

4e JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE

1, 2, 3 mars 1993 - Nantes

## QUELQUES RESULTATS CONCERNANT LA HOULE ET SES EFFETS

P. GUEVEL - A. MANGIN

ACRI-S.A.

Villantipolis n°10

473, Route des Dolines

06560 VALBONNE

### Résumé

La première partie du mémoire est consacrée à la généralisation d'une théorie de Longuet-Higgins sur l'origine des micro-séismes en mer très profonde ; après avoir effectué quelques vaines investigations destinées à rechercher des circonstances réalistes pour lesquelles d'importantes fluctuations de pression sont susceptibles d'être induites sur les fonds abyssaux par des ondes de surface, on émet la présomption que les phénomènes observés dans la nature sont fortement gouvernés par les effets visqueux.

Une deuxième partie a trait à l'étude de la houle irrotationnelle exacte, avec ou sans la superposition d'un courant ; on y démontre, en particulier que la déformée de la surface libre est indépendante du débit de transfert de masse dès lors qu'on s'impose le tirant d'eau moyen  $h$ , la longueur d'ondes  $\lambda$ , et le creux  $H$ .

Quelques illustrations sont fournies en exploitant un programme de calcul numérique fondé sur une méthode de singularités du type "doublets normaux" qui sera décrite succinctement.

### Summary

The first part of this paper deals with a generalisation of a theory, first introduced by Longuet-Higgins, of the origin of micro-seisms in very deep water. Several unsuccessful investigations have been performed to search for realistic patterns of surface wave which could induce significant pressure fluctuations on abyssal zone. The final presumption is that these phenomenon depend strongly on the viscous effects.

In the second part, a study of the exact irrotational gravity wave is performed in which the existence of a current may be taken into account. The result which occurs is that the final design of the free surface does not depend on the mass transport as long as the mean water level  $h$ , the wavelength  $\lambda$ , and the wave height  $H$  are provided. Some numerical calculations based on the use of an integral method are presented to confirm this result.

## I-Introduction

Tous les développements qui vont suivre s'appuient sur l'exploitation de l'identité suivante, valable pour un champ de vecteurs  $\vec{A}$ , absolument quelconque :

$$\iiint_D (\vec{A} + \vec{OM} \cdot \text{div} \vec{A}) dD = \iint_{\partial D} \vec{OM}(\vec{n} \cdot \vec{A}) dS, \quad (1.1)$$

M étant un point courant du domaine (D) ou de sa frontière ( $\partial D$ ), O étant un point arbitraire de l'espace.

Dans le cas où  $\vec{A} = \rho \vec{V}$ ,  $\rho$  désignant la masse volumique d'un milieu continu déformable animé d'une vitesse  $\vec{V}$ , on a manifestement, compte tenu de l'équation de continuité  $\text{div} \rho \vec{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  :

$$\iiint_D \rho \vec{V} dD - \iiint_D \vec{OM} \frac{\partial \rho}{\partial t} dD = \iint_{\partial D} \vec{OM}(\vec{n} \cdot \rho \vec{V}) dS; \quad (1.2)$$

$$\iiint_D \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) dD - \iiint_D \vec{OM} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} dD = \iint_{\partial D} \vec{OM}(\vec{n} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V})) dS; \quad (1.3)$$

Parmi les très nombreuses applications des identités ci-dessus, on présentera ici :

- La généralisation d'une théorie de Longuet-Higgins, sur l'origine des micro-séismes en mer très profonde.
- L'établissement d'une formule reliant le transfert de masse à l'énergie cinétique, associés à la houle irrotationnelle exacte.

## II-Généralisation d'une théorie de Longuet-Higgins sur l'origine des micro-séismes en mer très profonde

II-1 On se place tout d'abord dans la configuration étudiée par l'Auteur (fig. II.1)

- . Les ondes de surface, supposées bidimensionnelles, présentent une périodicité spatiale.
- . Le fond de la mer est assimilé à un plan horizontal indéfini (SF).

Par contre, on n'aura recours à aucune des hypothèses habituelles (fluide parfait, isovolume, petits mouvements) ; ce qui évite, entre autres, toute ambiguïté à propos de la valeur de la constante de Bernoulli puisqu'ici, la notion de potentiel des vitesses ne sera pas introduite.

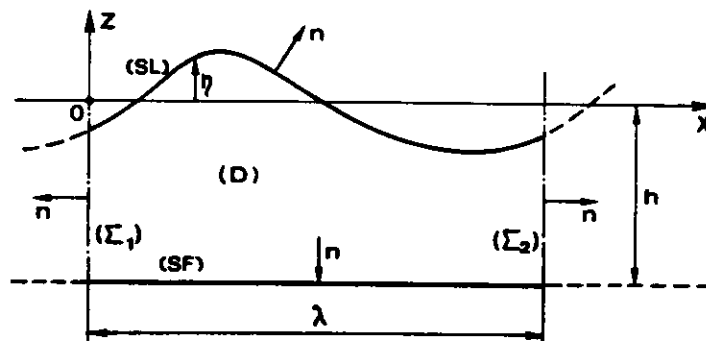


Figure II.1

D'après le théorème des quantités de mouvement, appliqué à tout le fluide (D) contenu dans le domaine (D) limité par deux verticales ( $\Sigma_1$ ), ( $\Sigma_2$ ) distantes d'une longueur  $\lambda$  égale à la période spatiale, on obtient tout d'abord :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \int_{\partial D} \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot \vec{n}) dl + \iiint_D \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) dS. \quad (2.1)$$

où  $\sum \vec{F}_{\text{ext}}$  désigne l'ensemble des forces extérieures appliquées au fluide ( $\mathcal{F}$ ), de masse  $M$  constante.  
D'après la formule (1.3), il vient ensuite :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \int_{\partial D} \left\{ \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot \vec{n}) + \overline{\text{OM}} \left[ \vec{n} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) \right] \right\} d\mathbf{l} + \iint_D \overline{\text{OM}} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} dS, \quad (2.2)$$

puis, en projection sur l'axe vertical ascendant  $Oz$  :

$$-Mg + R = \int_{\text{SL}} \left\{ w(\rho \vec{V} \cdot \vec{n}) + \eta \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) \cdot \vec{n} \right\} d\mathbf{l} + \iint_D z \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} dS, \quad (2.3)$$

$R$ , désignant la composante verticale de la réaction du fond (SF) sur le fluide ;

$w$ , désignant la composante verticale de la vitesse  $\vec{V}$ .

