

4e JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE

1, 2, 3 mars 1993 - Nantes

**AMORTISSEMENT DE DERIVE  
POUR UN GROUPE DE CYLINDRES  
EN PROFONDEUR FINIE**

Šime MALENICA, Phil CLARK  
Institut Français du Pétrole, BP 311  
92506 Rueil-Malmaison, France

**Résumé**

On considère ici le problème des mouvements de basse fréquence des structures ancrées. Plus précisément on s'intéresse au calcul de l'amortissement de dérive pour un groupe de cylindres en faible profondeur d'eau. La formulation théorique est basée sur le travail d'Emmerhoff et Sclavounos et permet l'évaluation directe de l'amortissement. D'autre part, en utilisant la méthode proposée par Aranha, on généralise une formule simple du calcul de l'amortissement de dérive, à une profondeur d'eau quelconque. On établit la dépendance explicite de l'amortissement de dérive sur la profondeur. Les résultats sont présentés pour le cas d'un cylindre seul et pour un groupe de quatre cylindres. L'accord avec les différents résultats publiés dans la littérature est excellent.

**Summary**

We consider the problem of the low frequency oscillations of moored floating structures, in particular the calculation of the "wave drift damping" for an array of cylinders in moderate water depth. The formulation is based on the method of Emmerhoff and Sclavounos, from which one can calculate the wave drift damping directly. Another approach generalises a simple formula of Aranha for the wave drift damping for the case of arbitrary water depth. An explicit dependence of the wave drift damping on water depth is also found. Results are presented for a single cylinder and an array of four cylinders. Comparison with published results is excellent.

## Introduction

Un problème important dans la technologie offshore est le mouvement de dérive lente qui apparaît pour les structures ancrées. Une des principales raisons d'existence de ces mouvements est l'action de la mer sur la structure. Il se pose donc le problème d'évaluation des efforts d'excitation et des amplitudes de ces mouvements, dans le but de dimensionner le système d'ancrage. Les efforts d'excitation sont interprétés comme les efforts de dérive sur houle et ils sont aujourd'hui calculés de façon standard par les codes usuels de diffraction-radiation. L'amplitude des mouvements dépend en grande partie des effets d'amortissement. La composante hydrodynamique de l'amortissement peut être d'origine visqueuse ou potentielle. Ici on s'intéresse seulement à l'amortissement d'origine potentielle. Les périodes propres des structures ancrées étant de l'ordre de la minute, les amortissement de radiation du premier ordre peuvent être négligés et il faut donc rechercher d'autres sources d'amortissement. Les premières investigations sur le sujet sont de nature expérimentale et sont dues à Wichers [12][13]. En faisant des essais d'extinction, en eau calme et sur houle, il s'est aperçu qu'en plus de l'amortissement visqueux, il existe un amortissement supplémentaire, proportionnel au carré de l'amplitude de la houle et identifié avec la dérivée par rapport à la vitesse d'avance de la résistance ajoutée sur houle. On écrit donc le développement de Taylor autour de  $U = 0$  :

$$F_d(\omega, U) = F_d(\omega_0, 0) + U \frac{\partial F_d}{\partial U}(\omega_0, 0) \quad (1)$$

où:

$$\begin{aligned} F_d(\omega, U) & \quad - \text{l'effort de dérive avec la vitesse d'avance} \\ F_d(\omega_0, 0) & \quad - \text{l'effort de dérive sans vitesse d'avance} \\ \frac{\partial F_d}{\partial U}(\omega_0, 0) & \quad - \text{l'amortissement de dérive} \end{aligned}$$

Cette définition a été reprise par presque tous les auteurs et différentes méthodes d'évaluation ont été proposées [7][14][11]. La plupart des auteurs obtiennent l'amortissement de dérive par différenciation numérique des résistances ajoutées calculées pour des petites vitesses d'avance autour de  $U = 0$ . Récemment, Emmerhoff et Scavounos [3], ont proposé une méthode plus directe d'évaluation de l'amortissement de dérive. Ils introduisent dès le départ les séries de perturbation par rapport à deux paramètres indépendants ( $\epsilon, \tau$ ) proportionnels, respectivement, à la cambrure de la houle et à la vitesse d'avance, ce qui permet de trouver l'effort de dérive et l'amortissement de dérive en calculant les efforts de dérive pour les ordres correspondants,  $O(\epsilon^2)$  pour l'effort de dérive et  $O(\epsilon^2\tau)$  pour l'amortissement de dérive. Ils considèrent le cas d'un groupe de cylindres en profondeur d'eau infinie. En utilisant la loi de conservation des quantités de mouvement, ils trouvent les efforts de dérive et l'amortissement de dérive sous forme d'intégrales dans le champ lointain et ensuite montrent qu'il est quand même possible d'évaluer ces intégrales sur la surface des cylindres. Indépendamment, dans le but d'évaluer les effets du courant sur un cylindre, Matsui et al. [10] ont donné une formulation similaire du problème. Les efforts de dérive et l'amortissement de dérive sont trouvés par l'intégration directe de la pression sur le corps. Ils traitent le problème en profondeur finie et seulement le cas où la direction de la houle et celle du courant sont colinéaires.

Une autre méthode (numérique), fondée sur l'utilisation de la fonction de Green avec une petite vitesse d'avance, a été développée par Nossen et al. dans le cas de la profondeur infinie. Les résultats qu'obtiennent Emmerhoff et Scavounos sont en très bon accord avec les résultats obtenus par cette méthode. Récemment, Grue et Biberg [6] ont modifié la méthode de Nossen et al. pour la profondeur finie.

La partie principale du travail présenté ici présente une extension de la méthode d'Emmerhoff et Scavounos à la profondeur finie, avec les cylindres toujours restreints dans leur mouvement à la fréquence fondamentale de la houle. La dernière partie du travail est consacrée à la modification d'une formule simple [1][2] du calcul de l'amortissement de dérive. Les résultats qu'on obtient sont comparés aux résultats de Matsui et al. et de Grue et Biberg.

## Théorie

On considère le problème d'un corps fixe, soumis à un courant suivant l'axe  $x$  et une houle incidente régulière de direction  $\beta$ , ce qui est équivalent au problème d'un corps qui avance sur la houle. Toutes les expressions sont données par rapport au système de coordonnées lié au corps. On développe le potentiel total (et respectivement toutes les autres quantités) en série de perturbation suivante :

$$\Phi = \tau \frac{g}{\omega_0} \bar{\Phi} + \text{Re} \left\{ (\epsilon \varphi + \epsilon \tau \psi) e^{i\omega_e t} \right\} + O(\epsilon^2) + O(\epsilon^2 \tau) + \dots \quad (2)$$

avec les paramètres de perturbation :

$$\epsilon = kA \qquad \tau = \frac{\omega_0 U}{g} \quad (3)$$

( $A$ -amplitude de la houle,  $k$ - nombre d'onde,  $\omega_0$  - la fréquence fondamentale de la houle  $\omega_0^2 = gk \tanh kH$ ,  $U$ -vitesse du corps,  $g$ -accélération de gravité et  $\omega_e$ -fréquence de rencontre  $\omega_e = \omega_0 - kU \cos \beta$ ).

