4e JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE

1, 2, 3 mars 1993 - Nantes

PERTURBATION DES RESONANCES POUR LE PROBLEME DE TENUE A LA MER LINEARISE

J-M. QUENEZ et C. HAZARD
Laboratoire de Simulation et Modélisation
des phénomènes de Propagation

Résumé

Nous nous intéressons au problème de diffraction d'une houle incidente par un corps fixe reposant sur une mer de profondeur infinie. On démontre la continuité des résonances lorsque l'on perturbe le problème. Dans deux cas de perturbations régulières, nous montrons la continuité des résonances par rapport à un petit paramètre de perturbation. Dans le premier cas, on perturbe une condition frontière. Dans le deuxième cas, on distord analytiquement la carène. Dans un deuxième temps, une perturbation singulière est traitée: le cas du résonateur. Les résonances convergent alors vers les valeurs propres intérieures et les résonances extérieures.

Summary

We are concerned by the study of the motions of the fluid when a fixed body is subject to an incident wave in the case of infinite depth. We state the continuity of the scattering values when we perturb the problem. We study two regular perturbations: in a first case, we perturb a boundary condition; then, we distord analyticaly the hull of the body. A singular perturbation is also studied: the case of the resonator. The scattering values tend towards the inside eigenvalues and the outside scattering values.

Introduction

Nous nous intéressons au problème de diffraction d'une houle incidente par un corps fixe reposant sur une mer de profondeur infinie. Les résonances sont des quantités caractéristiques du problème. Elles peuvent être définies lorsque l'on considère le régime périodique établi. Ce sont alors les fréquences complexes pour lesquelles le problème est mal posé. On démontre la continuité des résonances lorsque l'on perturbe le problème. Dans deux cas de perturbations régulières, nous montrons la continuité des résonances par rapport à un petit paramètre de perturbation. Dans le premier cas, on perturbe une condition frontière; celà nous permet de suivre continûment les résonances issues des valeurs propres du problème posé dans un bassin. Dans le deuxième cas, on distord analytiquement la carène; la continuité est obtenue par rapport à la géométrie du problème. Dans un deuxième temps, une perturbation singulière est traitée: le cas du résonateur. Dans ce cas la géométrie est une paroi se repliant autour d'un domaine intérieur. Lorsqu'elle se referme, elle sépare brusquement le domaine intérieur d'un domaine extérieur. Nous nous contentons de présenter ici le cas du probléme avec des conditions de Dirichlet sur la frontière. Les résonances convergent alors vers les valeurs propres intérieures et les résonances extérieures.

Notations

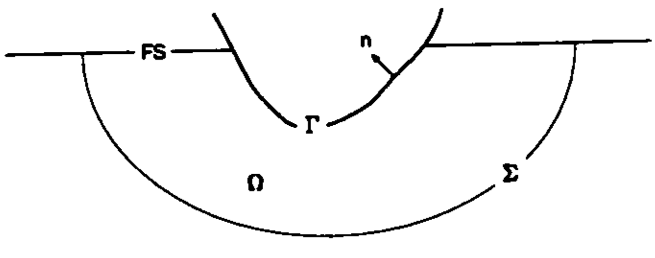
Soit $\mathcal{O}$ un domaine. Le produit de dualité dont la restriction à L_2 est le produit scalaire dans $L_2(\mathcal{O})$ sera noté $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{O}}$. Le produit scalaire dans $H_1(\mathcal{O})$ est noté $\langle\ ,\ \rangle_{1,\mathcal{O}}$.

Nous noterons les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x_i}$ sous forme condensé ∂_{x_i}. De même, la dérivée normale sur la frontière du domaine considéré sera notée ∂_n.

Soit $\mathbf{C}^+$ l'ensemble des ν de partie imaginaire strictement positive.

I) Définition des résonances du problème de tenue à la mer

Considérons un corps rigide $(\mathcal{C})$ fixe sur une mer de profondeur infinie. Nous noterons (x_1, x_2) les coordonnées horizontales et x_3 la coordonnée verticale. Le système au repos est constitué du domaine fluide Ω_r de frontière Γ la carène du corps $(\mathcal{C})$ et FS_r la surface libre au repos (d'équation $x_3 = 0$). n est la dérivée normale sur $\partial\Omega_r$.



On étudie le régime périodique établi, i.e., les mouvements périodiques du corps soumis à une houle incidente de fréquence ω. Nous voulons déterminer le potentiel diffracté Φ. Φ est solution du problème suivant (on note $\nu = \omega^2/g$ où g est la gravité).

La donnée g caractérise les forces extérieures dues à l'onde incidente.

$$(1.1)\quad \begin{cases} (a) & \Delta\Phi = 0 & \text{dans } \Omega \\ (b) & \partial_n\Phi - \nu\Phi = 0 & \text{sur FS} \\ (c) & \partial_n\Phi = g & \text{sur } \Gamma \\ (d) & \displaystyle\int_{\Sigma_R} \left|\frac{\partial\Phi}{\partial n} - i\nu\Phi\right|^2 d\Sigma_R \xrightarrow[R\ \to\ \infty]{} 0 & \text{condition de rayonnement} \end{cases}$$

Σ_R est un cylindre vertical entourant strictement le corps de diamètre R.

Pour définir les résonances du problème, la démarche suivie est la suivante. Dans un premier temps, nous définissons un problème équivalent posé en domaine borné. On utilise la méthode de couplage formulation variationnelle-représentation intégrale due à Jami and Lenoir [5]. Puis, nous étendons ce problème équivalent aux fréquences complexes. Nous formulons le problème sous forme de l'étude d'un opérateur dépendant de ν. Nous ramenons le problème à un problème aux valeurs propres. Les résonances sont les ν pour lesquels il existe une valeur propre nulle. Donnons maintenant davantage de détails.