On en déduit l'expression suivante de la moyenne spatiale de la pression dynamique qui règne sur le fond :

$$\bar{p}_d = \frac{\rho}{\lambda} \int_{\text{SL}} \left\{ w(\vec{V} \cdot \vec{n}) + \eta \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \cdot \vec{n} \right) \right\} d\mathbf{l} + \frac{1}{\lambda} \iint_D z \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} dS. \quad (2.4)$$

Ce résultat peut être présenté sous une forme plus avantageuse en exploitant la condition cinématique sur la surface libre :

$$\vec{V} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2}} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{dx}{dl} \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (2.5)$$

et, en introduisant les composantes du vecteur élémentaire  $\vec{n} \cdot d\mathbf{l}$  :

$$(\vec{n} \cdot d\mathbf{l})_x = -\frac{\partial \eta}{\partial x} dx \quad ; \quad (\vec{n} \cdot d\mathbf{l})_z = dx \quad (2.6)$$

On obtient ainsi, en notant  $u$  la composante horizontale de la vitesse  $\vec{V}$  :

$$\left[ w(\vec{V} \cdot \vec{n}) + \eta \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \cdot \vec{n} \right) \right] d\mathbf{l} = \left[ w \frac{\partial \eta}{\partial t} + \eta \left( -\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right] dx = \left[ \frac{\partial}{\partial t} (w\eta) - \frac{1}{2} \frac{\partial \eta^2}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx$$

et, par suite :

$$\bar{p}_d = \frac{\rho}{\lambda} \int_0^\lambda \left[ \frac{\partial}{\partial t} (w\eta) - \frac{1}{2} \frac{\partial \eta^2}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right] dx + \frac{1}{\lambda} \iint_D z \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} dD \quad (2.7)$$

ou bien, en effectuant la substitution  $w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x}$  :

$$\bar{p}_d = \frac{\rho}{2\lambda} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^\lambda \eta^2 dx + \int_0^\lambda u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \eta^2}{\partial t} \right) dx \right\} + \frac{1}{\lambda} \iint_D z \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} dD \quad (2.8)$$

D'où, finalement, en intégrant par parties la seconde des intégrales ci-dessus :

$$\bar{p}_d = \frac{\rho}{2\lambda} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^\lambda \eta^2 dx - \int_0^\lambda \frac{\partial \eta^2}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} dx \right\} + \frac{1}{\lambda} \iint_D z \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} dD \quad (2.9)$$

En eau très profonde, la pression dynamique qui règne sur le fond n'est fonction que du temps, du moins pour les fluides parfaits ; aussi la formule ci-dessus fournit-elle, en fait, l'expression de la pression uniforme  $p_d(t)$  s'exerçant sur ce fond, quelle que soit la profondeur de celui-ci.

En supposant maintenant que le fluide est isovolume, puis en négligeant les termes du troisième ordre, il vient plus simplement :

$$p_d = \frac{\rho}{2\lambda} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^\lambda \eta^2 dx ; \quad (2.10)$$

de sorte que l'on confirme, par une approche totalement différente, une formule déjà établie par Longuet-Higgins [1].

Appliquée au cas où la mer serait le siège d'un clapotis pur, pour lequel on aurait  $\eta = 2a \cdot \cos(2\pi x/\lambda) \cdot \sin \omega t$ , cette formule fournit le résultat suivant :

$$\frac{p_d}{\rho g} = 4\pi \frac{a^2}{\lambda} \cos 2\omega t$$

Cette pression, qui pulse à une fréquence double de celle des ondes de surface peut avoir des amplitudes étonnamment importantes ; avec  $T=8s$  et  $a=2m$ , on obtient en effet :

$$\frac{p_d}{\rho g} = 0,5 \cos 2\omega t, \text{ en mètres d'eau}$$

et cela, quelle que soit la profondeur du fond...

Par ailleurs la compressibilité de l'eau, en mer très profonde, est susceptible d'entraîner des phénomènes de résonance comme cela apparaît en explicitant d'une manière approximative le dernier terme de l'expression (2.9) de la pression régnant sur le fond.

On a, en effet, en désignant par  $C$  la vitesse du son dans l'eau de mer :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} ;$$

$$\frac{1}{\lambda} \iint_D z \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} dD = \frac{1}{C^2} \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} z dz$$

et, du moins si la profondeur d'eau  $h$  est très grande vis à vis de la tranche d'eau supérieure directement soumise au champ de vagues :

$$\frac{1}{\lambda} \iint_D z \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} dD = -\frac{h^2}{2C^2} \frac{d^2 p}{dt^2}$$

D'où, en substituant dans (2.9), la formule approchée suivante :

$$p_d + \frac{h^2}{2C^2} \frac{d^2 p_d}{dt^2} = \frac{\rho}{2\lambda} \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^\lambda \eta^2 dx - \int_0^\lambda \frac{\partial \eta^2}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} dx \right] \quad (2.11)$$

Il apparaît ainsi que le phénomène présente bien un caractère résonant pour des périodes d'excitation  $T$  voisines de  $T_0$ , avec :

$$T_0 = \pi\sqrt{2} \frac{h}{C} \quad (T_0=9s, \text{ pour } h=3000m) \quad (2.12)$$

Dans le cas d'une onde progressive de célérité  $\mathcal{C}$ , pour laquelle on a  $\frac{\partial}{\partial t} = -\mathcal{C} \frac{\partial}{\partial x}$ , la formule de Longuet-

Higgins fournit l'information selon laquelle  $p_d$  est nul à l'ordre 2 ; d'après (2.9) et toujours en supposant le fluide isovolume, cette pression est en fait :

$$p_d = \frac{\rho}{2\lambda} \int_0^L \frac{\partial \eta^2}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (2.13)$$

Celle ci, comme toutes les autres grandeurs attachées à l'existence d'une onde progressive, se présente sous la forme :  $p_d = p_d(x - \mathcal{C}t)$ . Comme à très grande profondeur elle ne dépend pas de  $x$ , cette pression se réduit nécessairement à une constante, d'ailleurs très faible, comme le montre un calcul formel effectué à partir d'un modèle de houle de Stokes développé au troisième ordre ; on obtient en effet :

$$\frac{p_d}{\rho g} = \frac{\pi^3}{8} \left(\frac{H}{\lambda}\right)^3 H, \quad (2.14)$$

H étant la hauteur de houle, crêtes à creux, et  $\lambda$  sa longueur d'ondes.  
Avec  $T=8s$  et  $H=4m$ , on a seulement :

$$\frac{p_d}{\rho g} = 1 \text{ mm d'eau}$$

Une telle pression, indépendante du temps, n'est évidemment pas décelable ; en outre elle n'est nullement susceptible d'induire des phénomènes de résonance.

Considérons, enfin, le cas d'un clapotis partiel pour lequel on aurait :  $\eta = -a^+ \cdot \sin(kx - \omega t) + a^- \cdot \sin(kx + \omega t)$ .  
D'après la formule (2.10), on obtient immédiatement le résultat suivant :

$$\frac{p_d}{\rho g} = 4\pi \frac{a^+ a^-}{\lambda} \cos 2\omega t \quad (2.15)$$

qui montre que les interférences entre deux ondes progressives, de même période, se propageant dans des directions opposées, sont susceptibles d'induire des pressions fluctuantes ayant des amplitudes tout à fait significatives quelle que soit la profondeur d'eau.

Il est à remarquer, à ce propos, que le taux d'ondes stationnaires dans un canal à houle devrait pouvoir être déterminé par la mesure, sur le fond, de la composante de pression qui varie suivant la loi (2.15)

## II-2 Approche du problème tridimensionnel

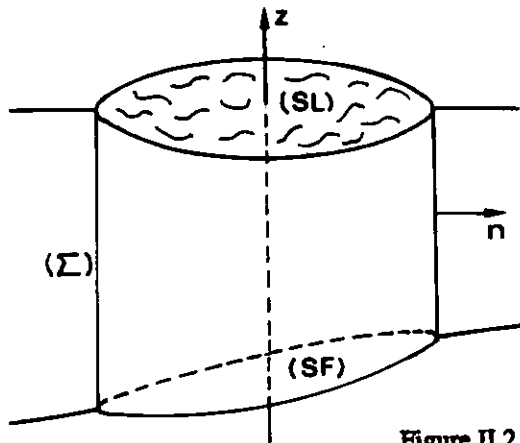


Figure II.2

Les résultats, pour le moins curieux, mentionnés ci dessus, ont été établis pour une configuration très particulière ; aussi peut-on se demander si il existe des circonstances plus réalistes pour lesquelles des fluctuations de pression importantes seraient détectables en mer très profonde.