On formule le problème aux limites suivant pour le potentiel  $\psi$ , [3] :

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= 0 && \text{dans le fluide} \\ -\nu \psi + \frac{\partial \psi}{\partial z} &= -2i \nabla \bar{\Phi} \cdot \nabla \varphi - 2k \cos \beta \varphi + i\varphi \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial z^2} && \text{sur la surface libre} \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} &= 0 && \text{sur la surface du corps} \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} &= 0 && \text{sur le fond} \end{aligned}$$

Le potentiel  $\varphi$  est le potentiel classique du premier ordre sans vitesse d'avance composé d'un potentiel incident  $\varphi_I$  et d'un potentiel de diffraction  $\varphi_D$ , tandis que le potentiel  $\bar{\Phi}$  est le potentiel stationnaire lequel est composé d'un courant et d'un potentiel de perturbation qui, dans le cas d'un cylindre, est celui d'un dipôle :

$$\bar{\Phi} = (\bar{\phi} - x) \quad , \quad \bar{\phi} = -\frac{a^2}{r} \cos \theta \quad (4)$$

Avec ces notations et en divisant le potentiel  $\psi$  en trois parties [3], on obtient les trois problèmes à résoudre<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} -\nu \psi_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} &= 2i \frac{\partial \varphi_D}{\partial x} - 2k \cos \beta \varphi_D && (5) \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial r} &= v(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\nu \psi_2 + \frac{\partial \psi_2}{\partial z} &= 0 && (6) \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial r} &= -v(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\nu \psi_3 + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} &= -2i \nabla \bar{\phi} \cdot \nabla \varphi && (7) \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial r} &= 0 \end{aligned}$$

Puisque le potentiel  $\varphi_D$  satisfait la condition homogène sur la surface libre, il s'ensuit que le potentiel  $\psi_1$  est de forme séculaire. Mais ceci ne pose pas de difficulté pratique puisqu'on a seulement besoin du potentiel  $\psi_1$  sur le cylindre. Le potentiel  $\psi_2$  satisfait la condition de radiation habituelle et le potentiel  $\psi_3$  aussi, puisque le terme sur la surface libre décroît très vite vers l'infini.

<sup>1</sup> Les trois potentiels satisfont aussi l'équation de Laplace et la condition de glissement sur le fond

## Le potentiel de diffraction du premier ordre $\varphi_D$

Les notations qui vont être introduites dans le texte seront en accord avec le fig. 1.

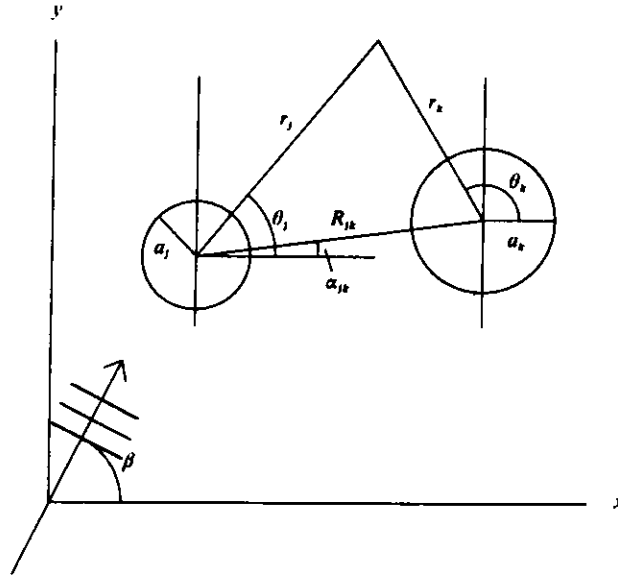


FIGURE 1. Topologie du problème

La solution pour le potentiel  $\varphi_D$ , pour un groupe de cylindres, a été proposée sous une forme compacte par Linton et Evans [9]. Leur méthode de calcul est basée sur l'utilisation de la solution analytique bien connue dans le cas d'un seul cylindre. En supposant le potentiel autour de chaque cylindre de la même forme, mais avec des coefficients différents (coefficients d'interaction), et en utilisant le théorème d'addition de Graf [5] pour les fonctions de Bessel, ils écrivent la condition de glissement sur chaque cylindre et obtiennent ainsi un système d'équations dont la solution fournit les coefficients d'interaction. Ils obtiennent l'expression suivante pour le potentiel  $\varphi_D$ , au voisinage du cylindre  $j$  :

$$\varphi_D^j = \varphi^j - \varphi_I^j = \frac{igA}{\omega_0} f(z) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ A_m^j P_m(kr_j) - I_j e^{-im(\frac{\pi}{2} + \beta)} J_m(kr_j) \right\} e^{im\theta_j} \quad (8)$$

avec:

$$f(z) = \frac{\cosh k(z+H)}{\cosh kH}$$

$$I_j = e^{-ik(x^j \cos \beta + y^j \sin \beta)}$$

$$P_m(kr_j) = Z_m(ka_j)H_m^*(kr_j) - J_m(kr_j), \quad Z_m(ka_j) = \frac{J_m'(ka_j)}{H_m^*(ka_j)}$$

où  $x^j$  et  $y^j$  sont les coordonnées du centre du cylindre et le \* signifie le complexe conjugué. L'expression est valable pour tous les points autour du cylindre  $j$ , lesquels se trouvent à une distance radiale plus petite que la plus petite distance entre les centres des différents cylindres,  $r_j < \min(R_{jk})$ . Sur la surface du cylindre on écrit :

$$P_m(ka_j) = P_m = \frac{2i}{\pi ka_j H_m^*(ka_j)} \quad (9)$$

Les coefficients d'interaction  $A_m^j$  sont obtenus en résolvant le système suivant:

$$A_m^k + \sum_{j \neq k}^N \sum_{n=-M}^M A_n^j Z_n^j e^{i(n-m)\alpha_{jk}} H_{n-m}^*(kR_{jk}) = -I_k e^{-im(\frac{\pi}{2} + \beta)} \quad (10)$$

$$k = 1, \dots, N \quad m = -M, \dots, M$$

### Calcul des potentiels $\psi_1, \psi_2$ et $\psi_3$

En modifiant légèrement la solution donnée par Emmerhoff et Sclavounos dans le cas de la profondeur infinie, on peut trouver explicitement la solution pour le potentiel  $\psi_1$  en profondeur finie :

$$\psi_1 = 2 \left( i \frac{\partial}{\partial x} - k \cos \beta \right) \frac{\partial k}{\partial \nu} \frac{\partial \varphi_D}{\partial k} \quad (11)$$

Tous calculs faits on obtient  $\psi_1$  sous la forme <sup>2</sup>, (les expressions pour  $\psi_{1m}^z(a)$  et  $\psi_{1m}^l(a)$  sont données en annexe) :

$$\psi_1 = \frac{igA}{\omega_0} \frac{\partial k}{\partial \nu} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial f(z)}{\partial k} \psi_{1m}^z(r) + f(z) \psi_{1m}^l(r) \right] e^{im\theta} \quad (12)$$

La condition sur le corps pour le potentiel  $\psi_2$  devient alors :

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial r} = -v(z) = -2 \frac{\partial k}{\partial \nu} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left( i \frac{\partial}{\partial x} - k \cos \beta \right) \frac{\partial \varphi_D}{\partial k} \right] = -\frac{\partial k}{\partial \nu} \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_m(z) e^{im\theta} \quad (13)$$

A cause de la méthode choisie pour calculer les efforts de dérive on n'a besoin que de la partie rayonnante des potentiels. Comme on peut le constater, le potentiel  $\psi_2$  est, en fait, un potentiel de radiation dont la partie rayonnante peut être trouvée par la procédure standard, sous la forme :

$$\psi_2 = f(z) \frac{\partial k}{\partial \nu} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m H_m^*(kr) e^{im\theta} \quad (14)$$

avec, (les expressions détaillées pour  $v_m(z)$  et  $\beta_m$  sont données en annexe) :

$$\beta_m = \frac{-\int_{-H}^0 f(z) v_m(z) dz}{k H_m^*(ka) \int_{-H}^0 f^2(z) dz} \quad (15)$$