Tout d'abord, le problème équivalent posé en domaine borné est défini. Soit Σ une surface entourant strictement le corps $(\mathcal{C})$. Ω est le domaine fluide intérieur à Σ.FS est la surface libre intérieur. On définit maintenant le problème intérieur posé dans le domaine borné Ω :
Trouver φ telle que $\mathbf{Q}_\nu$ soit vérifié:

$$\mathbf{Q}_\nu(g)\quad \begin{cases} & (a) \text{ dans } \Omega \quad (b) \text{ sur FS} \quad (c) \text{ sur } \Gamma \\ (d') & D_\mu\varphi(M) = \displaystyle\int_\Gamma (\varphi(P)\partial_{n_P}G^\mu_\nu(M,P) - g(P)G^\mu_\nu(M,P))\,d\Gamma(P) \text{ sur } \Sigma \end{cases}$$

G_ν est l'unique fonction de Green du problème satisfaisant la condition de rayonnement pour tout ν strictement positif. La condition intégrale (d') vient du théorème de représentation intégrale (obtenu grâce à la formule de Green):

$$(1.2)\qquad \Phi(M) = \int_\Gamma (\Phi(P)\partial_{n_P}G_\nu(M,P) - \partial_{n_P}\Phi(P)G_\nu(M,P))\,d\Gamma(P),\ \forall M \in \Omega.$$

En appliquant l'opérateur $D_\mu = \frac{\partial}{\partial_n}_{|\Sigma} - \mu Id$ où μ est un complexe fixé tel que $Im(\mu) > 0$, nous obtenons l'équation:

$$\mathcal{D}_\mu\Phi(M) = \int_\Gamma (\Phi(P)\partial_{n_P}G^\mu_\nu(M,P) - \partial_{n_P}\Phi(P)G^\mu_\nu(M,P))\,d\Gamma(P),\ \forall M \in \Omega.$$

On a posé $G^\mu_\nu = D_\mu G_\nu$ (voir M.Vullierme-Ledard [2] chap1.2). On remplade $\partial_{n_P}\Phi$ par la donnée g sur la carène Γ et on obtient l'équation (d').

Une importante propriété relie la solution Φ du problème initial à la solution φ de $\mathbf{Q}_\nu$: si Φ est solution du problème initial, sa restriction au domaine borné Ω est solution de $\mathbf{Q}_\nu$; si φ est solution de $\mathbf{Q}_\nu$, son prolongement à Ω_r par la formule intégrale (1.2) est solution du problème initial.

Dans un deuxième temps, nous étendons le problème aux fréquences complexes. Nous définissons le problème $\mathbf{Q}_\nu$ avec ν dans $\mathbf{C}$ par les mêmes équations; (d') peur être défini grâce à l'analyticité de G_ν (voir Vullierme-Ledard [2]). $\mathbf{Q}_\nu$ est bien posé pour tout

ν dans $\mathbf{C}^+$ sauf sur un ensemble discret $\Re_\mu$ de points de $\mathbf{C}^+$ sans point d'accumulation dépendant de μ.

Dans un troisième temps, on définit le problème sous forme opérateur. La formulation variationnelle de $\mathbf{Q}_\nu$ s'écrit de la façon suivante:

$$\mathbb{R}(\varphi) - \nu\mathbf{M}(\varphi) + \mathbf{T}_\nu(\varphi) = \mathcal{F}_\nu(g). \tag{1.3}$$

On a posé pour tout ψ dans $H_1(\Omega)$

$$\langle \mathbb{R}\varphi, \psi \rangle_1 = \langle \nabla\varphi, \nabla\psi \rangle_\Omega$$

la forme bilinéaire correspondant au terme de rigidité et $\mathbb{R}$ l'opérateur de rigidité associé dans $\mathcal{L}(H_1(\Omega))$;

$$\langle \mathbf{M}\varphi, \psi \rangle_1 = \langle \varphi, \psi \rangle_{FS}$$

est la forme bilinéaire correspondant au terme de masse et $\mathbf{M}$ est l'opérateur de masse associé dans $\mathcal{L}(H_1(\Omega))$;

$$\langle \mathbb{T}_\nu\varphi, \psi \rangle_1 = \mu\langle \varphi, \psi \rangle_\Sigma - \left\langle \int_\Gamma \varphi(P)\partial_{n_P} G_\nu^\mu(.,P)\, d\Gamma(P), \psi \right\rangle_\Sigma$$

est le terme bilinéaire frontière et $\mathbb{T}_\nu$ est l'opérateur associé dans $\mathcal{L}(H_1(\Omega))$;

$$\langle \mathcal{F}_\nu(g), \psi \rangle_1 = \langle g, \psi \rangle_\Gamma + \left\langle \int_\Gamma g(P) G_\nu^\mu(.,P)\, d\Gamma(P), \psi \right\rangle_\Sigma$$

est le terme linéaire associé à la donnée g. On définit $\mathbb{J}$ comme étant $\mathbb{R} + \mathbf{M}$. C'est un automorphisme de $H_1(\Omega)$. Posons $\mathbf{K}(\nu)$ égal à $-(1+\nu)\mathbf{M} + \mathbf{T}_\nu$. $\mathbf{K}(\nu)$ est compact. Nous avons:

$$\mathbb{J} + \mathbf{K}(\nu) = \mathbb{R} - \nu\mathbf{M} + \mathbf{T}_\nu. \tag{1.4}$$

C'est un opérateur de Fredholm d'indice zéro. Il est donc inversible si et seulement si il est surjectif et celà est vérifié si et seulement si $\mathbf{Q}_\nu$ est bien posé.

Nous pouvons maintenant poser la définition des résonances. La proposition fondamentale suivante est une application du Théorème de Steinberg [12] (voir pour plus de détails Hazard [1] ou Vullierme-Ledard [2]).

Proposition 1.1 :
L'opérateur $(\mathbb{J} + \mathbf{K}(\nu))^{-1}$ qui associe à la donnée $\mathcal{F}_\nu$ la solution de $\mathbf{Q}_\nu$ est bien défini pour tout ν dans $\mathbf{C}^+$. Il est analytique et admet un prolongement méromorphe dans $\{\nu \in \mathbf{C}; Im(\nu) \leq 0\}$. Les pôles sont les ν pour lesquels le problème homogène admet une solution non nulle:

$$\exists\varphi \neq 0; (\mathbb{J} + \mathbf{K}(\nu))(\varphi) \ = \ 0 \tag{1.5}$$

Nous noterons $\mathcal{R}_\nu$ pour $(\mathbb{J} + \mathbf{K}(\nu))^{-1} \circ \mathcal{F}_\nu$. $\mathcal{R}_\nu$ associe à la donnée g la solution de $\mathbf{Q}_\nu(g)$. $\mathcal{R}_\nu$ est méromorphe et admet les mêmes pôles que $(\mathbb{J} + \mathbf{K}(\nu))^{-1}$.Nous avons ramener l'étude à celle des zéros de l'opérateur $\mathbb{J} + \mathbf{K}(\nu)$.