Pour tenter de donner une réponse à cette question, on a généralisé la méthode de calcul précédente au cas du problème tridimensionnel (fig. II.2).

Le théorème des quantités de mouvements - appliqué à tout le fluide ( $\mathcal{F}$ ) contenu dans le domaine (D) limité par un cylindre vertical ( $\Sigma$ ), d'axe Oz et de rayon R - fournit ici l'expression suivante de la réaction verticale du fond (SF) :

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} = & \frac{\rho}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iint_{SL} \eta^2 dS_0 + \iint_{SL} \left( u \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + v \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} \right) \eta^2 \cdot dS_0 \right\} + \iiint_D z \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} dD \\ & + \iint_{\Sigma} \left[ w(\rho \bar{V} \cdot \bar{n}) + z \frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{V} \cdot \bar{n}) \right] dS + Mg - \mathcal{E}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

où on a noté :

$dS_0$ , la projection, sur le plan horizontal  $z=0$ , d'un élément  $dS$  de la surface libre (SL);

$M=M(t)$ , la masse du fluide contenu dans le domaine (D) ;

$\mathcal{E}$ , la composante verticale des efforts de cisaillement que le fluide ambiant exerce sur le fluide ( $\mathcal{F}$ ) à travers la frontière fictive ( $\Sigma$ ).

Ici, la situation est évidemment bien moins claire que dans la configuration particulière considérée par Longuet-Higgins. Il est néanmoins possible de tirer quelque parti de la formule (2.16) en donnant au cylindre ( $\Sigma$ ) un rayon très grand vis à vis de la hauteur de la tranche d'eau supérieure pour laquelle les vitesses conservent une valeur significative.

Dans ces conditions, la pression dynamique moyenne qui s'exerce sur le fond peut s'exprimer comme suit :

$$P_d = \frac{\rho}{2\pi R^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iint_{S_L} \eta^2 dS_0 + \iint_{S_L} \left( u \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + v \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} \right) \eta^2 \cdot dS_0 \right\} + \frac{1}{\pi R^2} \iiint_D z \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} dD + \frac{1}{R} \chi(R, t) \quad (2.17)$$

$\chi(R, t)$  étant une fonction bornée, du premier ordre par rapport à la hauteur de vagues.

Il apparaît ainsi que les circonstances pour lesquelles des fluctuations de pression importantes pourraient se manifester par très grands fonds sont celles pour lesquelles le terme,

$$P'_d = \frac{\rho}{2\pi R^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \iint_{S_L} \eta^2 dS_0 \quad (2.18)$$

conserve une valeur finie pour  $R \rightarrow \infty$

Les quelques investigations auxquelles on s'est livré n'ont pas permis de dégager d'autre configuration que celle de Longuet-Higgins pour qu'il en soit ainsi.

Bien que ces investigations n'aient pas été menées d'une manière exhaustive, il paraît peu vraisemblable que des perturbations de surface libre, localisées sur une zone de dimension finie, puissent induire des fluctuations de pression à de très grandes profondeurs.

En s'appuyant sur la théorie de fluide parfait, la pression qui règne en eau très profonde est en effet directement lié à la constante de Bernoulli  $\theta(t)$ . Cette pression ne peut donc pas être fonction des variables d'espace ; comme celle-ci est très probablement nulle loin de la zone perturbée, elle devrait être nulle partout.

Cependant, de nombreuses campagnes de mesures en mer ont montré l'existence de micro-séismes assurément d'origine hydrodynamique.

Aussi est-il très probable que les effets d'origine visqueuse jouent un rôle essentiel dans les phénomènes constatés ; l'exploitation des formules (2.17) ou (2.18), établies dans le cadre d'une théorie des fluides réels, pourrait être précieuse pour confirmer ou infirmer cette hypothèse.

Pour l'heure, on s'est borné à effectuer un calcul académique ayant seulement pour objet de montrer qu'une telle hypothèse n'est pas à rejeter *a priori*.

La configuration considérée (fig. II.3) est celle d'une houle au large totalement réfléchi par un mur vertical indéfini, d'abscisse  $x=0$  ; ici, on admet que l'onde réfléchi s'atténue très lentement suivant la loi :

$$\eta^- = a \cdot e^{\epsilon x} \sin(kx + \omega t), \quad (2.19)$$

$\epsilon$  étant une quantité très petite, essentiellement positive. L'onde résultante a alors pour équation :

$$\eta = -a \left[ \sin(kx - \omega t) - e^{\epsilon x} \sin(kx + \omega t) \right], \quad x \leq 0 \quad (2.20)$$

En appliquant la formule (2.16) à tout le fluide compris entre le plan d'abscisse  $x=-L$  et le plan d'abscisse  $x=0$ , on obtient d'une manière approximative, du moins si  $L$  est choisi suffisamment grand pour que le terme  $e^{-\epsilon L}$  puisse être considéré comme négligeable devant l'unité :

$$\frac{P_d}{\rho g} = 4\pi \frac{a^2}{\lambda} \frac{1}{\epsilon L} \cos 2\omega t \quad (2.21)$$

En choisissant, par exemple,  $L = 5/\epsilon$  on a bien  $e^{-\epsilon L} = 0$  et par suite :

$$\frac{P_d}{\rho g} = \frac{4\pi}{5} \frac{a^2}{\lambda} \cos 2\omega t \quad (2.22)$$

Avec  $T=8s$  et  $a=2m$ , on obtient ainsi :

$$\frac{P_d}{\rho g} = 0,1 \cos 2\omega t, \text{ en mètres d'eau.}$$

Une telle fluctuation de pression est parfaitement décelable ; d'autant plus qu'ici, il n'y a aucune raison qu'elle soit uniformément répartie dans l'espace.

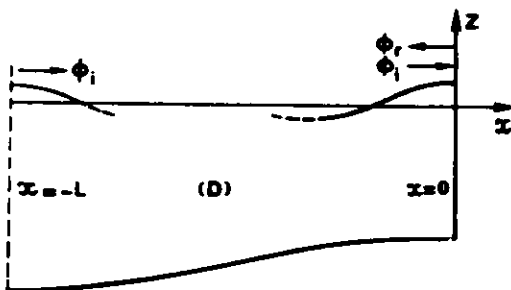


Figure II.3

Il y a peu être là une amorce d'explication sur l'origine des micro-séismes "hydrodynamiques" en mer très profonde ; cette explication allant d'ailleurs dans le sens des constatations selon lesquelles les plus grandes fluctuations de pression ne se manifestent que plusieurs heures après que ce soit produit une tempête sur le site considéré [2].

### III- Quelques considérations sur le transfert de masse associé à l'existence de la houle irrotationnelle exacte

#### III-1 Conventions

La houle sera caractérisée par les grandeurs indépendantes énumérées ci-dessous :

$h_m$ , le tirant d'eau moyen ;  
 $\lambda$ , la longueur d'ondes ;  
 $H$ , la hauteur de vagues crêtes à creux ;  
 $\langle q \rangle$ , le débit volumique du transfert de masse.

