ainsi : [0.1, 0.5], [0.5, 2.0], [2.0, 5.0], [5.0, 10], [10, 20], [20, 50] et [50, ∞). Les ordres des séries polynômiales sont tronqués : $N_i = 4$, $N_j = 5$ pour $g_P(R, Z, H)$, $N_i = 5$, $N_j = 4$ pour $G_M(R, Z, H)$ et N_k variant de 8 à 14 selon l'intervalle de H . L'erreur maximale de troncature est de l'ordre de 10^{-6} .

3.3 Approximation de la fonction $\bar{G}(\bar{R}, \bar{Z})$

La fonction de Green en profondeur d'eau infinie $\bar{G}(\bar{R}, \bar{Z})$ (expression 27) analysée et ses formulations développées par Noblesse [17] [18] forment une base ici pour les approximations polynômiales. En effet, la fonction de Green de Noblesse se décompose en trois composantes : une partie de Rankine, une partie décrivant la vague lointaine qui est facile à évaluer numériquement et une partie non-oscillante de vague proche qui s'éteint rapidement au loin. A partir des trois représentations intégrales de Haskind, de "near-field" et de "far-field", la partie non-oscillante de la fonction de Green est écrite avec cinq expressions dans cinq sous-domaines différents : le développement asymptotique pour un point au loin de la source, une série ascendante pour un point proche de la source, deux séries complémentaires de Taylor respectives pour des points proches de l'axe horizontal (\bar{R}) et de l'axe vertical (\bar{Z}), et une approximation numérique pour un point situant au milieu du domaine où aucun des quatre développements précédents ne s'y adapte. Cette méthode réalisée informatiquement [20] permet d'évaluer la fonction de Green avec une très bonne efficacité.

Afin d'homogénéiser les expressions pour les différentes composantes de la fonction de Green en profondeur d'eau finie, de faciliter la mise en oeuvre informatique et de permettre le développement des algorithmes puissants, la fonction de Green en profondeur d'eau infinie est aussi approchée par les séries polynômiales. Deux formulations sont retenues pour représenter la fonction $\bar{G}(\bar{R}, \bar{Z})$:

$$\bar{G}(\bar{R}, \bar{Z}) = -2e^{-\bar{Z}} J_0(\bar{R}) \left[\ln \frac{(\bar{R}^2 + \bar{Z}^2)^{1/2} + \bar{Z}}{2} + \gamma \right] + e^{-\bar{Z}} S(\bar{R}, \bar{Z}) \quad (42)$$

pour $(0 \leq \bar{R} \leq 2 \text{ et } 0 \leq \bar{Z} \leq 4)$ et :

$$\bar{G}(\bar{R}, \bar{Z}) = -2\pi e^{-\bar{Z}} \bar{H}_0(\bar{R}) + S(\bar{R}, \bar{Z}) \quad \text{ailleurs} \quad (43)$$

où $\gamma = 0.577215\dots$ est la constante d'Euler et $\bar{H}_0(\bar{R})$ est la fonction de Struve d'ordre zéro. La limite logarithmique lorsque $(\bar{R}^2 + \bar{Z}^2)^{1/2}$ tend vers zéro, est représentée analytiquement dans l'expression 42 (cf. [17]). Au loin de la source, la valeur du potentiel tend vers $-\pi e^{-\bar{Z}} [\bar{Y}_0(\bar{R}) + \bar{H}_0(\bar{R})]$ la fonction de vague lointaine qui est approchée par la partie analytique de l'expression (43). En effet, $S(\bar{R}, \bar{Z})$ représente le complément qui varie relativement lentement et peut être approché par les séries polynômiales en utilisant la méthode d'approximation (section 3.1) pour une fonction à deux variables.