Definition :
Les pôles de $(\mathbb{J}+\mathbb{K}(\nu))^{-1}$ *sont les résonances du problème.*

II) Perturbations régulières

2.1) Perturbation de la condition frontière.

Dans un premier cas, nous perturbons la condition de couplage sur Σ. Dans un premier temps, nous définissons le problème perturbé et l'écrivons sous forme opérateur. Dans un deuxième temps, nous montrons la continuité des résonances et même l'analyticité pour une petite perturbation du problème posé dans un bassin.

Soit le problème $\mathbf{Q}_\nu^\varepsilon$ défini par les mêmes équations que $\mathbf{Q}_\nu$sauf la dernière équation (d') :

$$\mathbf{Q}_\nu^\varepsilon(g)\quad\begin{cases} & (a)\ \text{à}\ (c) \\ (d_\varepsilon) & \partial_n\varphi^\varepsilon = \varepsilon\mu\varphi^\varepsilon + \varepsilon\int_\Gamma(\varphi^\varepsilon(P)\partial_{n_P}G_\nu^\mu(.,P)\,d\Gamma(P) \text{ sur } \Sigma \\ & -\varepsilon\int_\Gamma g(P)G_\nu^\mu(.,P))\,d\Gamma(P)\end{cases}$$

Remarquons que pour $\varepsilon=1$, $\mathbf{Q}_\nu^1=\mathbf{Q}_\nu$ est le problème initial et que pour $\varepsilon=0$, $\mathbf{Q}_\nu^0$ est le problème posé dans un bassin.Comme pour le problème non perturbé, nous écrivons la formulation variationnelle sous forme opérateur:

$$\mathbb{R}(\varphi^\varepsilon)-\nu\mathbf{M}(\varphi^\varepsilon)+\varepsilon\mathbf{T}_\nu(\varphi^\varepsilon)=\mathcal{F}_\nu^\varepsilon(g) \tag{1.6}$$

Tous les termes sont définis dans le premier chapitre sauf $\mathcal{F}_\nu^\varepsilon(g)$ qui est tel que pour tout ψ dans $H_1(\Omega)$

$$\langle\mathcal{F}_\nu^\varepsilon(g),\psi\rangle_1=\langle g,\psi\rangle_\Gamma+\varepsilon\left\langle\int_\Gamma g(P)G_\nu^\mu(.,P)\,d\Gamma(P),\psi\right\rangle_\Sigma.$$

On définit:

$$\mathbb{J}=\mathbb{R}+\mathbf{M},$$

$$\mathbf{K}(\nu,\varepsilon)=-(\nu+1)\mathbf{M}+\varepsilon\mathbf{T}_\nu$$

si bien que

$$\mathbb{J}+\mathbf{K}(\nu,\varepsilon)=\mathbb{R}-\nu\mathbf{M}+\varepsilon\mathbf{T}_\nu. \tag{1.7}$$

Les valeurs de résonance de $\mathbf{Q}_\nu^\varepsilon$ sont les pôles de $(\mathbb{J}+\mathbf{K}(\nu,\varepsilon))^{-1}$.Ceux sont les valeurs de ν pour lesquelles le problème homogène $\mathbf{Q}_\nu^\varepsilon(g=0)$ admets une solution non nulle:

$$\exists\varphi^\varepsilon\neq 0;(\mathbb{J}+\mathbf{K}(\nu,\varepsilon))(\varphi^\varepsilon)=0 \tag{1.8}$$

Nous devons résoudre $\lambda(\nu,\varepsilon)=0$ où $\lambda(\nu,\varepsilon)$ est une valeur propre de $\mathbb{J}+\mathbf{K}(\nu,\varepsilon)$.

Lemma 1.1:
(i) $\mathbb{J}$ *est un automorphisme de* $H_1(\Omega)$.

(ii) $\mathbf{K}(\nu,\varepsilon)$ *est compact. C'est un opérateur fortement analytique par rapport aux deux variables* ν *et* ε.

Les résonances sont les pôles de $(\mathbb{J}+\mathbf{K}(\nu,\varepsilon))^{-1}$ où plutôt ceux de $(\mathbf{I}+\mathbb{J}^{-1}\mathbf{K}(\nu,\varepsilon))^{-1}$ où $\mathbb{J}^{-1}\mathbf{K}(\nu,\varepsilon)$ est compact et analytique par rapport aux deux variables ν et ε.

Lemma 1.2:

$\mathbf{I}+\mathbb{J}^{-1}\mathbf{K}(\nu,\varepsilon)$ *est inversible pour tout* ν *tel que* $Re(\nu) = a \in \mathbb{R}^{+*}$ *fixé et tel que* $Im(\nu) \geq C(a)$ *où* $C(a)$ *est choisi assez grand.*

Proposition 1.1: *Les résonances sont continues en fonction de* ε. *Si* ν_0 *est une résonance de* $\mathbf{Q}_\nu^{\varepsilon_0}$, *alors, il existe une résonance* $\nu(\varepsilon)$ *de* $\mathbf{Q}_\nu^\varepsilon$ *dans un voisinage de* ν_0 *et il existe un* $p \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\nu(\varepsilon)$ *est analytique par rapport à* $(\varepsilon-\varepsilon_0)^{\frac{1}{p}}$ *dés que* ε *est voisin de* ϵ_0.

La preuve repose sur le Théorème de Steinberg, le lemme 1.1 et 1.2.

Proposition 1.2: *Si* ν_0 *est une racine simple de* (1.8) *pour* $\varepsilon_0 = 0$, *alors il existe un unique pôle* $\nu(\varepsilon)$ *au voisinage de* ν_0, *analytique par rapport à* ε *en* $\varepsilon = 0$.

Remarque: ν_0 est une racine simple de (1.8) signifie que pour $\varepsilon = 0$ et $\nu = \nu_0$, zéro est une valeur propre simple de $\mathbf{I}-\mathbb{J}^{-1}\mathbf{K}(\nu_0,0)$.