La célérité  $C$  et, par suite, la période  $T = \lambda/C$  seront alors considérées comme des grandeurs dépendantes des précédentes.

Les principaux développements seront effectués dans le repère mobile  $(A,XY)$ , déduit du repère fixe  $(O,xy)$  par une translation horizontale de vitesse constante, égale à la célérité  $C$  (figure III.1).

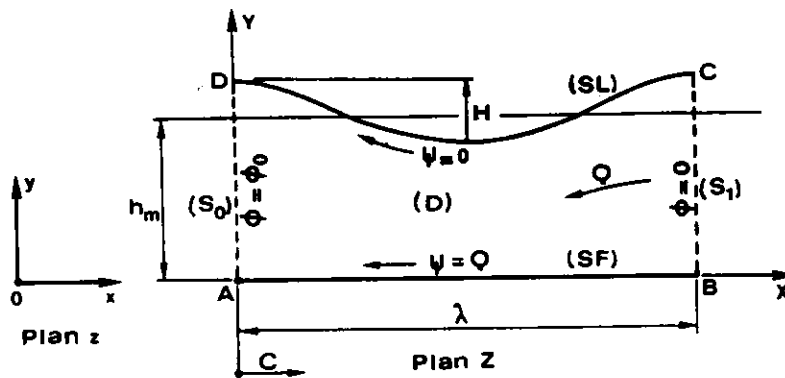


Figure III.1

L'écoulement, permanent dans un tel repère, est caractérisé par la fonction analytique de la variable complexe  $F(z) = \phi + i\psi$  qu'il reste à déterminer de manière à satisfaire les conditions aux limites suivantes sur les frontières du domaine fluide (D), compris entre deux crêtes successives :

$$\begin{cases} \psi = 0 \text{ et } Y + \frac{V^2}{2g} = C^{1/2}, \text{ sur la surface libre (SL) ,} \\ \phi = 0, \text{ sur la verticale (S}_1\text{), d' abscisse } \lambda, \\ \phi = \phi_0, \phi_0 > 0, \text{ sur la verticale (S}_0\text{), d' abscisse } x = 0, \\ \psi = Q, Q > 0, \text{ sur la surface du fond (SF)} \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $Q$  désigne le débit volumique du tube de courant (D) ;  $Q$  et  $\phi_0$  sont des constantes inconnues *a priori*.

#### III-2 Expressions de l'énergie cinétique et du transfert de masse associés à la houle irrotationnelle exacte

L'énergie cinétique de la houle, par unité de surface de mer, a pour expression :

$$E_c = \frac{\rho}{2\lambda} \iint_D v^2 dS, \quad (3.2)$$

$\vec{v}$  désignant le champ des vitesses absolues.

En y effectuant la substitution  $\vec{v} = \vec{V} + \vec{C}$ , il vient :

$$E_c = \frac{\rho}{2\lambda} \iint_D (V^2 + C^2 + 2\vec{C} \cdot \vec{V}) dS = \frac{\rho}{2\lambda} \left\{ Q \cdot \phi_0 + C^2 \lambda h_m + 2\vec{C} \cdot \iint_D \vec{V} dS \right\}$$

soit, d'après l'identité (1.1), appliquée au champ de vitesse à flux conservatif  $\vec{V}$  :

$$E_c = \frac{\rho}{2\lambda} \left\{ Q \cdot \phi_0 + C^2 \lambda h_m - 2C\lambda Q \right\} \quad (3.3)$$

Une fois résolu le problème cinématique posé en (3.1), tous les termes intervenant dans la formule ci-dessus sont connus, à l'exception de la vitesse de phase C.

Par ailleurs, le débit absolu qui traverse un plan vertical, fixe dans l'espace, a pour expression :

$$q(t) = -Q + C \cdot h(t) = -Q + C \cdot h(X), \quad (3.4)$$

de sorte que sa valeur moyenne est par conséquent :

$$\langle q \rangle = -Q + C \cdot h_m \quad (3.5)$$

Si ce débit de transfert de masse peut être considéré comme une donnée, au même titre que  $h_m$ ,  $\lambda$  et H, la valeur de la célérité devient connue, soit :

$$C = \frac{Q + \langle q \rangle}{h_m} \quad (3.6)$$

En effectuant cette substitution dans l'expression (3.3) de l'énergie cinétique, on obtient :

$$E_c = \frac{\rho}{2h_m} \left[ Q^2 \left( \frac{h_m}{\lambda} \cdot \frac{\phi_0}{Q} - 1 \right) + \langle q \rangle^2 \right] \quad (3.7)$$

Il apparaît ainsi que cette énergie est minimale pour  $\langle q \rangle = 0$ .

Comme l'énergie potentielle de la houle, calculée à partir de la solution du problème posé en (3.1), est indépendante de  $\langle q \rangle$ , il revient au même d'énoncer que l'énergie totale de la houle par unité de surface de mer est minimale lorsque le transfert de masse est nul.

### III-3 Superposition d'une houle et d'un courant

La notion de transfert de masse n'intervient nullement dans les équations (3.1) qui régissent l'écoulement décrit dans le repère mobile (A, X Y) ; il en résulte, entre autres, que la déformée de surface libre (SL) est parfaitement déterminée dès lors que les paramètres géométriques  $h_m$ ,  $\lambda$  et H sont connus ; *et cela quelle que soit la vitesse du courant.*

Seules sont fonctions du débit moyen de ce courant, la célérité C et la période  $T = \lambda/C$  (Cf. formule 3.6)

Dans un canal à houle, équipé ou non d'un dispositif de recirculation des courants, la situation paraît claire ; le transfert de masse est nul ou bien parfaitement connu par une mesure de débit effectuée dans la conduite de retour.

Il n'en est pas ainsi en mer ; la houle n'est pas susceptible d'être identifiée uniquement par sa période T et son amplitude crêtes à creux H. Encore faudrait-il connaître, soit sa célérité C soit sa longueur d'ondes  $\lambda$  ; auquel cas, ce serait le débit de transfert de masse  $\langle q \rangle$  qui serait déduit de l'application de la formule (3.5) après avoir résolu le problème posé en (3.1).

Dans ces conditions, quel est le modèle de houle de projet qui représente le mieux la réalité physique ?

Pour notre part, nous serions enclins à adopter celui qui impose que le débit de transfert de masse soit nul, du moins dans les régions connues pour ne pas être le siège de courants importants ; cette assertion s'appuie seulement sur le fait que l'énergie de la houle, par unité de surface de mer, est minimale lorsque ce transfert de masse est nul.



### III-4 Résolution du problème cinématique posé dans le repère mobile (A,XY)

Ce problème a été résolu par une méthode de singularités fondée sur l'utilisation d'une distribution superficielle de doublets normaux répartis sur la surface libre (SL) et sur la surface du fond (SF), depuis  $-\infty$  jusqu'à  $+\infty$  (figure III.2). Compte tenu de la périodicité spatiale du problème posé, le potentiel induit en tout point  $M(z)$  de l'espace par ces doublets, de densité  $\mu(M)$ , s'explicite ainsi :

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi} \Re e \ i \int_{\partial D} \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(M') - \alpha \lambda s}{z - z' - \lambda s} dz' \quad (3.8)$$

où  $\partial D$  désigne ici les éléments de la surface libre (SL) et de la surface du fond (SF), compris entre deux verticales distantes d'une longueur d'ondes  $\lambda$  ;  $\alpha$  étant une constante inconnue *a priori*, qui s'identifie d'ailleurs au rapport  $\phi_0/\lambda$ ,  $\phi_0$  étant le potentiel déjà introduit dans les formules (3.1).