La partie propagative du potentiel  $\psi_3$  peut être écrite sous la même forme que  $\psi_2$  :

$$\psi_3 = f(z) \frac{\partial k}{\partial \nu} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m H_m^*(kr) e^{im\theta} \quad (16)$$

Dans leur article, Emmerhoff et Sclavounos utilisent les transformées de Weber pour trouver les coefficients  $\gamma_m$ , mais ici on a préféré recourir à une modification de la méthode utilisée par Matsui et al. On obtient, (les détails sont présentés en annexe):

$$\gamma_m = -\frac{k}{2} \int_0^{2\pi} P_m(ka) e^{-im\theta} \varphi(a, \theta, 0) \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r}(a, \theta) a d\theta \quad (17)$$

### Interaction entre les cylindres pour le potentiel $\psi$

Le potentiel  $\psi_1$  étant la solution particulière du problème ( $\psi_1, \psi_2$ ), l'interaction entre les cylindres est déjà prise en compte dans l'expression pour le potentiel  $\varphi_D$ . Par contre, pour les potentiels  $\psi_2$  et  $\psi_3$ , on doit faire quelque chose de similaire à la méthode de Linton et Evans. L'interaction est faite seulement avec les parties rayonnantes des potentiels puisque les modes locaux disparaissent vite quand on s'éloigne du corps.

On obtient :

$$\psi_2 + \psi_3 = f(z) \sum_m \left[ C_m P_m(kr) + (\beta_m + \gamma_m) H_m^*(kr) \right] e^{im\theta} \quad (18)$$

où les coefficients  $C_m$  sont obtenus à partir de l'équation suivante:

$$C_m^k + \sum_{j \neq k}^N \sum_{n=-M}^M \left( C_n^j Z_n^j + \beta_n^j + \gamma_n^j \right) e^{i(n-m)\alpha_{jk}} H_{n-m}^*(kR_{jk}) = 0 \quad (19)$$

$k = 1, \dots, N \qquad m = -M, \dots, M$

<sup>2</sup> Pour simplifier l'écriture on n'écrit plus l'indice  $j$  qui est sous-entendu.

## Calcul de l'effort de dérive et de l'amortissement

Le calcul des efforts de dérive et de l'amortissement est basé sur la conservation de la quantité de mouvement et les expressions sont données sous la forme d'intégrales sur une surface de contrôle à l'infini. Pour être en accord avec la plupart des résultats dans la littérature, les expressions sont données avec la convention suivante :

$$F_{dx}(\omega_e) = D_x(\omega_0) + FnB_{xz}(\omega_0) \quad (20)$$

où  $Fn$  est le nombre de Froude  $Fn = \frac{U}{\sqrt{gL}}$ , avec  $L = a$  dans le cas des cylindres. On obtient pour l'effort de dérive dans la direction  $x$  :

$$D_x(\omega_0) = \frac{\rho}{2} Re \left\{ \int_{S_\infty} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} - \frac{1}{2} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi^* n_x \right) dS + \nu \int_{C_\infty} \frac{1}{2} \varphi \varphi^* n_x dl \right\} \quad (21)$$

et l'amortissement de dérive :

$$B_{xz}(\omega_0) = \frac{\rho \omega_0 \sqrt{gL}}{2g} Re \left\{ \int_{S_\infty} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial n} + \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \nabla \varphi \cdot \nabla \psi^* n_x \right) dS + \int_{C_\infty} (\nu \varphi \psi^* - k \cos \beta \varphi \varphi^*) n_x dl \right\} \quad (22)$$

où  $n_x$  est la composante dans la direction  $x$  de la normale  $\mathbf{n}$ , avec  $\mathbf{n}$  orientée en dehors du fluide. Grâce à la forme conservative des deux expressions on peut effectuer l'intégration sur la surface des cylindres [3].

On sait que :

$$\varphi = \frac{igA}{\omega_0} f(z) \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m P_m e^{im\theta} \quad (23)$$

Posons :

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = \frac{igA}{\omega_0} \frac{\partial k}{\partial \nu} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial f(z)}{\partial k} \psi_m^z + f(z) \psi_m^l \right) e^{im\theta} \quad (24)$$

avec :

$$\psi_m^z = \psi_{1m}^z(a) \quad (25)$$

$$\psi_m^l = \psi_{1m}^l(a) + (\beta_m + \gamma_m) H_m^*(ka) + C_m P_m \quad (26)$$

Avec ces notations l'effort de dérive et l'amortissement de dérive sont obtenus sous la forme :

$$\frac{D_x(\omega_0)}{\rho g A^2 a} = -\frac{\pi}{4} \alpha Re \left\{ \sum_{j=1}^{N_c} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^* P_m^* \left[ A_{m+1} P_{m+1} \left( 1 - \frac{m(m+1)}{(ka)^2} \right) + A_{m-1} P_{m-1} \left( 1 - \frac{m(m-1)}{(ka)^2} \right) \right] \right\} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{B_{xz}(\omega_0)}{\rho g A^2 a} = & -\frac{\pi \sqrt{ga}}{2\omega_0} Re \left\{ \sum_{j=1}^{N_c} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \psi_m^{l*} \frac{k}{2} + \psi_m^{z*} k^2 \frac{\partial k}{\partial \nu} \int_{-H}^0 f(z) \frac{\partial f(z)}{\partial k} dz \right] \left[ A_{m+1} P_{m+1} \left( 1 - \frac{m(m+1)}{(ka)^2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + A_{m-1} P_{m-1} \left( 1 - \frac{m(m-1)}{(ka)^2} \right) \right] - \left[ A_{m+1} P_{m+1} + A_{m-1} P_{m-1} \right] \right. \\ & \left. \left[ k \cos \beta A_m^* P_m^* + \frac{i}{2} \left( (m+1) A_{m+1}^* P_{m+1}^* - (m-1) A_{m-1}^* P_{m-1}^* \right) \right] \right\} \quad (28) \end{aligned}$$

Où le coefficient  $\alpha$  représente le rapport entre la vitesse de groupe  $c_g = \frac{d\omega_0}{dk}$  et la vitesse de phase  $c = \frac{\omega_0}{k}$  :

$$\alpha = \frac{c_g}{c} = \frac{1}{2} + \frac{kH}{\sinh 2kH} \quad (29)$$

et l'intégrale en  $z$  qui apparaît vaut :

$$\int_{-H}^0 f(z) \frac{\partial f(z)}{\partial k} dz = -\frac{1}{4k^2} \left[ \frac{\nu}{k} - kH \left( 1 - 2\frac{\nu}{k} \frac{\partial \nu}{\partial k} + \frac{\nu^2}{k^2} \right) \right] \quad (30)$$

### Une formule simple pour le calcul de l'amortissement de dérive

En suivant la méthode proposée par Aranha [1], on peut montrer que, en deux dimensions et en profondeur finie, l'amortissement de dérive peut être exprimé en fonction de l'effort de dérive et de sa dérivée. On obtient l'expression suivante :

$$B_{xx}(\omega_0) = -\left\{ \left[ \frac{\partial D_x(\omega_0)}{\partial \omega_0} - \frac{1}{\alpha} D_x(\omega_0) \frac{\partial \alpha}{\partial \omega_0} \right] \omega_0 + \frac{2}{\alpha} D_x(\omega_0) \right\} \frac{\sqrt{gL}}{c} \quad (31)$$

Comme dans le cas de la profondeur infinie [2], on peut modifier cette expression pour l'application au problème en trois dimensions. L'expression finale devient:

$$B_{xx}(\omega_0) = \left\{ -\left[ \left( \frac{\partial D_x(\omega_0)}{\partial \omega_0} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \omega_0} D_x(\omega_0) \right) \omega_0 + \frac{2}{\alpha} D_x(\omega_0) \right] \cos \beta + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial D_x(\omega_0)}{\partial \beta} \sin \beta \right\} \frac{\sqrt{gL}}{c} \quad (32)$$