Les formulations analytiques de Noblesse [17] sont utilisées pour calculer la partie $S(\bar{R}, \bar{Z})$ de la fonction de Green en double précision. L'approximation de $S(\bar{R}, \bar{Z})$ nécessite plusieurs partitions le long des deux axes \bar{R} et \bar{Z} de façon à conserver le même nombre de termes polynômiaux sans changer la précision de troncature. Au

total 52 partitions déterminées par des tests numériques sont : $\bar{R} = (0,1,2,3,4,6,9,15,\infty)$ pour $\bar{Z} = (0,1,2,3,4)$, $\bar{R} = (0,2,4,6,9,15,\infty)$ pour $\bar{Z} = (4,6,9)$ et $\bar{R} = (0,4,9,15,\infty)$ pour $\bar{Z} = (9,15,\infty)$. Les ordres de termes polynômiaux dans chaque sous-domaines sont 6×6 pour une erreur de troncature égale à l'ordre de 10^{-6} .

4. Algorithmes numériques

L'avantage de l'approximation fonctionnelle par les séries polynômiales est de transformer la représentation complexe d'une fonction en une somme des termes polynômiaux dont les variables sont séparées. Cette séparation des variables permet d'évaluer la fonction avec une grande efficacité. Les séries en sommes triples (R,Z,H) (41) pour la partie régulière de la fonction de Green en profondeur finie peuvent être réduites à celles en sommes doubles (R,Z) , en faisant l'opération suivante :

$$g(R,Z,H) = \sum_{i=0}^{N_i} \sum_{j=0}^{N_j} \left(\sum_{k=0}^{N_k} P_{ijk} \cdot t^k(H) \right) \cdot R^{2i} \cdot Z^j = \sum_{i=0}^{N_i} \sum_{j=0}^{N_j} B_{ij} \cdot R^{2i} \cdot Z^j \quad \text{avec} \quad B_{ij} = \sum_{k=0}^{N_k} P_{ijk} \cdot t^k(H) \quad (44)$$

Les nouveaux coefficients B_{ij} sont calculés d'abord en dehors des sommes pour (R,Z) , à une fréquence de houle et une profondeur d'eau donnée. La fonction de Green sous la forme de séries en sommes doubles doit normalement être appelée $N_f \times N_f$ fois (N_f étant le nombre de facettes sur la surface du corps) pour la solution du premier ordre et $N_s \times N_s$ fois (N_s étant le nombre de facettes sur la surface libre) pour la solution du second ordre.

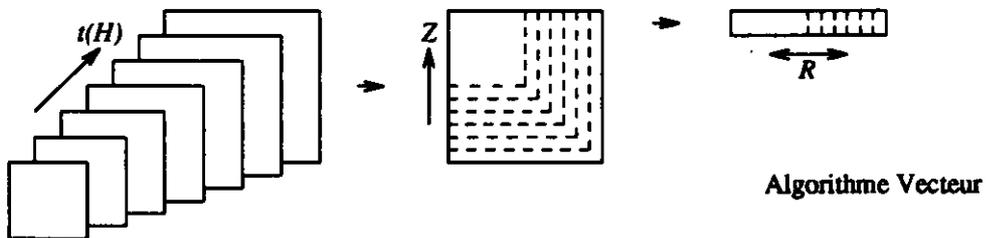
Un pas en avant peut être fait afin de réduire ces sommes doubles en sommes simples :

$$g(R,Z) = \sum_{i=0}^{N_i} \left(\sum_{j=0}^{N_j} B_{ij} \cdot Z^j \right) \cdot R^{2i} = \sum_{i=0}^{N_i} A_i \cdot R^{2i} \quad \text{avec} \quad A_i = \sum_{j=0}^{N_j} B_{ij} \cdot Z^j \quad (45)$$

ici les nouveaux coefficients A_i sont calculés en dehors de la boucle sur R , pour un groupe de facettes dont la coordonnée verticale Z reste constante. De plus, la valeur d'un polynôme à une seule variable peut être obtenue par le schéma de Höner :

$$g(R) = \sum_{i=0}^{N_i} A_i \cdot R^{2i} = (((\dots (A_{N_i} \cdot R^2 + A_{N_i-1}) \cdot R^2 + \dots + A_1) \cdot R^2 + A_0) \quad (46)$$

Cet algorithme numérique comprend donc trois étapes qui pourront être illustrées par les figures ci-dessous :