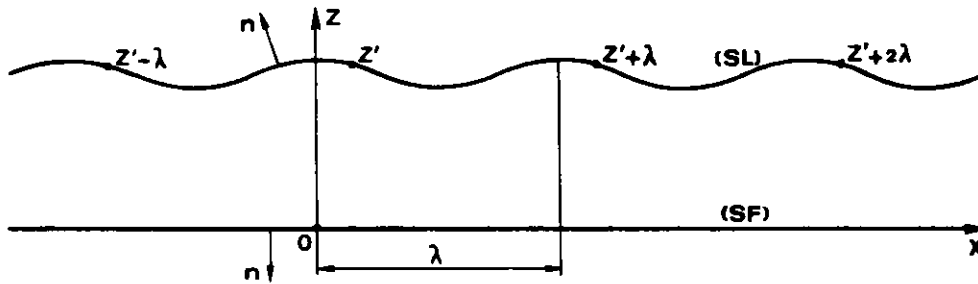


Figure III-2

En omettant la constante infinie qui affecte l'expression de ce potentiel, on obtient simplement :

$$\phi(z) = \frac{1}{2\lambda} \Re e \ i \int_{\partial D} [\mu(M) - \alpha(z - z')] \cdot \cotg\left(\pi \frac{z - z'}{\lambda}\right) dz' \quad (3.9)$$

D'où l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce qu'il convient de satisfaire pour assurer la condition de glissement en tous points de (SL) et de (SF)

$$\frac{1}{2} \mu(M) + \frac{1}{2\lambda} \Im m \int_{\partial D} \mu(M') \cdot \cotg\left(\pi \frac{z - z'}{\lambda}\right) dz' = \frac{\alpha}{2\lambda} \Im m \int_{\partial D} (z - z') \cdot \cotg\left(\pi \frac{z - z'}{\lambda}\right) dz' \quad (3.10)$$

A celle-ci il convient d'adjoindre la condition dynamique de surface libre, soit :

$$Y + \frac{V^2}{2g} = B \quad , \quad (3.11)$$

$B$  étant une constante dont on n'a nullement besoin de déterminer la valeur ; celle-ci dépend d'ailleurs des conventions adoptées en ce qui concerne les origines choisies pour compter les altitudes et les pressions.

La résolution du système non-linéaire constitué des équations (3.10) et (3.11), très fortement couplées, n'est pas triviale.

La démarche que nous avons adoptée consiste tout d'abord à déterminer la solution de l'équation intégrale (3.1) en s'imposant une forme de surface libre (SL') déduite d'une théorie approchée de la houle et en donnant à la constante  $\alpha$  la valeur unitaire ; pour cela, on a exploité une méthode de discrétisation classique consistant à admettre que la densité de doublet est constante par morceaux.

Comme cette densité de doublet  $\mu(M)$  s'identifie à la trace du potentiel  $\phi(z)$  sur toutes les frontières du domaine (D), on est alors en mesure de calculer  $V = d\phi/ds$  sur (SL') et, par suite, de déterminer les valeurs de la fonction :

$$B(X) = Y + \frac{V^2}{2g}, \quad 0 \leq Y \leq \lambda. \quad (3.12)$$

On ajuste ensuite la constante multiplicative  $\alpha$  de telle sorte qu'on ait :  $B(X=0) = B(X=\lambda/2) = B_0$ .

Les écarts relatifs ,

$$\varepsilon(X) = \frac{B(X) - B_0}{H}, \quad (3.13)$$

sont représentatifs de la plus ou moins bonne approximation de la solution obtenue à partir de la forme de la surface libre (SL') adoptée initialement.

Pour annuler ces écarts, on a mis en oeuvre une méthode d'approximations successives qui consiste essentiellement à poser :

$$\begin{cases} Y = \tilde{Y} + \eta \\ V = \tilde{V} + v, \end{cases} \quad (3.14)$$

à effectuer ces substitutions dans les équations (3.10) et (3.11) et à supposer que  $\eta$  et  $v$  sont suffisamment petits pour que l'on puisse négliger les termes quadratiques.

Le résolution du système d'équations linéaires ainsi obtenu fournit entre autres les valeurs de  $\eta = \eta(X)$  qui permettent de " construire " une nouvelle courbe support (SL'), présumée plus proche que la précédente de la courbe exacte recherchée (SL).

Les calculs sont alors repris exactement de la même manière que précédemment et ainsi de suite jusqu'à la  $n^{\text{ième}}$  itération pour laquelle on obtient :

$$\varepsilon_n(X) < 10^{-3} \quad (3.15)$$

La convergence du processus est très lente du fait qu'on a dû recourir à une méthode de sous relaxation pour maîtriser les instabilités numériques liées à la forte non-linéarité du problème.

En définitive, le programme de calcul élaboré à partir des considérations ci-dessus fournit, dans le repère mobile, toutes les caractéristiques d'une houle définie par les trois paramètres géométriques suivants :

- . la longueur d'ondes  $\lambda$  ;
- . la cote  $Y_{\min}$  des creux ;
- . la cote  $Y_{\max}$  des crêtes.

En pratique, c'est la profondeur d'eau moyenne  $h_m$  qui est habituellement connue ; dans ce cas, il est alors nécessaire de reprendre les calculs avec les nouvelles données :

$$Y'_{\min} = Y_{\min} + \Delta Y ; Y'_{\max} = Y_{\max} + \Delta Y$$

jusqu'à ce que le tirant d'eau calculé  $h'_m$  soit bien égal au tirant d'eau imposé  $h_m$  (cette opération est évidemment sans objet en eau très profonde). En admettant par ailleurs que le débit de transfert de masse  $\langle q \rangle$  est connu, ou imposé égal à zéro, on obtient immédiatement la valeur de la célérité  $C$  ainsi que celle de la période  $T$  (Cf. formule 3.6).