Pour calculer numériquement les résonances de $\mathbf{Q}_\nu$, on doit résoudre une équation non linéaire $\lambda(\nu)=0$ ($\lambda(\nu)$ est valeur propre de $\mathbb{J}+\mathbf{K}(\nu)$). On désire trouver de bonnes valeurs initiales pour résoudre cette équation (par une méthode de point fixe par exemple). Pour en trouver, on utilise le problème perturbé $\mathbf{Q}_\nu^\varepsilon$. On calcule les valeurs propres du corps $(\mathcal{C})$ fixe dans le bassin Ω; puis, on utilise ces valeurs comme valeurs initiales pour calculer les résonances de $\mathbf{Q}_\nu^\varepsilon$ pour ε petit; on utilise alors ces nouvelles valeurs pour calculer les résonances pour ε plus grand; on réitère jusqu'à atteindre 1. Nous avons suivi les valeurs de résonance d'un problème de tenue à la mer qui viennent du problème posé dans un bassin. Pour ce dernier problème, étant auto-adjoint, des programmes classiques de recherche de valeurs propres de matrices symétriques sont disponibles.

2.2) Distortion analytique de la géométrie

Nous avons étudié la stabilité des valeurs de résonance lorsque l'on fait varier la géométrie de la carène. Ici, la perturbation est analytique. La technique due à Hunziker [13] a été utilisée par celui ci pour l'opérateur de Schrodinger des n électrons dans le champs créé par N noyaux fixes. Il a montré la continuité des résonances par rapport aux coordonnées des noyaux. Dans le cas de l'hydrodynamique, nous montrons la continuité par rapport au petit paramètre de perturbation ε. Les géométries distordues sont déterminées par le petit paramètre ε. Les carènes (Γ_ε) sont définies au voisinage de Γ_0 pour des petits ε. Les géométries du domaine fluide (Ω_ε) sont images de la géométrie initiale Ω_0 par un difféomorphisme $\tau(\varepsilon)$, analytique en ε tel que

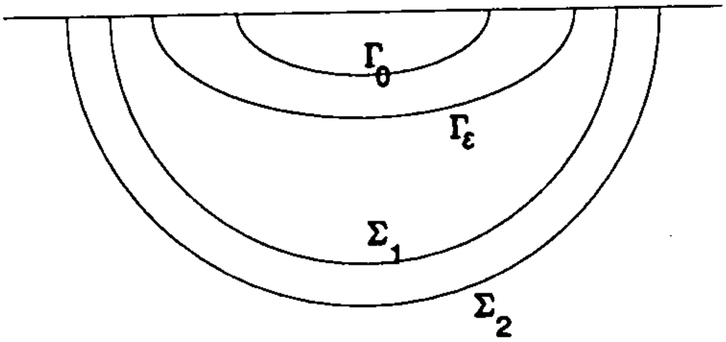
$$\tau(\varepsilon) = Id + v(\varepsilon) \tag{1.14}$$

où $v(\varepsilon)$ est un champ de vecteurs analytique. Pour des ε petits, les arguments précédents conduisent encore au résultat de continuité des résonances en ε.

(notation: $x=(x_1,x_2,x_3)$, $v=(v_1,v_2,v_3)$)

Nous allons perturber le problème $\mathbf{Q}_\nu^0$ associé à la géométrie Γ_0. On omettra l'indice

0 dés qu'il n'y a pas d'ambiguité.



La distortion analytique est définie par un
champ de vecteurs $v(x,\varepsilon)$ à support dans $B(0,R_1)$ uniformément en ε. B est une sphère de centre 0 et de rayon R_1 assez grand pour que toutes les déformations soient dans B. $v(x,\varepsilon)$ est analytique en ε à valeur dans $C_0^\infty(B)$ et vérifie les hypothèses suivantes:

$$\begin{array}{ll} 1) & v(x_1,x_2,0)=0 \\ 2) & v\ L-\text{lipschitz avec } L<1 \\ & \|v(x,\varepsilon)-v(x',\varepsilon)\| \leq L\,\|x-x'\|,\ \forall\varepsilon\in]-\alpha,\alpha[\\ 3) & v_3(x,\varepsilon)=0,\ \forall x;\ x_3=0 \end{array}$$

La carte τ définie par

$$\begin{array}{rccc} \tau: & \Omega_0 & \longrightarrow & \Omega_\varepsilon \\ & x & \longrightarrow & y=x+v(x,\varepsilon) \end{array}$$

est inversible. La différentielle a pour composantes

$$J^\varepsilon_{i,k}(x)=\delta_{i,k}+v_{i;k}(x,\varepsilon)$$

où $v_{i;k}=\partial_k v_i$. Le Jacobien vérifie

$$J^\varepsilon=\left|det(J^\varepsilon_{i,k})\right| \geq (1-L)^3>0$$

si bien que τ est un difféomorphisme C^∞.
Nous posons à la suite de Hunziker [13] les définitions suivantes:
Définition: $U(\varepsilon)$ est l'isomorphisme unitaire associé à τ.

$$\begin{array}{rccc} U(\varepsilon): & L_2(\Omega_\varepsilon=\tau(\Omega_0)) & \longrightarrow & L_2(\Omega_0) \\ & \Psi & \longrightarrow & U(\varepsilon)\Psi=(J^\varepsilon)^{1/2}\Psi\circ\tau \end{array}.$$

Définition: $U(\varepsilon)^{-1}$ est l'isomorphisme unitaire associé à τ^{-1}.

$$\begin{array}{rccc} U(\varepsilon)^{-1}: & L_2(\Omega_0) & \longrightarrow & L_2(\Omega_\varepsilon) \\ & \Psi & \longrightarrow & U(\varepsilon)^{-1}\Psi=((J^\varepsilon)^{-1/2}\Psi)\circ\tau^{-1} \end{array}.$$

Nous définissons maintenant tous les problèmes dans le domaine fixe Ω équivalents à ceux posés dans le domaine $\tau(\Omega)$.