Les coefficients des séries polynômiales à trois variables sont représentés comme une matrice tri-dimensionnelle (une série de matrices bi-dimensionnelles, la figure de gauche ci-dessus). A la première étape, il est évident de calculer une nouvelle matrice bi-dimensionnelle (équation 44) en introduisant la variable H qui reste constante pour la suite du calcul. D'habitude, nous utilisons cette matrice obtenue des coefficients pour évaluer la fonction de Green autant de fois que le carré du nombre de facettes. Par contre, si les facettes sont classées en groupes dans lesquelles nous avons les mêmes coordonnées verticales (en Z_p et Z_M , cf. 19), nous pouvons, en deuxième étape, calculer les nouveaux coefficients pour chaque groupe de facettes. Ces nouveaux coefficients sont sous forme d'un vecteur et utilisés, en troisième étape, pour calculer la fonction de Green en fonction des coordonnées horizontales seulement. Cet algorithme numérique dit "Vecteur" qui transforme une matrice de coefficients tri-dimensionnelle sous forme d'un vecteur augmente l'efficacité du calcul. Un calcul simple montre que le gain théorique de cet algorithme est proportionnel à $2N_j$, le nombre de termes polynômiaux pour la variable verticale.

L'application pratique de cet algorithme est encourageante car les maillages couramment utilisés contiennent souvent des groupes de facettes dont les coordonnées verticales sont les mêmes. Le classement géométrique des facettes suivant leurs coordonnées verticales est effectué une seule fois avant d'entrer à l'étape du calcul où nous appelons la fonction de Green. L'Algorithme Vecteur est directement appliqué au calcul en ce qui concerne les parties représentées par les séries polynômiales (expression 41 pour $g_p(R,V_p,H)$ & $G_M(R,V_M,H)$ et $S(\bar{R},\bar{Z})$ dans 42 et 43).

Comme montrée par l'expression (43), la fonction de Green contient des fonctions élémentaires telles que les fonctions exponentielle et de Struve. Ces fonctions élémentaires peuvent aussi être exprimées par les séries polynômiales ou rationnelles dont le calcul est simple et rapide. L'Algorithme Vecteur est applicable puisque les calculs correspondant aux deux variables sont séparés.

Quand le point de calcul est proche de la source ($0 \leq \bar{R} \leq 2$ et $0 \leq \bar{Z} \leq 4$), la fonction de Green (expression 42) contient non seulement les fonctions exponentielle et de Bessel qui peuvent être évaluées de la même façon que pour celles de l'expression (43), mais aussi un terme logarithmique dont les variables ne sont pas séparées. Dans ce cas, ce terme logarithmique est écrit sous la forme suivante :

$$\ln \frac{(\bar{R}^2 + \bar{Z}^2)^{1/2} + \bar{Z}}{2} + \gamma = \left(\ln \frac{\bar{k}}{2} + \gamma \right) + \bar{R}_n(r, z, z') \quad \text{avec} \quad \bar{R}_n(r, z, z') = \ln \left(\sqrt{r^2 + (z+z')^2} + |z+z'| \right) \quad (47)$$

où le terme $\bar{R}_n(r, z, z')$ qui ne dépend plus de la fréquence de houle peut être calculé en même temps que la partie de Rankine (21). Ces termes $R_n(M, M')$ (21) et $\bar{R}_n(r, z, z')$ (47) sont calculés, en effet, une seule fois pour toutes les fréquences de houle puisqu'ils ne dépendent que de la géométrie de la carène.