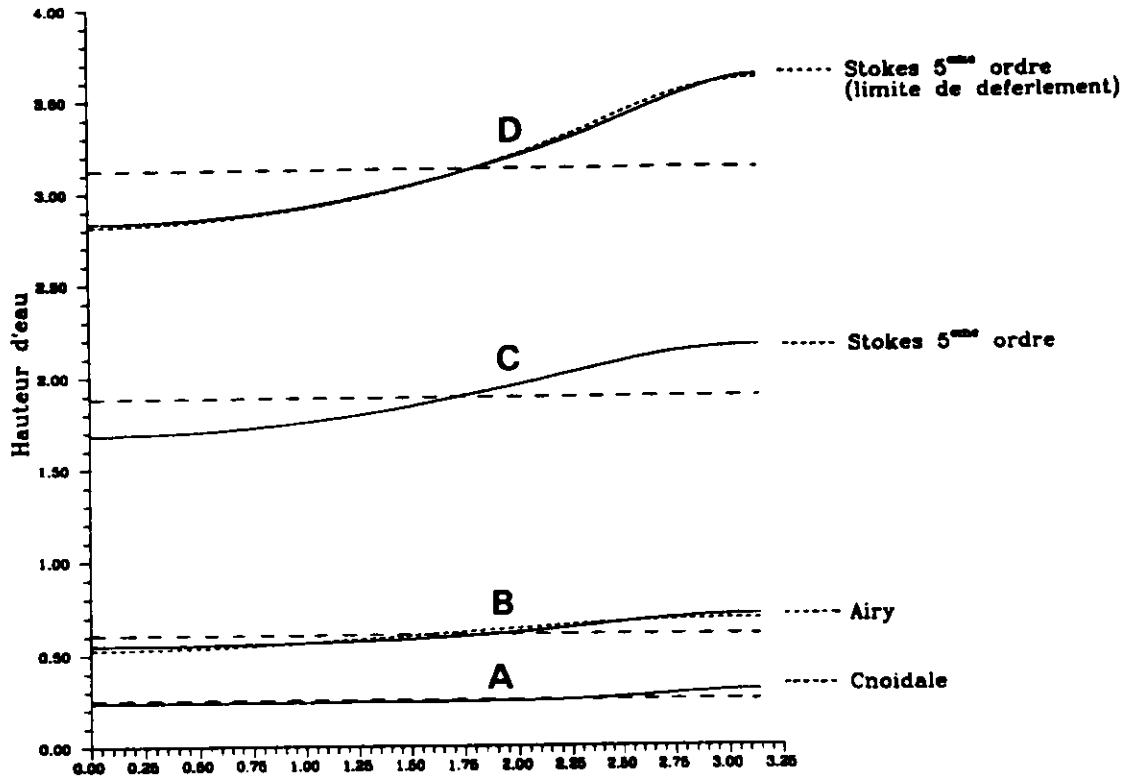
Mais , si c'est la valeur de cette période qui doit être considérée comme une donnée, les calculs doivent encore être repris en ajustant la longueur d'ondes  $\lambda$  jusqu'à ce que l'on obtienne  $T'_{\text{calculé}} = T_{\text{imposé}}$ .

Malgré une certaine lourdeur d'emploi, ce programme présente un certain nombre d'avantages :

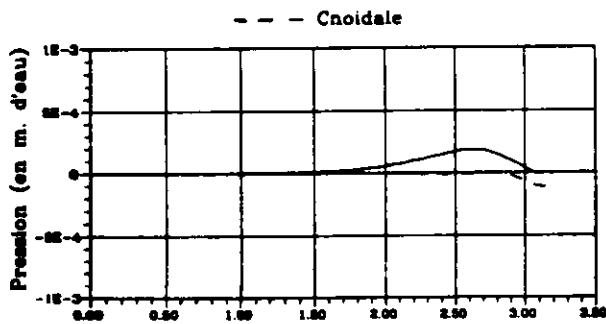
- . il est " universel ", en ce sens qu'il reste valable en toutes circonstances ; c'est à dire quelles que soient les valeurs du rapport  $H/\lambda$  ou  $H/h_m$  (sans toutefois dépasser les limites du déferlement) ;
- . il permet de juger du degré de précision fourni par les modèles classiques de houle ;
- . il fournit avec une très bonne précision la vitesse des particules ; en particulier au voisinage des crêtes, là où il existe une grande dispersion des résultats selon le modèle de houle considéré.

Les résultats de différents tests numériques sont présentés sur la planche (I) ; pour chacun des exemples traités, on a adopté une configuration pour laquelle les modèles de houle classiques sont réputés fiables. A titre de curiosité, on a également recherché les limites de validité de la houle d'Airy, en profondeur illimitée, lorsqu'on

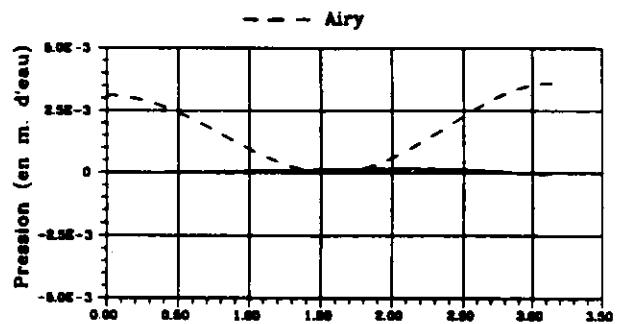
détermine la déformée de surface libre en résolvant exactement l'équation implicite  $a \cdot e^{by} \sin(kx) = y$  dans laquelle le paramètre  $a$  ne s'identifie d'ailleurs pas à la demi-hauteur crêtes à creux  $H$ . On constate que cette houle constitue une approximation tout à fait acceptable de la houle exacte pour des valeurs de la cambrure  $\gamma = H/\lambda$  n'excédant pas 6% (fig. III.3).



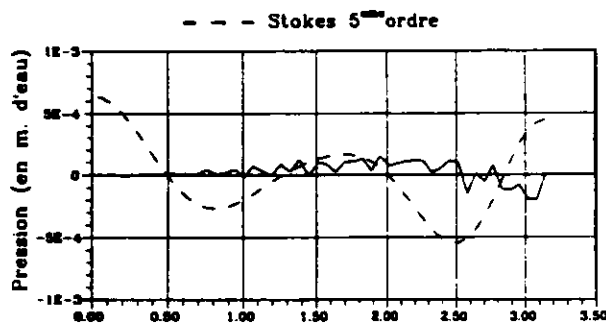
Dénivelées de la surface libre



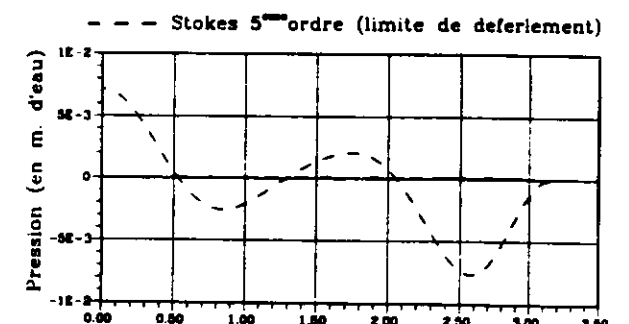
A



B



C



D

Pression sur la surface libre

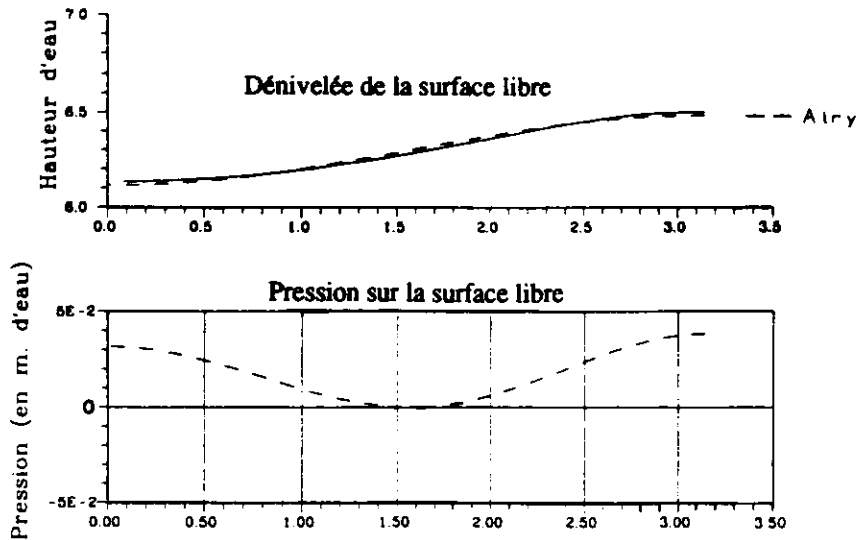


Figure III.3

### III-5 Commentaires

Tous les modèles de houle utilisés par les praticiens sont, du moins à notre connaissance, fondés sur l'hypothèse selon laquelle le potentiel absolu  $\Phi$  admet une périodicité spatiale, au même titre que les grandeurs physiques telles que la vitesse ou la pression ; à ce moment là, la célérité  $C$  est immédiatement connue dès lors qu'on a résolu le problème posé dans le repère mobile (A,X Y), soit :