Définition: *$\tilde{\varphi}^\varepsilon$ est solution du problème $\tilde{Q}^\varepsilon_\nu$ défini sur la géométrie fixe Ω si et seulement si $U(\varepsilon)^{-1}\tilde{\varphi}^\varepsilon$ est solution de Q^ε_ν dans $\tau^\varepsilon(\Omega)$.*

Les équations vérifiées par $\tilde{\varphi}^\varepsilon$ sont les suivantes:

$$\tilde{\mathbf{Q}}_\nu^\varepsilon \begin{cases} (a) & T_\varepsilon\tilde{\varphi}^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega \\ (b) & \mathcal{N}_\varepsilon\tilde{\varphi}^\varepsilon - \nu\tilde{\varphi}^\varepsilon = 0 & \text{sur FS} \\ (c) & \mathcal{N}_\varepsilon\tilde{\varphi}^\varepsilon = J'_\varepsilon J_\varepsilon^{-1/2} g \circ \tau & \text{sur } \Gamma \\ (d'') & \partial_n\tilde{\varphi}^\varepsilon(M) = \mu\tilde{\varphi}^\varepsilon + \int_{\Sigma_1} \tilde{\varphi}^\varepsilon(P)\partial_{n_P} G_\nu^\mu(M,P)\, d\Sigma_1(P) & \\ & \qquad - \int_{\Sigma_1} \partial_{n_P}\tilde{\varphi}^\varepsilon(P) G_\nu^\mu(M,P))\, d\Sigma_1(P) & \text{sur } \Sigma_2 \end{cases}$$

Nous choisissons ici deux surfaces Σ_1 et Σ_2 telles que Σ_2 entoure strictement Σ_1 et que celle-ci entoure strictement B la sphère contenant toutes les déformations. L'équation (d'') équivalente à la condition de rayonnement peut être écrite pour le problème $\tilde{\mathbf{Q}}_\nu^\varepsilon$ car les surfaces Σ_1 et Σ_2 sont définies hors de toutes les déformations.

Quelques notations sont nécessaires pour décrire tous les opérateurs intervenant dans les équations de $\tilde{\mathbf{Q}}_\nu^\varepsilon$.On note $\left(J_\varepsilon^{m,k}\right)$ l'inverse de $\left(J_{m,k}^\varepsilon\right)$. Il est clair que ces deux matrices sont analytiques en ε pour des ε dans $]-\alpha,\alpha[$. De même, le Jacobien J_ε ainsi que son inverse sont analytiques. J'_ε est le Jacobien associé à la carte τ', restriction de τ à Γ :

$$\tau'(\varepsilon): \begin{array}{ccc} \Gamma & \longrightarrow & \Gamma_\varepsilon \\ x & \longrightarrow & \tau(x,\varepsilon) \end{array}$$

J'_ε est analytique puisqu'il ne dépend que des dérivées tangentielles de τ à Γ.
Nous définissons l'opérateur de Laplace distordu par:

$$T_\varepsilon = U(\varepsilon)(-\Delta)U(\varepsilon)^{-1}. \tag{1.15}$$

Nous définissons le gradient distordu par:

$$D_\varepsilon = U(\varepsilon)\nabla U(\varepsilon)^{-1}. \tag{1.16}$$

$\mathcal{N}_\varepsilon(X,p)$ est l'opérateur distordu de dérivation normale:

$$\langle\mathcal{N}_\varepsilon(X,p)\varphi,\psi\rangle_\Gamma = \left\langle\partial_n(U(\varepsilon)^{-1}\varphi), U(\varepsilon)^{-1}\psi\right\rangle_{\Gamma_\varepsilon}$$
$$\forall\ \varphi,\psi \in H_1(\Omega)$$

$$\mathcal{N}_\varepsilon = J'_\varepsilon J_\varepsilon^{-1}(n\circ\tau).D_\varepsilon \quad \text{sur } \Gamma \tag{1.17}$$

Sur la surface libre, $J' = J$ si bien que $\mathcal{N}_\varepsilon$ s'écrit plus simplement:

$$\mathcal{N}_\varepsilon = e_3.D_\varepsilon \text{ sur FS} \tag{1.18}$$

Tous ces opérateurs dépendent analytiquement de ε pour ε dans $]-\alpha,\alpha[$.

Nous écrivons également $\tilde{\mathbf{Q}}_\nu^\varepsilon$ sous la forme:

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}^\varepsilon \in H_1(\Omega) \\ \mathbb{R}_\varepsilon(\tilde{\varphi}^\varepsilon) - \nu\mathbf{M}(\tilde{\varphi}^\varepsilon) + \mathbf{T}'_\nu(\tilde{\varphi}^\varepsilon) = \mathcal{F}'_{\varepsilon,\nu}(g) \end{cases} \tag{1.20}$$

où quelque soit ψ appartenant à $H_1(\Omega)$,

$$\langle\mathbb{R}_\varepsilon(\tilde{\varphi}^\varepsilon),\psi\rangle_{1,\Omega} = \langle D_\varepsilon\tilde{\varphi}^\varepsilon, D_\varepsilon\psi\rangle_\Omega$$

est le terme de rigidité dans la formulation variationnelle,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{T}'_\nu(\tilde{\varphi}^\varepsilon), \psi\rangle_{1,\Omega} &= \mu\langle\tilde{\varphi}^\varepsilon, \psi\rangle_{\Sigma_2} \\ &+ \left\langle \int_{\Sigma_1} (\partial_{n_P}\tilde{\varphi}^\varepsilon(P) G^\mu_\nu(.,P) - \tilde{\varphi}^\varepsilon(P)\partial_{n_P} G^\mu_\nu(.,P)\, d\Sigma_1(P), \psi \right\rangle_{\Sigma_2}\end{aligned}$$

définit le nouvel opérateur fronrière,

$$\langle \mathcal{F}'_{\varepsilon,\nu}(g), \psi\rangle_{1,\Omega} = \left\langle J'_\varepsilon J_\varepsilon^{-1/2} g \circ \tau, \psi\right\rangle_\Gamma$$

est le nouveau terme linéaire.

On définit comme au chapitre précédent

$$\begin{cases} \mathbb{J}(\varepsilon) = \mathbb{R}_\varepsilon + \mathbf{M} \\ \mathbf{K}(\nu) = -(\nu+1)\mathbf{M} + \mathbf{T}'_\nu \end{cases}$$

Nous avons ramené le problème à l'étude des zéros de l'opérateur $\mathbb{J}(\varepsilon) + \mathbf{K}(\nu)$.

Lemme 1.5:
(i) $\mathbb{J}(\varepsilon)$ *est un automorphisme de* $H_1(\Omega)$ *pour* ε *dans* $]-\beta, \beta[$.
(ii) $\mathbf{K}(\nu)$ *est compact sur* $H_1(\Omega)$.

Lemma 1.6:
$\mathbb{J}(\varepsilon) + \mathbf{K}(\nu)$ *est inversible dans* $\mathcal{L}(H_1(\Omega))$ *pour tout* ν *tel que* $Im(\nu) > d$ *et pour tout* ε *fixé par le lemme 1.5, et* d *choisi assez grand.*

On obtient alors la proposition 1.2 c'est-à-dire la continuité des résonances en s'appuyant sur le Théorème de Steinberg et les lemmes 1.5 et 1.6.