En plus de la singularité de Rankine, ce terme $\bar{R}_n(r, z, z')$ confirme qu'une singularité de type logarithmique existe dans la partie régulière de la fonction de Green, lorsque le point de calcul s'approche de la source qui se situe près de la surface libre ($z' \rightarrow 0$). Il suggère donc que le calcul des coefficients d'influence pour un point sur la ligne de flottaison nécessite quelques précautions afin d'éviter des erreurs numériques. Pour la partie de Rankine, la formule (21) nous permet d'évaluer les coefficients d'influence en faisant l'intégration sur une surface totale composée de celle de la facette et de sa symétrie par rapport à la surface libre plutôt que sur les deux surfaces séparément. La singularité dans les formules [9] obtenues par la transformation d'une intégrale sur la facette en une autre sur le contour de celle-ci, est ainsi évitée. Pour le terme $\bar{R}_n(r, z, z')$ (47), la quadrature numérique de Gauss en un point (souvent utilisée dans la pratique, comme pour les autres termes sous forme des séries polynômiales) ou en 5 points donne d'une bonne précision puisque la singularité logarithmique est moins forte par rapport à celle de Rankine.

5. Discussions et conclusions

Nous avons développé, à partir de la représentation intégrale de la fonction de Green en profondeur d'eau finie, une nouvelle formulation qui contient une partie de Rankine, deux fonctions régulières et la fonction de Green en profondeur infinie. Les deux fonctions régulières et la fonction de Green en profondeur infinie sont ensuite approchées par des séries polynômiales à trois variables (41) et à deux variables (42 et 43) respectivement. Les expressions obtenues (21, 41, 42 et 43) sont explicites du comportement des différentes composantes de la fonction : la singularité, la partie oscillatoire et les compléments qui varient relativement lentement. Cette décomposition a une signification importante non seulement pour l'explication de l'écoulement physique mais aussi pour la recherche d'une méthode de calcul de la fonction de Green qui soit efficace. Il s'agit naturellement d'utiliser des algorithmes numériques adaptés aux différents termes de la fonction.

La partie de Rankine et le terme représentant la singularité logarithmique lorsque le point de calcul et la source sont à la fois proches l'un de l'autre et de la surface libre, sont calculées indépendamment. Les résultats pour cette partie de la fonction de Green dont la variation ne dépend que de la géométrie de la carène, sont stockés et utilisés pour la suite du calcul.

La partie dépendant de la fréquence de houle est représentée par des séries polynômiales principalement et par des fonctions élémentaires faciles à calculer. L'Algorithme Vecteur est développé pour évaluer cette partie de la fonction de Green. Cet algorithme demande quelques calculs préliminaires pour classer les facettes en groupe. Sa mise en oeuvre informatique n'est pas simple mais conduit à un gain important du temps de calcul. Dans le cas du problème du second ordre où il est nécessaire de modéliser la carène du corps de façon très fine faisant ainsi intervenir un nombre très élevé de facettes, cet algorithme est un atout puissant pour la résolution complète du problème.

Les dérivées par rapports aux variables r et z peuvent être obtenues, d'une façon simple, à partir de ces expressions d'approximation (par dérivations directes des termes polynômiaux). En général, un terme supplémentaire de troncature est nécessaire dans les séries polynômiales afin d'avoir la même précision (6 décimales) pour les dérivées que pour la fonction elle-même. Cette méthode permet d'évaluer la fonction et ses dérivées en utilisant les mêmes coefficients des séries polynômiales.

L'Algorithme Vecteur convient très bien à la vectorisation des calculs sur les super-ordinateurs. Cet algorithme est en effet fondé sur l'idée de classer ensemble les calculs qui ont des opérations similaires et de les exécuter simultanément dans une boucle vectorisée, d'autant plus efficace que les polynômes dans chaque sous-domaine

ont les mêmes ordres de troncature.

La méthode de tabulation consiste à établir les tableaux de la fonction de Green et ses dérivées et à effectuer les calculs en faisant l'interpolation entre les valeurs des tableaux. Cette méthode est connue comme rapide, malgré le compromis entre la taille des tableaux ($4 \times 46 \times 328 = 60\,352$ par Delhommeau [8] et $2 \times 251 \times 801 = 402\,102$ par Ba & al. [2]) et la précision d'interpolation. Si l'Algorithme Vecteur n'est pas utilisé, la comparaison du temps d'exécution entre la méthode de tabulation et la méthode des séries polynômiales n'est pas toujours évidente puisqu'elle dépend essentiellement, pour un ordinateur particulier, de la vitesse de l'opération sur les flottants par rapport aux accès à la mémoire. Le temps de calcul des polynômes (45) pourrait être comparable au temps nécessaire à la recherche des valeurs dans les tableaux et à leur interpolation. Toutefois, la méthode des séries polynômiales présente les avantages suivants :