$$C = \frac{\phi_0}{\lambda}, \quad (3.16)$$

en rappelant que  $\phi_0$  désigne la différence de potentiel relatif qui règne entre deux points d'abscisse  $X$  et  $X - \lambda$  (Cf. alinéa III-1).

L'énergie cinétique de la houle, par unité de surface de mer, ainsi que le débit volumique de transfert de masse sont alors déterminés par application des formules (3.3) et (3.5) ; il vient ainsi :

$$E_c = \frac{\rho C}{2} (C \cdot h_m - Q), \quad (3.17)$$

$$\langle q \rangle = C \cdot h_m - Q, \quad (3.18)$$

et par suite :

$$\langle q \rangle = \frac{2E_c}{\rho C} \quad (3.19)$$

On constate en particulier que, contrairement à une idée très répandue, la houle simple d'Airy s'accompagne d'un transfert de masse non nul. Il s'agit, certes, d'un terme de deuxième ordre ; mais pourquoi ne négligerait-on pas, pour la même raison, les énergies cinétique et potentielle de la houle ainsi que l'énergie transmise par celle-ci ?

Par ailleurs, l'application de la formule (3.19) fournit des résultats parfaitement irréalistes : en canal à houle, bien évidemment, mais aussi en mer ; en considérant, pour fixer les idées, une houle de 8 secondes de période et de 4 mètres de creux, on obtiendrait en effet :  $\langle q \rangle \approx 1,6 \text{ m}^3/\text{s}$ , par unité de largeur de crêtes ..., alors que pour une telle houle, de cambrure  $\gamma = 4\%$ , le modèle d'Airy est encore convenablement représentatif de la réalité physique.

Il paraît très difficile d'admettre qu'un tel débit pourrait être réduit, voire annulé, par les effets d'origine visqueuse surtout en mer très profonde.

L'hypothèse selon laquelle le potentiel absolu admet une périodicité spatiale semble donc bien devoir être écartée ; à ce moment là, on a nécessairement :

$$\varphi(M, t) = -\varepsilon \cdot C \cdot X + f(X - C t, Y), \quad (3.20)$$

$\varepsilon$  étant une constante qui dépend de la valeur attribuée au débit volumique de transfert de masse  $\langle q \rangle$ .

Dans le cas où on impose  $\langle q \rangle = 0$ , la célérité de l'onde a pour valeur :

$$C = \frac{Q}{h_m} \quad (\text{Cf. formule 3.6})$$

et non pas comme c'est l'usage :

$$C^* = \frac{\phi_0}{\lambda} \quad (\text{Cf. formule 3.16})$$

La différence de ces célérités a pour expression :

$$C - C^* = -C \left( \frac{h_m}{\lambda} \cdot \frac{\phi_0}{Q} - 1 \right); \quad (3.21)$$

une quantité essentiellement négative, comme cela apparaît immédiatement à l'examen de la formule (3.7).

D'où, l'expression de la constante  $\varepsilon$ , introduite dans (3.20), lorsque le transfert de masse est nul :

$$\varepsilon_0 = \frac{h_m}{\lambda} \cdot \frac{\phi_0}{Q} - 1; \quad (3.22)$$

soit, d'après la formule (3.7) :

$$\varepsilon_0 = \frac{2E_c}{\rho C^2 h_m}; \quad (3.23)$$

Elle a, par conséquent, pour ordre de grandeur :

$$\varepsilon_0 = \frac{\pi H^2}{4\lambda h_m} \cdot \frac{1}{\text{th}\left(2\pi \frac{h_m}{\lambda}\right)}; \quad (3.24)$$

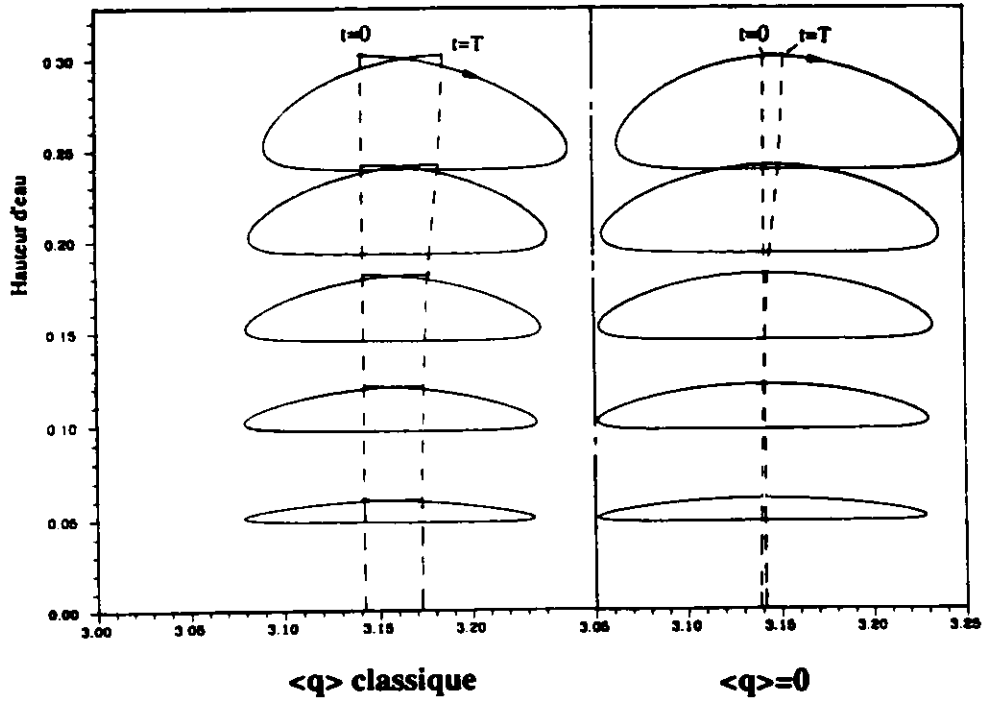
Il en résulte que la vitesse du contre-courant,  $U_0 = -\varepsilon_0 C$ , prend des valeurs d'autant plus importantes que la profondeur d'eau  $h_m$  est plus faible, toutes choses restant égales par ailleurs. Mais quand cette profondeur d'eau est extrêmement faible, les développements précédents cessent d'être valables du fait qu'on n'a pas pris en compte les interactions d'origine visqueuse entre le fluide et la surface du fond. On espère apporter prochainement les corrections qui s'imposent à ce propos.