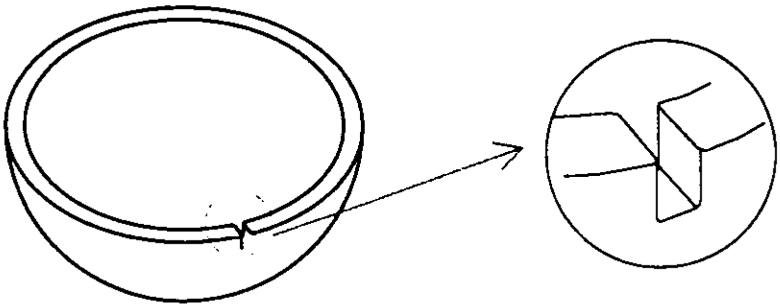
II Le résonateur en hydrodynamique

Nous voulons dans ce chapitre traiter le cas de géométries qui ne peuvent être décrites par un champ de vesteurs analytique. C'est le cas lorsque la déformation est celle d'une surface qui se replie sur elle-même ou bien si elle vient rencontrer la surface libre transversalement. Les arguments précédents ne peuvent plus s'appliquer. On a choisi d'étudier plus particulièrement le cas du résonateur pour lequel l'étude a déjà été menée en acoustique. Beale [3] a démontré la continuité des résonances pour ce problème. Pour simplifier la présentation, nous présentons le problème de l'Hydrodynamique avec des conditions de type Dirichlet plutôt que Neumann sur la surface moulliée. Certains résultats ont déjà été obtenus pour des problèmes voisins. Vullierme-Ledard [9] a étudié la continuité des résonances pour un corps élastique immergé lorsque la profondeur tend vers l'infinie. Martin and Luke [10] ont amélioré ce résultat en montrant que la partie imaginaire d'une résonance tend vers zéro exponentiellement vite en $\frac{1}{d}$ où d est la profondeur du corps immergé.

Dans un premier temps, nous définissons les notations utiles pour poser le problème. En deuxième lieu, nous définissons le problème étudié: après un relèvement de la donnée sur la carène, nous obtenons un problème avec des données dans le fluide et sur la surface libre. Troisièmement, nous définissons le problème limite. Quatrièmement, nous limitons les façons selon lesquelles la géométrie se referme et nous énonçons les résultats.

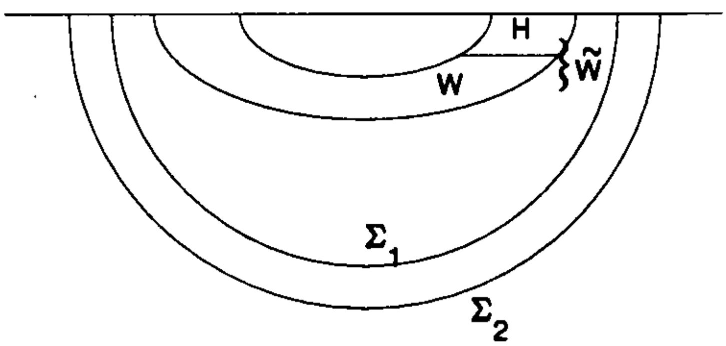
Introduisons les notations pour décrire le problème. Nous choisissons comme au chapitre II.2 deux surfaces Σ_1 et Σ_2 telles que Σ_2 entoure strictement Σ_1 et telles que cette dernière entoure strictement $B(0, R_1)$ la sphere contenant toutes les géométries. $\hat{\Omega}$ est le domaine intérieur compris entre $\{x_3 = 0\}$ et Σ_2.Soit $\tilde{W}$ la géométrie limite des corps (W). $\tilde{W}$ est la paroi d'un bassin. $\tilde{W}$ isole strictement un domaine intérieur $\mathcal{C}$ d'un domaine extérieur $\mathcal{E}$.

$$\hat{\Omega} = \mathcal{C} \cup \tilde{W} \cup \mathcal{E}.$$



Les géométries W sont égales à $\tilde{W} - \bar{\mathcal{H}}$ où $\mathcal{H}$ est un canal qui relie le domaine intérieur au domaine extérieur.

$$\tilde{W} = \overset{\circ}{\overline{W \cup \mathcal{H}}}.$$



Le domaine fluide limité par Σ_2 est noté Ω. Ω comprend le domaine intérieur $\mathcal{C}$, le domaine extérieur $\mathcal{E}$ et le domaine canal $\mathcal{H}$.

$$\Omega = \overset{\circ}{\overline{\mathcal{C} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{E}}}.$$

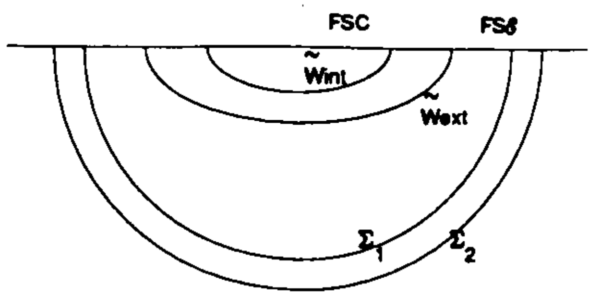
La surface libre intérieure à Σ_2 est notée FS.

$$\mathrm{FS} = \{x_3 = 0\} \cap \bar{\Omega}.$$

On notera FS$\mathcal{C}$ et FS$\mathcal{E}$ respectivement les surfaces libres intérieure et extérieure à $\tilde{W}$. Les surfaces intérieure et extérieure de $\tilde{W}$ sont notées respectivement $\tilde{W}_{int}$ et $\tilde{W}_{ext}$.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \partial\mathcal{C} & = & \mathrm{FS}\mathcal{C} \cup \tilde{W}_{int} \\ \mathrm{FS}\mathcal{C} & = & \{x_3 = 0\} \cap \bar{\mathcal{C}} \\ \tilde{W}_{int} & = & \partial\tilde{W} \cap \bar{\mathcal{C}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \partial\mathcal{E} & = & \mathrm{FS}\mathcal{E} \cup \tilde{W}_{ext} \\ \mathrm{FS}\mathcal{E} & = & \{x_3 = 0\} \cap \bar{\mathcal{E}} \\ \tilde{W}_{ext} & = & \partial\tilde{W} \cap \bar{\mathcal{E}} \end{array} \right.$$