- La formulation de la fonction de Green en profondeur finie contient une seule fonction de Green en profondeur infinie au lieu de 4 dans [11] et [15]. La performance de l'algorithme permet donc d'évaluer la fonction de Green en profondeur finie presque aussi rapidement que celle pour la fonction de Green en profondeur infinie.
- Elle permet d'avoir des options de choix entre la précision d'approximation et les ordres des polynômes. Les deux fonctions régulières de la fonction de Green en profondeur finie sont approchées avec une précision de 6 décimales. Cette précision n'était pas possible en utilisant l'approximation par une série finie d'exponentielles [7].
- Elle permet d'avoir des options de compromis entre le nombre de sous-domaines partitionnés et les ordres des polynômes. Les coefficients pour les polynômes dont les ordres sont choisis entre 5 à 6, sont au nombre d'environ 4 900 pour la fonction de Green en profondeur finie et 1 720 pour celle en profondeur infinie respectivement.
- A priori, l'Algorithme Vecteur exposé dans la section 4 est plus efficace pour les séries polynômiales que pour l'interpolation utilisée dans la méthode de tabulation.

Une précision de 2 à 3 décimales est suffisante dans la pratique. Mais nous savons que le modèle courant peut contenir plusieurs milliers de facettes pour la solution du premier ordre et qu'un modèle d'une dizaine de milliers de facettes est nécessaire pour la solution du second ordre (encore rare dans la pratique d'ingénierie). Une précision de 6 décimales n'est pas excessive pour les valeurs des calculs intermédiaires (les éléments des matrices des systèmes linéaires). En outre, une bonne précision de la fonction de Green est indispensable pour tout type de test numérique.

Dans le problème de diffraction et radiation du premier ordre, la résolution des systèmes linéaires venant de la discrétisation des équations intégrales est un autre gros consommateur de temps de calcul. Les matrices de ces systèmes contiennent les coefficients d'influence qui sont calculés en faisant l'intégration de la fonction de Green et de ses dérivées sur les facettes puis stockés en mémoire sur disque. La résolution des équations est obtenue par la méthode d'élimination de Gauss ou par une méthode d'itération (ex. celle de gradient bi-conjugué) pour les systèmes de taille importante. Nous avons remarqué que la mise en équation (remplissage de la matrice des équations) prend autant de temps (voire plus dans certains cas) que la résolution des équations elles-mêmes. Une alternative consistant à calculer les coefficients d'influence au moment du remplissage de la matrice au lieu de faire l'accès à la mémoire sur disque, est possible avec notre algorithme. Le temps du calcul devrait être comparable. Mais le gain de coût en terme d'occupation des disques de mémoire est considérable si un grand système linéaire est en jeu. Cette économie serait plus significative si la méthode alternative était combinée avec un solveur itératif.

L'application de l'Algorithme Vecteur est possible pour tout calcul qui accepte une approximation polynômiale ou faisant intervenir des fonctions à variables séparées. Le cas le plus clair est celui du problème d'un navire animé d'une vitesse d'avance. La fonction de Green dépend alors des trois variables de coordonnées cartésiennes (une seule symétrie est possible dans le plan coïncidant avec la direction de route). La discrétisation de la carène peut être faite par tranches transversales de telle sorte que toutes les facettes d'une même tranche aient la même dimension dans la direction longitudinale. Les centres des facettes d'une même tranche ont ainsi la même coordonnée longitudinale. Le nombre de calculs dans chaque tranche de facettes est réduit à une somme double correspondant aux variables verticales et transversales après avoir effectué un seul calcul sur la variable longitudinale pour toutes les facettes de la même tranche.