Pour l'heure, on a dû se borner à présenter quelques résultats de calcul illustrant les différences constatées en ce qui concerne la cinématique de la houle, selon qu'on impose un transfert de masse nul ou égal à celui obtenu lorsqu'on admet que le potentiel absolu  $\phi$  est périodique (Cf. planches II et III).

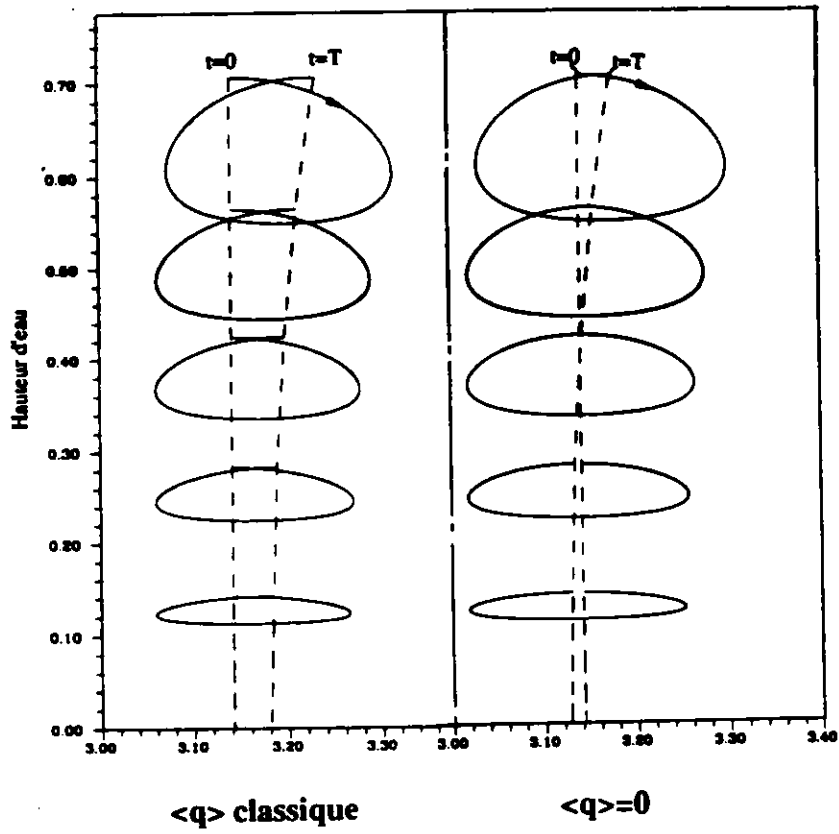
Les écarts les plus importants sont observés dans le voisinage des crêtes, comme cela était d'ailleurs bien prévisible.

## Références

- [1] Longuet-Higgins. "A theory of the origin of microseisms". Department of Geodesy and Geophysics, University of Cambridge - Vol.243; A.857 - Septembre 1950.
- [2] Spahr C. Webb. "Long-period acoustic and seismic measurements and ocean floor currents". IEEE Journal of oceanic engineering, - Vol.13, N°4 - Octobre 1988.

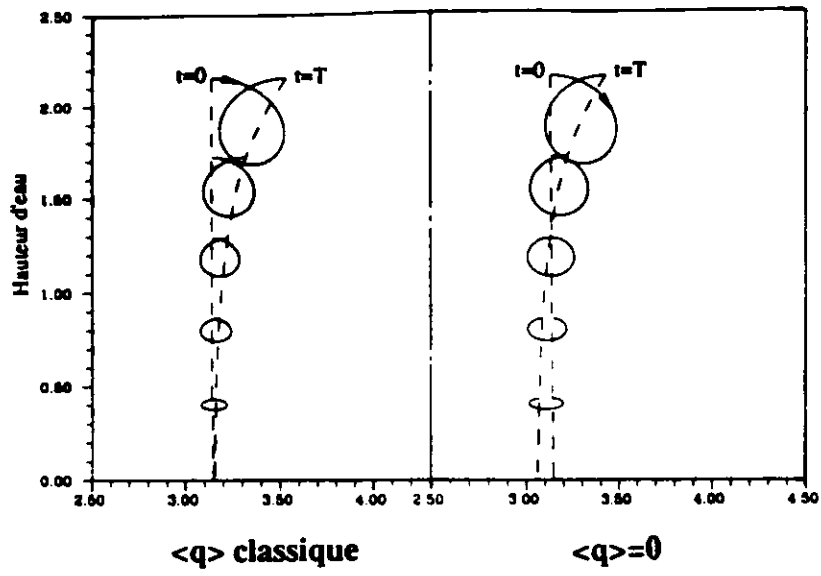


Cas A

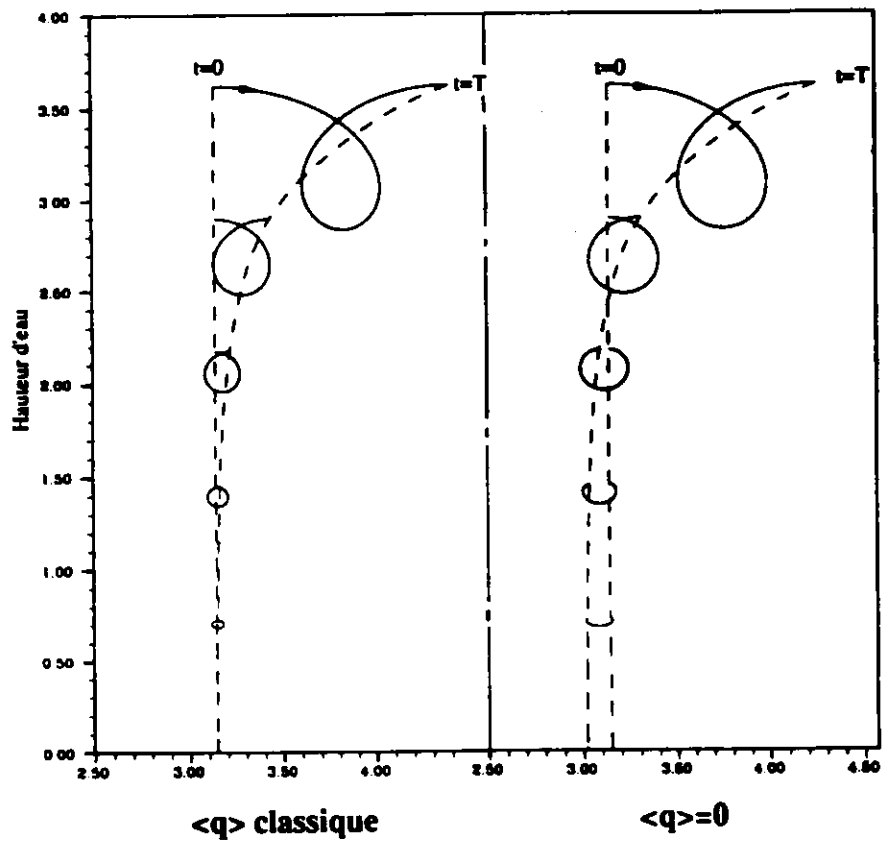


Cas B

Planche II



Cas C



Cas D