On notera de même FS$\mathcal{H}$ la surface libre du canal $\mathcal{H}$.

$$\mathrm{FS}\mathcal{H} \;=\; \{x_3 = 0\} \cap \bar{\mathcal{H}}$$

Γ désigne la surface mouillée de la paroi W. FS est la surface libre associée au domaine Ω.

$$\mathrm{FS} = \mathrm{FS}\mathcal{C} \cup \mathrm{FS}\mathcal{E} \cup \mathrm{FS}\mathcal{H}$$

Dans un deuxième temps, nous écrivons le problème $\mathbf{Q}_\nu$ avec des données intérieure et sur la surface libre. Le problème $\mathbf{Q}_\nu$ avec condition de type Dirichlet sur la carène s'écrit:

$$\mathbf{Q}_{(\nu,\Omega)}(g)\quad \left\{\begin{array}{llcll} (a) & \Delta\varphi & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ (b) & \partial_n\varphi - \nu\varphi & = & 0 & \text{sur FS} \\ (c) & \varphi & = & g & \text{sur } \Gamma \\ (d'') & \mathcal{D}_\mu\varphi(M) & = & \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\Sigma_1} \varphi(P)\partial_{n_P} G^\mu_\nu(M,P)\, d\Sigma_1(P) \\ \displaystyle -\int_{\Sigma_1} \partial_{n_P}\varphi(P) G^\mu_\nu(M,P)\, d\Sigma_1(P) \end{array}\right. & \text{sur } \Sigma_2 \end{array}\right.$$

où la solution φ appartient à $H_1(\Omega)$ et la donnée g appartient à $H_{1/2}(\Gamma)$.Nous définissons un problème équivalent dans

$$H^1_{0,\Gamma} = \{\varphi \in H_1(\Omega);\ \Phi\,|_\Gamma = 0\}.$$

Soit v un relèvement de g solution unique dans $H_1(\Omega)$ de

$$\left\{\begin{array}{rcll} v & = & g & \Gamma \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} & = & 0 & \mathrm{FS} \\ \Delta v & = & -v & \Omega \end{array}\right.$$

Nous multiplions v par une fonction troncature χ telle que

$$\left\{\begin{array}{ll} \chi = 1 & B(0, R_1) \\ \chi = 0 & \text{hors de } \Sigma_1 \end{array}\right. .$$

$v' = \chi v$ a son support inclu dans Ω_1, le domaine fluide intérieur à Σ_1.
v' est solution de

$$\left\{\begin{array}{rcll} v' & \in & H_1(\Omega) & \\ v' & = & g & \Gamma \\ \dfrac{\partial v'}{\partial n} & = & 0 & \mathrm{FS} \\ \Delta v' & = & f & \Omega \end{array}\right.$$

où la donnée f vérifie

$$\begin{cases} f \in L_2(\Omega) \\ supp(f) \subset \Omega_1 \end{cases} .$$

On pose finalement $u = \Phi - v'$. On note FS_1 la surface libre intérieur à Σ_1.u sera notée φ. Le problème étudié est celui défini par les équations vérifiées par u. Il est noté encore $\mathbf{Q}_{(\nu,\Omega)}$.Il est défini par:
Trouver $\varphi \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ telle que

$$\mathbf{Q}_{(\nu,\Omega)}(f,g) \quad \begin{cases} (a) & \Delta\varphi & = & f & \text{dans } \Omega \\ (b) & \partial_n\varphi - \nu\varphi & = & g & \text{sur FS} \\ (c) & \varphi & = & 0 & \text{sur } \Gamma \\ (d'') & \mathcal{D}_\mu\varphi(M) & = & \begin{cases} \displaystyle\int_{\Sigma_1} \varphi(P)\partial_{n_P} G^\mu_\nu(M,P)\, d\Sigma_1(P) \\ \displaystyle - \int_{\Sigma_1} \partial_{n_P}\varphi(P) G^\mu_\nu(M,P)\, d\Sigma_1(P) \end{cases} & \text{sur } \Sigma_2 \end{cases}$$

où les données (f,g) appartiennent à

$$\mathcal{G} = \{(f,g);\ f \in L_2(\Omega),\ supp(f) \subset \Omega_1,\ g \in L_2(\mathrm{FS}),\ supp(g) \subset \mathrm{FS}_1\}.$$

Dans un troisième temps, nous définissons le problème limite i.e. le problème défini par la géométrie $\tilde{W}$. Ce problème limite est la juxtaposition de deux problèmes, un posé dans le domaine intérieur $\mathcal{C}$, un posé dans le domaine extérieur $\mathcal{E}$.
Le problème posé dans $\mathcal{C}$ s'écrit:
Trouver $\varphi \in H^1_{0,\tilde{W}_{int}}(\mathcal{C})$ telle que

$$\mathbf{Q}_{(\nu,\mathcal{C})}(f,g) \quad \begin{cases} (a) & \Delta\varphi & = & f & \text{dans } \mathcal{C} \\ (b) & \partial_n\varphi - \nu\varphi & = & g & \text{sur FS}\mathcal{C} \\ (c) & \varphi & = & 0 & \text{sur } \tilde{W}_{int} \end{cases}$$

où les données (f,g) appartiennent à $\mathcal{G}_c = \{(f,g);\ f \in L_2(\Omega),\ g \in L_2(\mathrm{FS})\}$.
Le problème posé dans le domaine extérieur $\mathcal{E}$ s'écrit
Trouver $\varphi \in H^1_{0,\tilde{W}_{ext}}(\mathcal{E})$ telle que

$$\mathbf{Q}_{(\nu,\mathcal{E})}(f,g) \quad \begin{cases} (a) & \Delta\varphi & = & f & \text{dans } \mathcal{E} \\ (b) & \partial_n\varphi - \nu\varphi & = & g & \text{sur FS}\mathcal{E} \\ (c) & \varphi & = & 0 & \text{sur } \tilde{W}_{ext} \\ (d'') & \mathcal{D}_\mu\varphi(M) & = & \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\Sigma_1} \varphi(P)\partial_{n_P} G^\mu_\nu(M,P)\, d\Sigma_1(P) \\ \displaystyle - \int_{\Sigma_1} \partial_{n_P}\varphi(P) G^\mu_\nu(M,P)\, d\Sigma_1(P) \end{array} & \text{sur } \Sigma_2 \end{cases}$$

où les données (f,g) appartiennent à

$$\mathcal{G}_e = \{(f,g);\ f \in L_2(\mathcal{E}),\ supp(f) \subset \mathcal{E}_1,\ g \in L_2(\mathrm{FS}\mathcal{E}),\ supp(g) \subset \mathrm{FS}\mathcal{E}_1\}.$$