Il est clair que l'intérêt principal de la nouvelle formulation de la fonction de Green et de l'Algorithme Vecteur correspondant réside dans la perspective des solutions des problèmes d'ordres supérieurs (la solution du potentiel du second ordre, voire la solution pour les efforts du troisième ordre). Ceci fait partie des objectifs de développement de notre programme HYDROSTAR.

6. Remerciements

Je tiens à remercier toute l'équipe de DTO pour son amical soutien et ses encouragements qui m'ont permis d'accomplir ce développement pendant une période sur-chargée de travail.

7. Bibliographie

- [1] **M. Abramowitz et I.A. Stegun** 1972 : "Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables" Dover publication, INC.
- [2] **M. Ba, B. Ponzi et F. Noblesse** 1992 : "Calculation of the Green function of water-wave diffraction and radiation" Proceedings of the Second ISOPE, pp60-63.
- [3] **X.B. Chen** 1988 : "Etude des réponses du second ordre d'une structure soumise à une houle aléatoire" Thèse de Doctorat de l'ENSM, Université de Nantes.
- [4] **X.B. Chen et B. Molin** 1991 : "Calcul des efforts du deuxième ordre à très hautes fréquences sur des plate-formes à lignes tendues" Actes des 3èmes Journées de l'Hydrodynamique, Grenoble (France).
- [5] **X.B. Chen** 1991 : "Free surface Green function and its approximation by polynomial series" Rapport de recherche du Bureau Veritas N° 641 DTO/XC.
- [6] **R. Cointe** 1989 : "Quelques aspects de la simulation numérique d'un canal à la houle" Thèse de Doctorat de l'ENPC.
- [7] **J.C. Daubisse** 1984 "Sur quelques méthodes numériques spécifiques de l'hydrodynamique navale" Thèse de Doctorat ès Sciences, ENSM.
- [8] **G. Delhommeau** 1989 "Amélioration des performances des codes de calcul de diffraction-radiation au premier ordre" Acte des 2èmes Journées de l'Hydrodynamiques, Nantes (France), pp69-88.
- [9] **P. Guével** 1976 "Corps solide animé d'un mouvement quelconque dans un fluide illimité" Cours de l'ENSM.
- [10] **P. Guével** 1981 "Diffraction-radiation en profondeur finie" Cours de l'ENSM.
- [11] **P. Guével, G. Delhommeau et J.C. Daubisse** 1982 : "Détermination de l'action de la houle sur une structure - problème de diffraction-radiation" Cours de l'ENSM.
- [12] **R.H.M. Huijsmans et A.J. Hermans** 1985 : "A fast algorithm for computation of 3-D ship motions at moderate forward speed" 4th Intl Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics.
- [13] **F. John** 1950 : "On the motion of floating bodies II : simple harmonic motions" Communications on Pure and Applied Mathematics. Vol.1, pp45-101.
- [14] **B. Molin** 1979 : "Second order diffraction loads upon three-dimensional bodies" Applied Ocean Research. Vol.1, pp197-202.
- [15] **J.N. Newman** 1985 : "Algorithms for the free-surface Green function" J. Engg. Math. Vol.19, pp57-67.
- [16] **J.N. Newman** 1990 : "The approximation of free-surface Green function" Retirement Meeting for Professor F.J. Ursell, Manchester.
- [17] **F. Noblesse** 1982 : "The Green function in the theory of radiation and diffraction of regular water waves by a body" J. Engg. Math. Vol.16, pp137-169.
- [18] **F. Noblesse** 1983 : "Integral identities of potential theory of radiation and diffraction of regular water waves by a body" J. Engg. Math. Vol.17, pp1-13.
- [19] **J. Nossen, J. Grue et E. Palm** 1991 : "Wave forces on three-dimensional floating bodies with small forward speed" J. Fluid Mech. Vol.227, pp135-160.
- [20] **J.G. Telste et F. Noblesse** 1985 : "Numerical evaluation of the Green function of water wave radiation and diffraction" Journal of Ship Research Vol.30, pp69-84.
- [21] **J.V. Wehausen et E.V. Laitone** 1960 : "Surface waves" Encyclopedia of Physics.