Avec cette formule on obtient exactement les mêmes résultats qu'avec la méthode présentée auparavant et ces résultats sont également identiques aux résultats obtenus par Matsui et al.[10]. Pour la profondeur infinie  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $k = \nu$  et on obtient la formule donnée dans [2] :

$$B_{xx}^\infty(\omega_0) = \left\{ -\left[ \left( \omega_0 \frac{\partial D_x^\infty(\omega_0)}{\partial \omega_0} + 4D_x^\infty(\omega_0) \right) \cos \beta + 2 \frac{\partial D_x^\infty(\omega_0)}{\partial \beta} \sin \beta \right] \right\} \frac{\sqrt{gL}}{c} \quad (33)$$

En sachant que, dans le cas de structures fixes à parois verticales :

$$D_x^H(k) = 2\alpha D_x^\infty(k) \quad (34)$$

(les indices  $H$  et  $\infty$  désignent la profondeur) et en utilisant (32) et (33), on peut montrer que :

$$B_{xx}^H(k) = \sqrt{\coth kH} B_{xx}^\infty(k) \quad (35)$$

Il est donc possible d'évaluer l'amortissement de dérive en profondeur quelconque à partir de l'amortissement en profondeur infinie et cela pour tous les cas où (34) est satisfait.

Il faut quand même faire attention à la convention utilisée. En fait, dans le cas présenté ici, le facteur de proportionnalité est  $\sqrt{\coth kH}$  à cause du fait qu'on a choisi le développement  $F_{dx}(\omega_e) = D_x(\omega_0) + FnB_{xx}(\omega_0)$ , mais si on avait pris le développement de la forme suivante  $F_{dx}(\omega_e) = D_x(\omega_0) + \tau B_{xx}(\omega_0)$ , on aurait eu le facteur de proportionnalité  $\coth kH$ .

Il doit être possible d'obtenir cette même dépendance de l'amortissement sur la profondeur à partir des expressions (27) et (28) mais ce n'est pas évident à cause des expressions, relativement compliquées, de certaines parties du potentiel  $\psi$ .

### Résultats

Pour illustrer l'influence de la profondeur sur les efforts de dérive et sur l'amortissement de dérive, on a choisi les mêmes configurations qu'Emmerhoff et Scavounos [3], donc le cas d'un seul cylindre et le cas de quatre cylindres de rayon  $a$ , disposés aux coins d'un carré de côté  $7a$ . Sur les figures 2 et 3 on présente l'effort de dérive et l'amortissement de dérive pour un seul cylindre, avec l'incidence  $\beta = 0$ , et pour différentes profondeurs d'eau. Matsui et al.[10] calculent l'amortissement de dérive par intégration directe de la pression sur le corps et les résultats, qui sont donnés seulement pour le cas d'un seul cylindre et pour  $\beta = 0$ , sont en accord total avec nos résultats. L'accord avec les résultats de Grue et Biberg [6] est également très bon. La figure 4 présente l'amortissement de dérive pour un cylindre et pour  $\beta = \frac{\pi}{2}$ . Dans le cas d'un corps

symétrique par rapport aux axes  $x$  et  $y$ , et pour l'angle d'incidence  $\beta = \frac{\pi}{2}$ , les efforts de dérive dans la direction  $x$  sont nuls et donc ne sont pas présentés. Pour le cas du groupe de cylindres les mêmes cas sont traités. La figure 5 présente les résultats pour les efforts de dérive pour  $\beta = 0$ , la figure 6 les résultats pour l'amortissement de dérive et pour  $\beta = 0$  et la figure 7 les résultats pour l'amortissement de dérive et pour  $\beta = \frac{\pi}{2}$ . On remarque une grande influence de l'interaction entre les cylindres qui se traduit par un amortissement de dérive négatif pour certains nombres d'ondes.

### Conclusions

1. La méthode d'Emmerhoff et Sclavounos a été généralisée pour le cas de la profondeur finie. Il y a un très bon accord avec les résultats de Matsui et al. et de Grue et Biberg.
2. Les résultats obtenus sont analytiques, donc exacts et efficaces, et peuvent être utilisés pour la vérification des méthodes numériques.
3. Pour un groupe de cylindres posés sur le fond, la dépendance de l'amortissement de dérive sur la profondeur est trouvée sous une forme explicite (35) qui montre une influence du fond assez faible. Pour les efforts de dérive cette influence est plus grande, mais quand même diminue assez vite si la profondeur augmente.
4. Pour un groupe de cylindres il faut tenir compte de l'interaction entre les cylindres dont l'influence sur les résultats est assez forte.
5. La formule simple (32), dont l'avantage d'utilisation est évident, est en agrément total avec les résultats semi-analytiques et cela dans tous les cas considérés.
6. Le chemin à poursuivre, dans l'étude de l'amortissement de dérive, serait d'élargir le travail présenté ici au cas de cylindres qui répondent librement à la houle, dans le but de s'approcher le plus possible de la situation réelle. C'est une des raisons pour laquelle on a choisi la méthode modifiée de Matsui et al.[10], pour calculer le potentiel  $\psi_3$ , puisqu'elle permet de trouver le potentiel total sur le corps, ce qui est nécessaire si on veut traiter le problème de radiation.

### Références

1. Aranha J.A.P. : "Wave groups and slow motion of an ocean structure", Proc. 6.th Intern. Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Woods Hole, 1991.
2. Clark P.J., Š.Malenica et B.Molin : "An heuristic approach to wave drift damping", à paraître dans Applied Ocean Research
3. Emmerhoff O.J. et P.D.Sclavounos : "The slow drift motion of arrays of vertical cylinders", J. Fluid Mech., Vol.242, pp. 31-50, 1992.
4. Fenton J.D. : "Wave forces on vertical bodies of revolution", J. Fluid Mech., Vol.85, pp. 241-255, 1978.
5. Gradshteyn I.S. et I.M.Ryzhik : "Tables of integrals, series and products", Academic Press, 1965.
6. Grue J. et D.Biberg : "Wave forces on marine structures with small speed in water of restricted depth", à paraître dans Applied Ocean Research
7. Huijsmans R.H.M. : "Wave drift forces in current", Proc. 16th Symposium on Naval Hydrodynamics, Berkeley, 1986.
8. John F. : "On the motion of floating bodies II", Comm. Pure Appl. Math, Vol.3, pp.45-101, 1950.



9. Linton C.M. et D.V.Evans : "The interaction of Waves with arrays of vertical circular cylinders", J. Fluid Mech., Vol.215, pp.549-569, 1990.
10. Matsui T., L.S.Yeob et S.Kimitoshi : "Hydrodynamic forces on a vertical cylinder in current and waves", J.of the Soc. of Naval Arch. of Japan, Vol. 170, pp.277-287, 1991.
11. Nossen J., J.Grue et E.Palm : "Wave forces on three-dimensional floating bodies with small forward speed", J. Fluid Mech., Vol.227, pp. 135-160, 1991.
12. Wichers J.E.W. et M.F. van Sluijs : "The influence of waves on the low frequency hydrodynamic coefficients of moored vessels", OTC paper N°3625, 1979.
13. Wichers J.E.W. et R.H.M.Huijsmans : "On the low frequency hydrodynamic damping forces acting on offshore moored vessels", OTC paper N°4813, 1984.
14. Zhao R. et O.M.Faltinsen : "Interaction between waves and current on a twodimensional body in the free surface", Applied Ocean Research, Vol. 10, N°2, 1988.