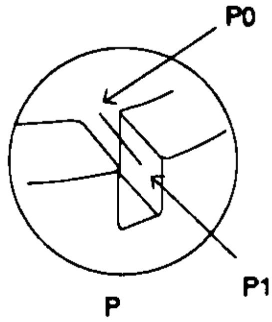
$\mathcal{E}_1$ est le domaine extérieur à $\tilde{W}_{ext}$ et intérieur à Σ_1.
Les valeurs propres de $\mathbf{Q}_{(\nu,\mathcal{C})}$, les résonances de $\mathbf{Q}_{(\nu,\mathcal{E})}$ et celles de $\mathbf{Q}_{(\nu,\Omega)}$ seront appelées respectivement valeurs propres de $\mathcal{C}$, résonances de $\mathcal{E}$ et Ω.

Définition:

$$\mathcal{S} = \{\nu \text{ valeur propre de } \mathcal{C} \text{ ou valeur de résonance de } \mathcal{E}\}$$

Ce sont les valeurs de résonance du problème limite. Lorsque le canal se rétrécit, nous montrons que les résonances tendent vers les résonances limites.

Dans un quatrième temps, nous limitons les façons selon lesquelles le canal se rétrécit. Nous introduisons la classe des canaux de type ε (Beales [3]).



Soit P_0 un point de $\overline{\tilde{W}_{int}} \cap \overline{\mathrm{FS}}$ et P_1 un point de $\overline{\tilde{W}_{ext}} \cap \overline{\mathrm{FS}}$ tels que le segment $]P_0, P_1[$ soit inclus dans $\tilde{W}$ et rencontre les courbes $\overline{\tilde{W}_{int}} \cap \overline{\mathrm{FS}}$ et $\overline{\tilde{W}_{ext}} \cap \overline{\mathrm{FS}}$ transversalement. Tous les canaux sont choisis au voisinage de $[P_0, P_1]$.
Les hypothèses peuvent s'écrirent comme suit:
Soit $\mathcal{P}$ un voisinage du segment $[P_0, P_1]$.On choisit le système de coordonnées de façon à ce que les points P_0 et P_1 aient pour coordonnées $(0,0,0)$ et $(0,0,l)$ avec $l >$ 0respectivement. On choisit de plus la paroi $\tilde{W}$ de façon à ce qu'elle rencontre la surface libre transversalement en P_0 et en P_1. Le voisinage $\mathcal{P}$ est alors choisi suffisemment petit pour que $\tilde{W}$ rencontre la surface libre de façon transverse dans $\mathcal{P}$.

Définition 2.1: *Les domaines fluides admissibles et les canaux associés.*
Ω est un domaine fluide admissible dés que $\mathcal{C} \cup \mathcal{E} \subset \Omega$. Le domaine canal associé est $\mathcal{H} = \Omega \cap \tilde{W}$.

Définition 2.2: *Si $\mathcal{H}$ est le canal associé au domaine Ω admissible,on dira que $\mathcal{H}$ est de type ε si et seulement si*

$$\mathcal{H} \subset \mathcal{P} \cap \{-h < |x_3| < 0\} \cap \{|x_2| < \varepsilon\}$$

$h > 0$ est fixe.

Finalement, énonçons les résultats.

Théorème 2.1: *Pour tout μ dans $\mathcal{S}$, si Nest un voisinage de μ dans $\mathbf{C}$, alors il existe un ε strictement positif tel que:*
$\mathcal{H}$ est de type ε implique qu'il existe une résonance de Ω dans N.

Théorème 2.2:
Soit $\mathbb{E}$ un compact de $\mathbf{C}$ qui est d'intersection vide avec $\mathcal{S}$,alors il existe un ε strictement positif tel que:
$\mathcal{H}$ est de type ε implique qu'il n'existe pas de résonances de Ω dans $\mathbb{E}$.

Bibliographie:

[1] C. HAZARD - *Etudes des résonances pour le problème linéarisé des mouvements d'un navire sur la houle* - Thèse de doctorat de l'université PARIS VI - mai 1991
[2] M. VUILLERME-LEDARD - *Problèmes asymptotiques de l'hydrodynamique navale linéarisée et du couplage fluide-structure* - Rapport de recherche ENSTA n°231 - novembre 1988
[3] J. T. BEALE - *Scattering Frequencies of Resonators* - Communications on pure and applied Mathematics - vol XXVI - p.549-563 - 1973
[4] M. LENOIR - *Méthodes de couplage en hydrodynamique navale et application à la résistance de vague bidimensionnelle* - Rapport de recherche ENSTA n°164 - mai 1982
[5] A. JAMI et M. LENOIR - *A variational formulation for exterior problems in linear Hydrodynamics* - Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. vol 16 p.341-359 - 1978
[6] J. L. LIONS et E. MAGENES - *Problèmes aux limites non-homogènes et applications* - tome 1 - Edition Dunod -
[7] H. S. WEINBERGER - *Variational Methods for eigenvalue approximation* - 15^{th} Conference board of the mathematical sciences - Regional conference in applied Mathematics -
[8] T. KATO - *Perturbation Theory for Linear Operators* - Edition Springer-Verlag -
[9] M. VULLIERME-LEDARD - *Asymptotic Study of the vibration problem for an elastic body deeply immersed in an incompressible fluid* - Mathematic modelling and numerical analysis - vol 19 n°1 - p.145-170 - 1985
[10] P. MARTIN and C. LUKE - *Asymptotic study of scattering frequencies for a coupled system* - 7^{th}international workshop on water waves and floating bodies - Val de Reuil - FRANCE - mai 1992
[11] J.-M. QUENEZ and C. HAZARD - *Perturbation results for the resonances of the sea-keeping problem* - idem - mai 1992
[12] S. STEINBERG - *Meromorphic families of compact operators* - Archives of Rational Mechanical Analysis - vol 31 - p. 372-380 - 1968
[13] W. HUNZIKER - *Distortion analyticity and molecular resonant curves* -