## Annexe

### Potentiel $\psi_1$

Le potentiel  $\psi_1$  est écrit sous la forme :

$$\psi_1 = \frac{igA}{\omega_0} \frac{\partial k}{\partial \nu} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial f(z)}{\partial k} \psi_{1m}^z(r) + f(z) \psi_{1m}^l(r) \right] e^{im\theta} \quad (A1)$$

$$\psi_{1m}^z = \frac{i}{a} \left[ (m+1)A_{m+1}P_{m+1} - (m-1)A_{m-1}P_{m-1} \right] - 2k \cos \beta A_m P_m \quad (A2)$$

$$\begin{aligned} \psi_{1m}^l = \frac{i}{a} & \left[ (m+1)A_{m+1}P_{1m+1} - (m-1)A_{m-1}P_{1m-1} \right. \\ & \left. + (m+1)B_{m+1}P_{m+1} - (m-1)B_{m-1}P_{m-1} \right] \\ & - 2 \cos \beta \left[ k(A_m P_{1m} + B_m P_m) + I e^{-im(\frac{\pi}{2} + \beta)} J_m(ka) \right] \end{aligned} \quad (A3)$$

Les coefficients  $B_m$  sont les dérivées par rapport à  $k$  des coefficients  $A_m$ ,  $B_m = \frac{\partial A_m}{\partial k}$  et ils sont obtenus en prenant la dérivée par  $k$  de l'équation (10).

### Potentiel $\psi_2$

L'expression pour  $v(z)$  peut être obtenue sous la forme:

$$v(z) = \frac{\partial k}{\partial \nu} \sum_{m=-\infty}^{\infty} v_m(z) e^{im\theta} = \frac{\partial k}{\partial \nu} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial f(z)}{\partial k} v_m^z + f(z) v_m^l \right) e^{im\theta} \quad (A4)$$

et les coefficients  $\beta_m$  deviennent :

$$\beta_m = -\frac{igA}{\omega_0} \frac{1}{k H_m^*(ka)} \left[ v_m^l + v_m^z 2k \frac{\partial \nu}{\partial k} \int_{-H}^0 f(z) \frac{\partial f(z)}{\partial k} dz \right] \quad (A5)$$

où l'intégrale en  $z$  est donnée par (30), et :

$$v_m^z = -ik^2 \left[ \left( 1 - \frac{m(m+1)}{(ka)^2} \right) A_{m+1} P_{m+1} + \left( 1 - \frac{m(m-1)}{(ka)^2} \right) A_{m-1} P_{m-1} \right] \quad (A6)$$

$$\begin{aligned}
v_m^I = & -ki \left\{ A_{m+1} \left[ 2P_{m+1} + kP_{1m+1} \left( 1 - \frac{m(m+1)}{(ka)^2} \right) \right] \right. \\
& + A_{m-1} \left[ 2P_{m-1} + kP_{1m-1} \left( 1 - \frac{m(m-1)}{(ka)^2} \right) \right] \\
& + k \left[ B_{m+1} P_{m+1} \left( 1 - \frac{m(m+1)}{(ka)^2} \right) + B_{m-1} P_{m-1} \left( 1 - \frac{m(m-1)}{(ka)^2} \right) \right] \left. \right\} \\
& - 2k \cos \beta I e^{-im(\frac{\pi}{2} + \beta)} J'_m(ka)
\end{aligned} \tag{A7}$$

avec:

$$P_{1m} = a P_m \frac{H_m^*(ka)}{H_m'^*(ka)} \left( 1 - \frac{m^2}{(ka)^2} \right) \tag{A8}$$

### Le potentiel $\psi_3$

Dans le cas de la profondeur finie la fonction de Green, du problème de premier ordre sans vitesse d'avance, peut être écrite comme une série des fonctions propres. Cette forme de la fonction de Green est due à John [8]. Pour trouver le potentiel total sur le corps, Matsui et al. [10] utilisent la forme modifiée de cette fonction donnée par Fenton [4]. Ici on élargit la méthode de Matsui pour trouver la partie rayonnante du potentiel.

La fonction de Green satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
\Delta G(\mathbf{x}, \xi) &= -4\pi \delta(\mathbf{x}) & 0 \leq \zeta \leq H \\
-\nu G + \frac{\partial G}{\partial \zeta} &= 0 & \zeta = 0 \\
\frac{\partial G}{\partial \zeta} &= 0 & \zeta = -H \\
\lim \left[ \sqrt{k\rho} \left( \frac{\partial G}{\partial \rho} - ikG \right) \right] &= 0 & \rho \rightarrow \infty
\end{aligned} \tag{A9}$$

Elle peut être écrite sous la forme :

$$G(\mathbf{x}, \xi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m(\mathbf{r}, z; \rho, \zeta) e^{im(\theta - \theta')} \tag{A10}$$

avec :

$$\begin{aligned}
g_m(\mathbf{r}, z; \rho, \zeta) = & -2\pi i C_0 \begin{pmatrix} H_m^*(k\rho) J_m(k\rho) \\ J_m(k\rho) H_m^*(k\rho) \end{pmatrix} f(z) f(\zeta) \\
& + 4 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \begin{pmatrix} K_m(k_n r) I_m(k_n \rho) \\ I_m(k_n r) K_m(k_n \rho) \end{pmatrix} f_n(z) f_n(\zeta) \quad \begin{pmatrix} r > \rho \\ r < \rho \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A11}$$

où :

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{\cosh k(z+H)}{\cosh kH} \\
f_n(z) &= \frac{\cos k_n(z+H)}{\cos k_n H} \\
C_0 &= \frac{1}{2 \int_{-H}^0 f^2(z) dz} = \frac{k^2}{(k^2 - \nu^2)H + \nu} = k \frac{\partial k}{\partial \nu} \\
C_n &= \frac{k_n^2}{(k_n^2 - \nu^2)H - \nu}
\end{aligned}$$

De la même manière on développe en séries de Fourier le potentiel  $\psi_3$  et le deuxième membre de la condition de surface libre :

$$\psi_3(\mathbf{r}, \theta, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_{3m}(\mathbf{r}, z) e^{im\theta} \tag{A12}$$

$$F(r, \theta) = -2i\nabla\bar{\phi} \cdot \nabla\varphi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m(r)e^{im\theta} \quad (A13)$$

Puisque le terme sur la surface libre disparaît vite vers l'infini, le potentiel  $\psi_3$  satisfait la condition de radiation standard et on peut écrire l'équation intégrale classique :

$$\begin{pmatrix} 4\pi\psi_3(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix} - \int_{S_c} \Psi_3(\xi) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \rho} dS = \int_{S_l} G(\mathbf{x}, \xi) F(\rho, \vartheta) dS \quad \begin{pmatrix} r > a \\ r < a \end{pmatrix} \quad (A14)$$

En supposant le potentiel  $\psi_3$ , sur le corps, sous la forme :

$$\psi_{3m}(a, z) = f(z)A_{0m} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)A_{nm} \quad (A15)$$

et en écrivant l'équation intégrale pour  $r = a - \delta$ , ( $\delta > 0$ ) on obtient pour les coefficients  $A_{nm}$  les expressions suivantes :

$$A_{0m} = -\frac{2C_0 \int_a^\infty H_m^*(k\rho)F_m(\rho)\rho d\rho}{kaH_m^*(ka)}, \quad A_{nm} = -\frac{2C_n \int_a^\infty K_m(k_n\rho)F_m(\rho)\rho d\rho}{k_n a K_m'(k_n a)} \quad (A16)$$

Connaissant le potentiel sur le corps on peut écrire l'équation intégrale pour  $r \rightarrow \infty$  et obtenir ainsi la partie propagative du potentiel  $\psi_3$ :

$$\psi_3 = f(z) \frac{\partial k}{\partial \nu} \sum_m \gamma_m H_m^*(kr) e^{im\theta} \quad (A17)$$

avec :

$$\gamma_m = \pi i k \int_a^\infty P_m(k\rho) F_m(\rho) \rho d\rho \quad (A18)$$

L'intégrale qui apparaît dans l'équation peut être calculée à l'aide de l'identité suivante :

$$\begin{aligned} \int_S \chi \nabla_0 \varphi \nabla_0 \bar{\phi} dS &= \frac{1}{2} \int_S \left\{ \varphi \bar{\phi} \nabla_0^2 \chi - \chi \left( \varphi \nabla_0^2 \bar{\phi} + \bar{\phi} \nabla_0^2 \varphi \right) \right\} dS \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{C_w \cup C_\infty} \left\{ \bar{\phi} \varphi \frac{\partial \chi}{\partial n} - \chi \left( \varphi \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n} + \bar{\phi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \right\} dC \end{aligned} \quad (A19)$$

Cette identité est obtenue en appliquant le théorème de Green 2D aux fonctions  $\chi$  et  $\varphi \bar{\phi}$ . L'opérateur  $\nabla_0$  qui apparaît est le gradient horizontal  $\nabla_0 = \left( \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right)$ . La normale  $\mathbf{n}$  est orientée vers l'extérieur du domaine  $S$ .

En posant  $\chi = P_m(k\rho)e^{-im\theta}$  dans l'équation on obtient :

$$\gamma_m = \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} P_m(ka) e^{-im\vartheta} \varphi(a, \vartheta, 0) \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial n}(a, \vartheta) a d\vartheta \quad (A20)$$

ce qui donne finalement :

$$\gamma_m = -\frac{igA}{\omega_0} \frac{i}{H_m^*(ka)} \left[ A_{m+1} P_{m+1} + A_{m-1} P_{m-1} \right] \quad (A21)$$

On voit que le potentiel  $\psi_3$  dépend seulement de la dérivée normale du potentiel stationnaire sur les cylindres et donc même si on veut prendre en compte l'effet d'interaction entre les cylindres sur le potentiel stationnaire ça ne changera pas les résultats puisque les coefficients d'interaction sont trouvés justement à partir de cette même condition sur les cylindres.

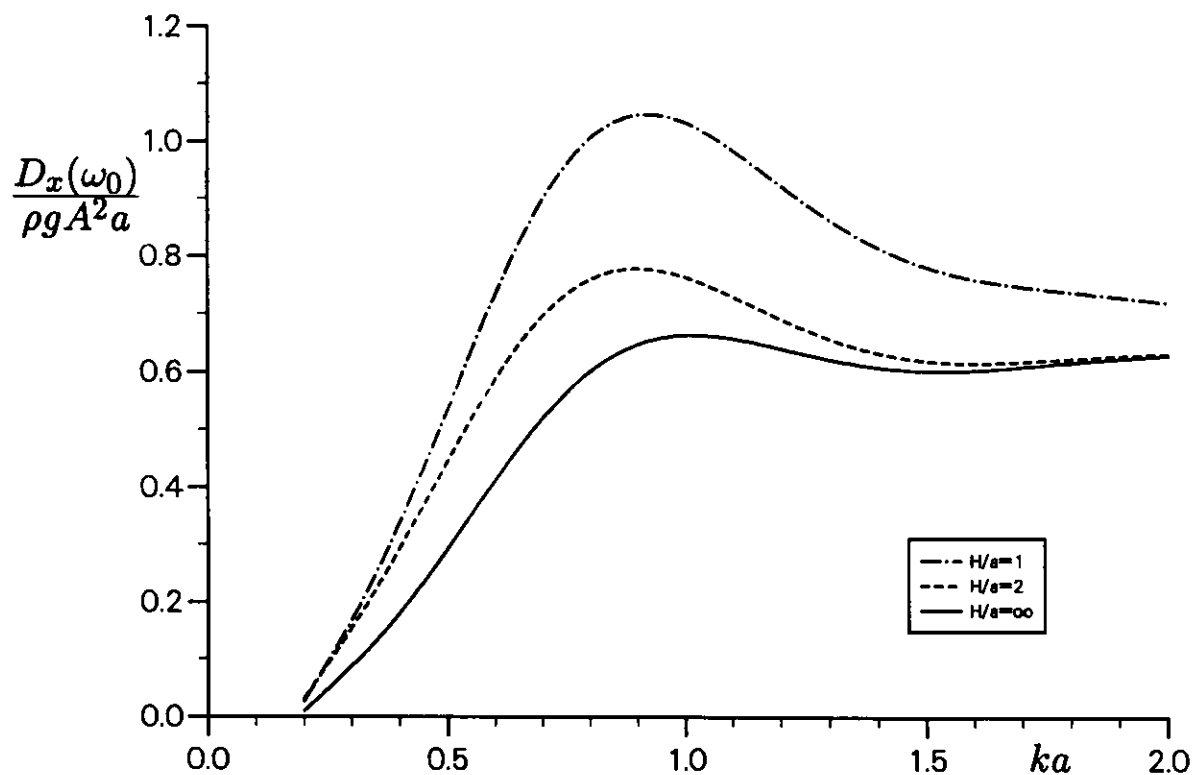


FIGURE 2. L'effort de dérive pour un cylindre et pour  $\beta = 0$ .

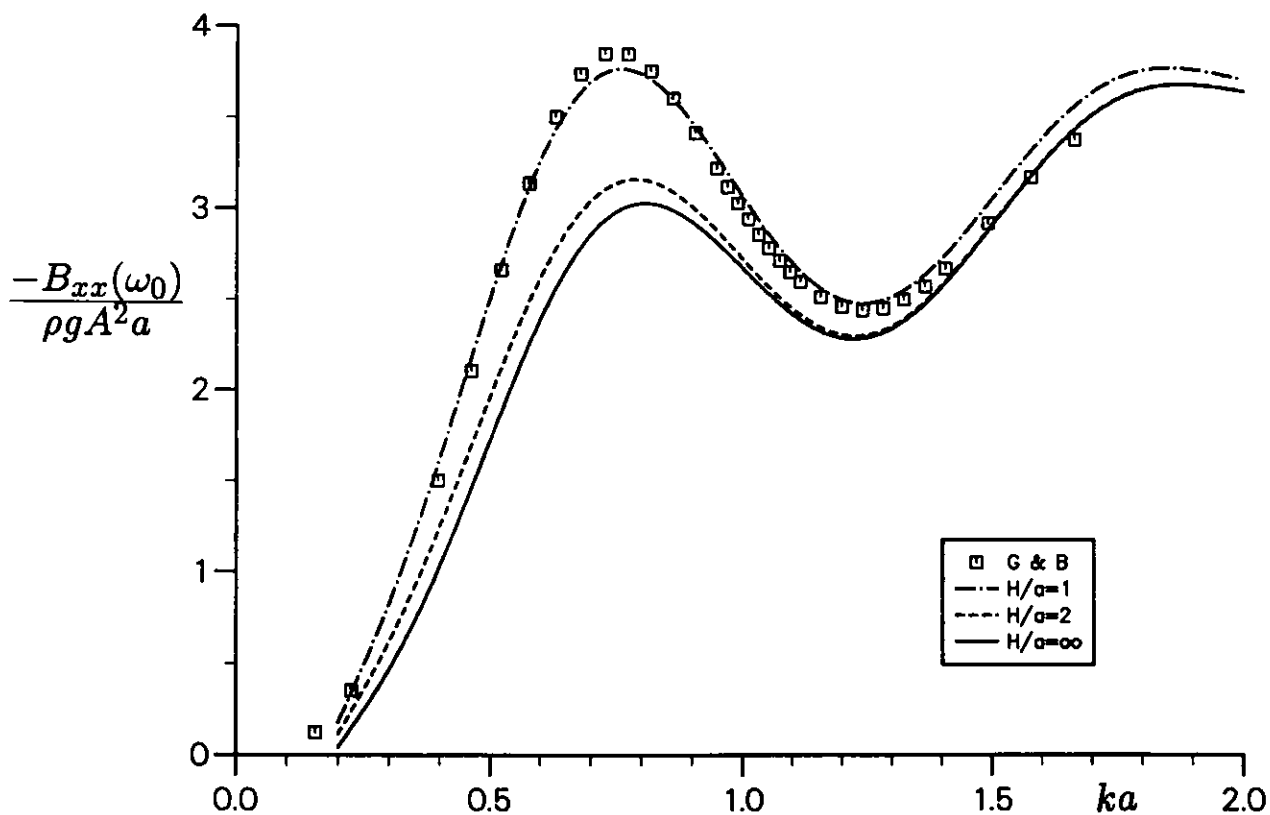


FIGURE 3. L'amortissement de dérive pour un cylindre et pour  $\beta = 0$  ( $\square$  - Grue et Biberg,  $H/a = 1$ )

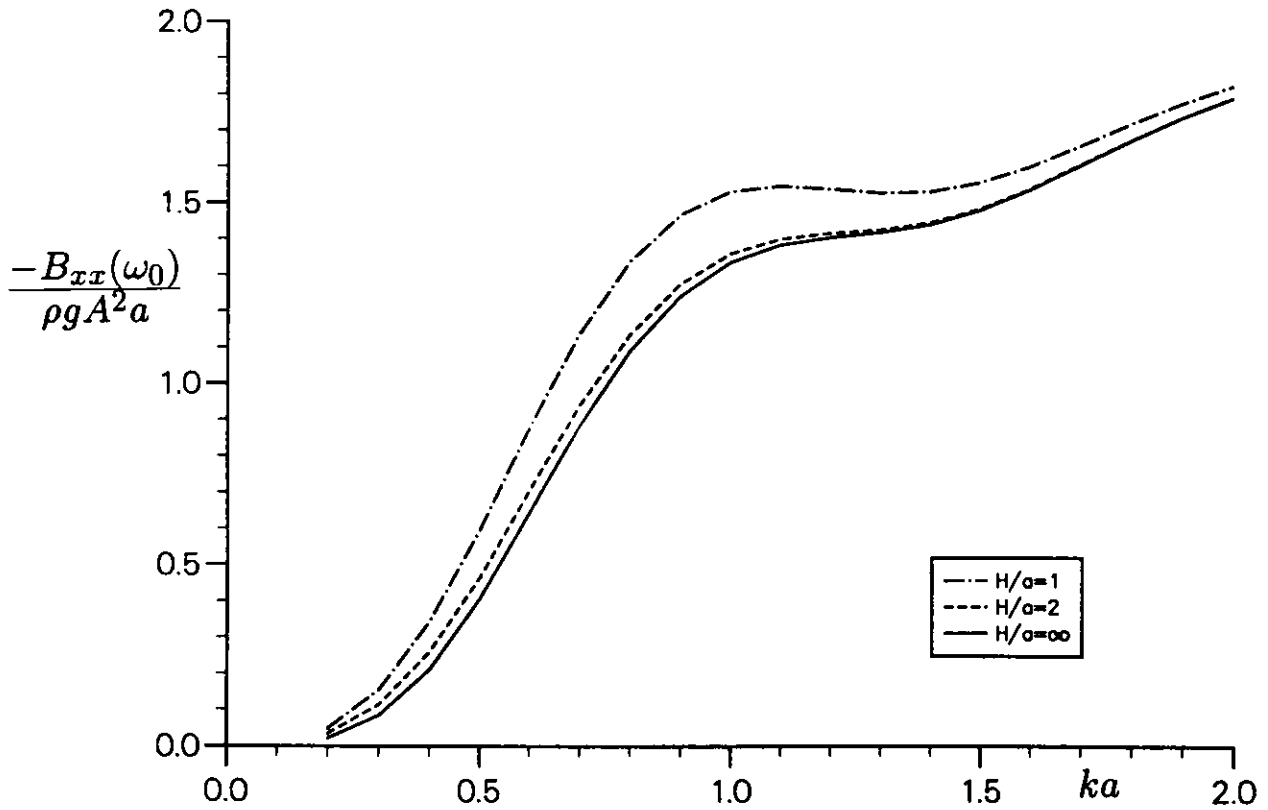


FIGURE 4. L'amortissement de dérive pour un cylindre et pour  $\beta = \frac{\pi}{2}$ .

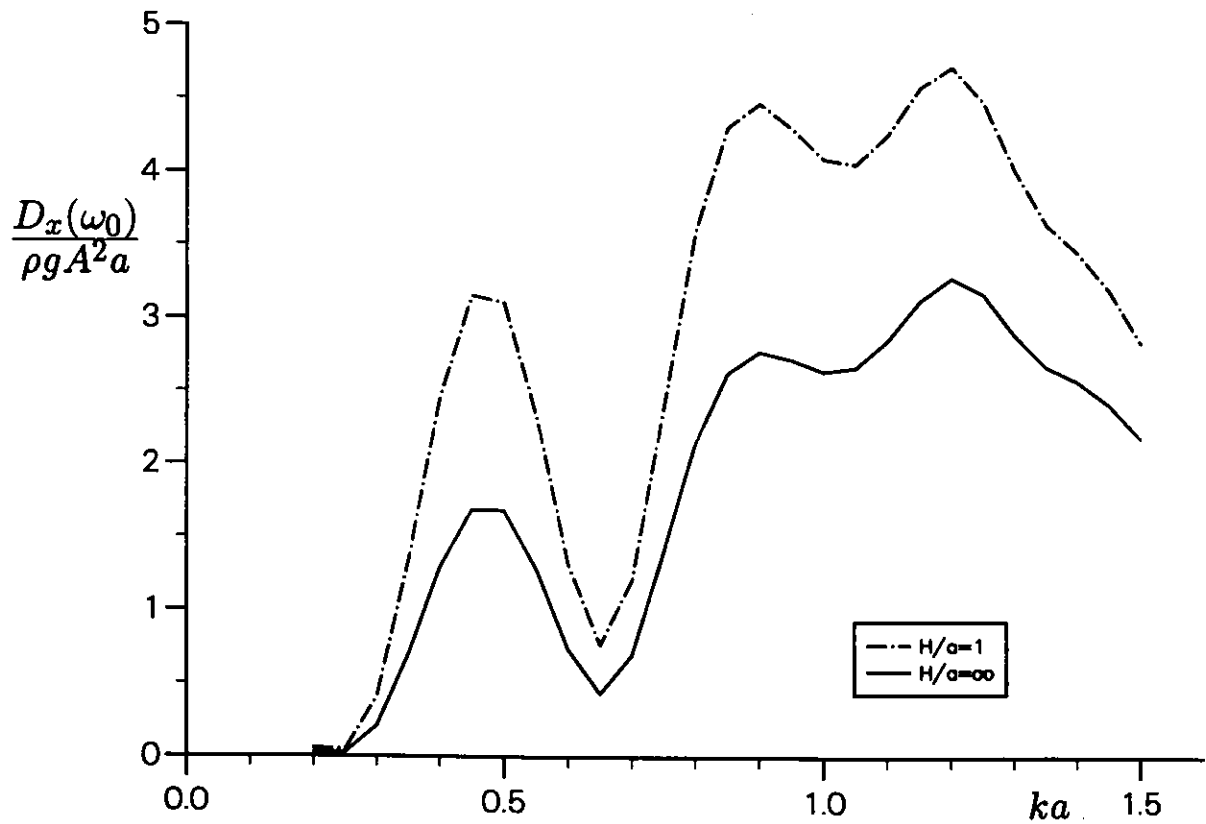


FIGURE 5. L'effort de dérive pour 4 cylindres et pour  $\beta = 0$ .

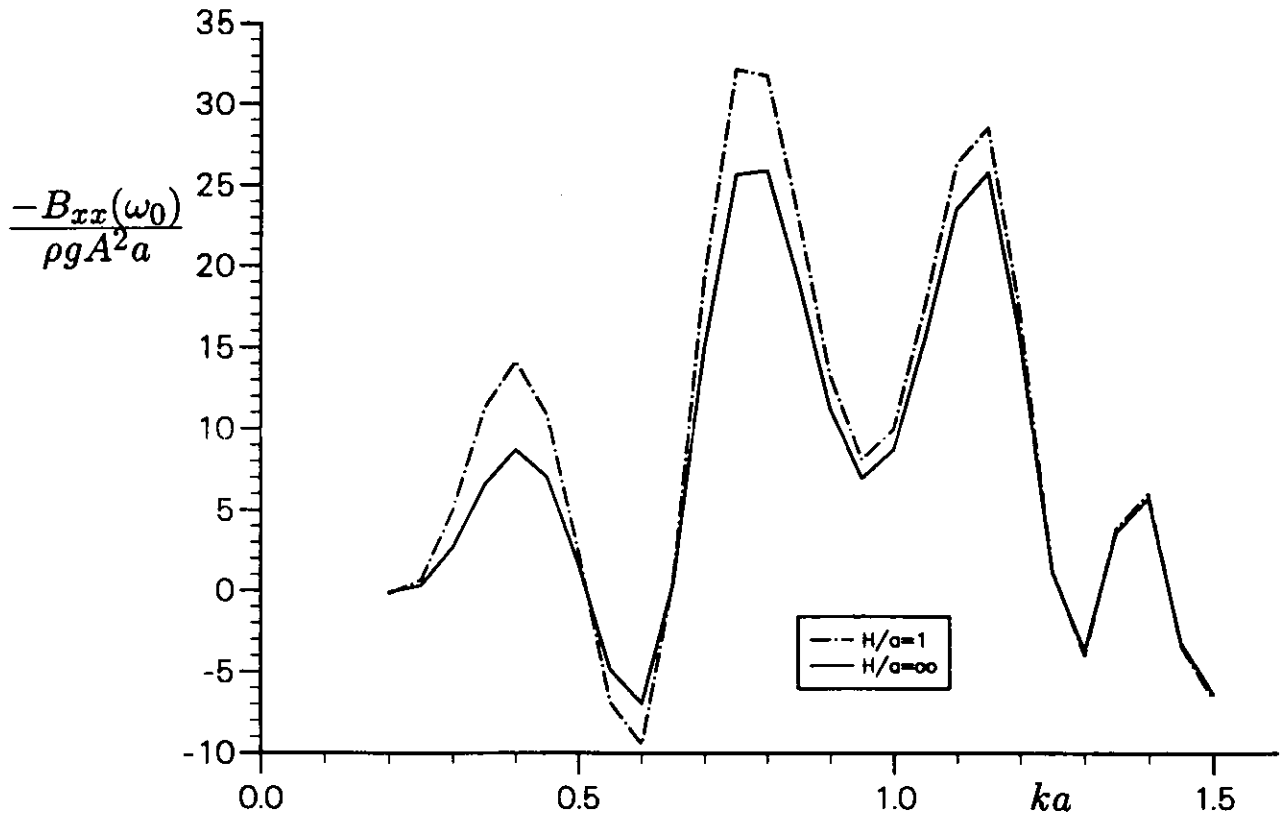


FIGURE 6. L'amortissement de dérive pour 4 cylindres et pour  $\beta = 0$ .

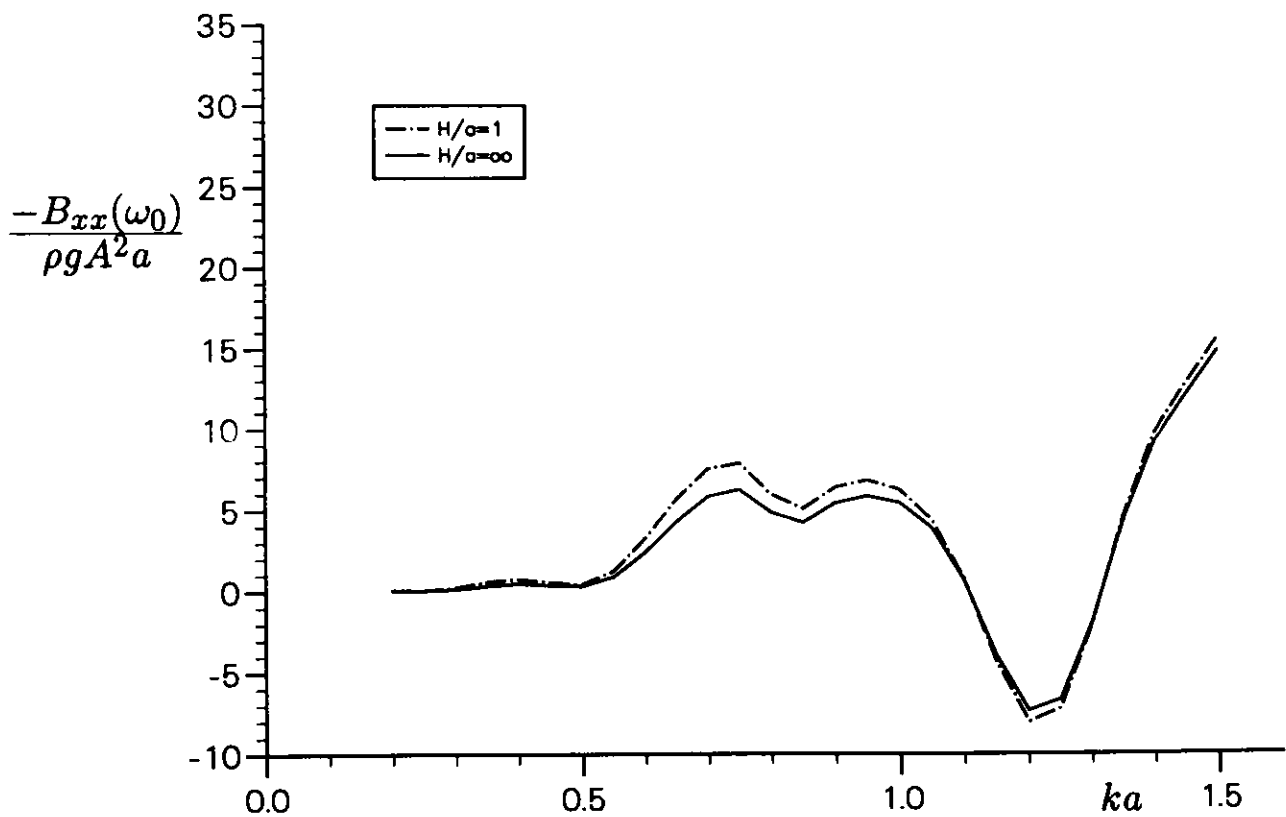


FIGURE 7. L'amortissement de dérive pour 4 cylindres et pour  $\beta = \frac{\pi}{2}$ .