

4e JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE

1, 2, 3 mars 1993 - Nantes

**ETUDE THEORIQUE DE LA REFRACTION
D' ONDES DE GRAVITE**

Ph. NICOLAS & J.P. GERMAIN

Institut de Mécanique de Grenoble

L.E.G.I.

B.P. 53 X

38041 GRENOBLE CEDEX

(Tel : 76 82 51 18 / Fax : 76 82 50 01)

RESUME

On étudie théoriquement la réfraction d'une houle sinusoïdale sur un fond lentement variable. La résolution du système linéarisé, basée sur une méthode d'échelles multiples génère, au premier ordre, la classique théorie des rayons. Une insuffisance de celle-ci est montrée dans le cas d'un fond cylindrique présentant une rupture de pente et une théorie généralisée, introduisant des ondes évanescentes piégées par la rupture de pente, est proposée. Après une analyse bibliographique sur la question de la nature de la phase, l'étude du second ordre d'approximation met en évidence une variation verticale de la phase. Son calcul littéral permet d'évaluer l'influence des paramètres qui interviennent.

ABSTRACT

We present a theoretical study of the propagation of a sinusoidal wave over a slowly varying depth. To solve the linearized problem, a multiple scale method is applied that gives at the first order the classical ray theory. We show that this theory can't describe the case of a break into the bottom slope and we propose a generalized method that introduce vanishing waves trapped by the slope break. After a bibliographic study about the nature of the phase, our second order approximation shows a vertical variation of the phase. This result is different from what can be found in the litterature. The analytical derivation lead to the influence of the different parameters.

INTRODUCTION

En hydrodynamique on appelle réfraction toute variation de longueur d'onde, de célérité, d'amplitude ou de direction d'une houle, uniquement due à une évolution lente de la profondeur. Ce phénomène, physiquement observable à la surface par tout un chacun (les vagues n'arrivent-elles pas parallèlement à la plage?) se manifeste également dans la masse du fluide. Les études relatives à ce phénomène remontent au milieu du siècle. Les équations différentielles qui le décrivent, dérivèrent d'abord des travaux sur la lumière de SNELL et sur l'hypothèse que l'énergie est constante entre deux rayons (MUNK&ARTHUR (1952)). KELLER(1958), BERKHOFF(1976) et MEI(1989) obtinrent des équations équivalentes au premier ordre de méthodes d'approximations asymptotiques. C'est la "théorie des rayons" ou "approximation de l'optique géométrique". Elle permet de tracer la direction de propagation des ondes ainsi que leurs crêtes (considérées comme représentant de surfaces d'onde verticales). MICHE(1944), dans le cas bidimensionnel, BATTJES(1968) montrèrent une variation verticale de la phase non décrite par les théories précédentes.

Nous entreprenons une étude de la réfraction basée sur une méthode d'approximations asymptotiques. Après avoir montré une des limites de la théorie des rayons, nous mettons en oeuvre une théorie généralisée qui nous permet de résoudre les problèmes posés par le passage sur une rupture de pente. Nous étudions ensuite le second ordre de notre méthode d'approximations asymptotiques qui montre une variation verticale de la phase que nous calculons dans le cas tridimensionnel.

1 - POSITION DU PROBLEME ET EQUATIONS

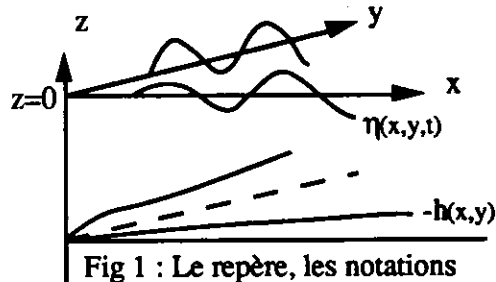


Fig 1 : Le repère, les notations

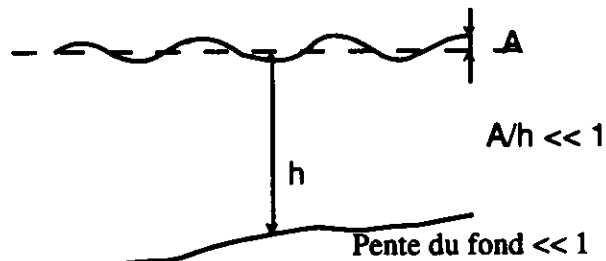


Fig 2 : Hypothèses : pente faible, amplitude petite

Les hypothèses sont :

- Fluide newtonien, incompressible, non visqueux,
- Fond imperméable, surface libre isobare et imperméable,
- Ecoulement irrotationnel, établi, sinusoïdal dans le temps, de pulsation ω ,
- $\eta(x,y,t)$ petite devant la profondeur faiblement variable.

En utilisant la description eulérienne de l'écoulement, l'équation de la conservation de la masse et l'irrotationnalité du mouvement induisent l'existence d'un potentiel des vitesses Φ harmonique dans la masse du fluide. Les équations à la surface et au fond s'écrivent :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \right)_{z=h} &= 0 \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=\eta} &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{z=\eta} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right)_{z=\eta} + g \eta &= 0 \end{aligned}$$

Non seulement des termes non linéaires apparaissent dans les conditions aux limites mais la position de la surface libre, sur laquelle s'applique une condition limite, est elle-même une inconnue. Une théorie analytique

exacte pour le problème des ondes de gravité étant pratiquement impossible à développer, nous allons le linéariser autour d'une solution exacte connue : le repos décrit par $\Phi_0(x,y,z,t)=0$ $\eta_0(x,y,t)=0$. Nous utilisons l'hypothèse de vagues de faible amplitude : selon la méthode du petit paramètre de Poincaré, nous cherchons des solutions voisines de cette solution exacte, développables en série entière d'un petit paramètre σ non défini a priori.

$$\begin{aligned} \Phi(x,y,z,t) &= \Phi_0(x,y,z,t) + \sigma \Phi_1(x,y,z,t) + \sigma^2 \Phi_2(x,y,z,t).. \\ \eta(x,y,t) &= \eta_0(x,y,t) + \sigma \eta_1(x,y,t) + \sigma^2 \eta_2(x,y,t) \dots \end{aligned}$$

Après report de ces expressions dans les équations, on écrit qu'elles sont vérifiées à chaque ordre de σ . Les équations écrites à la surface libre $z = \eta(x,y)$, qui est inconnue, peuvent être ramenées sur $z = 0$, grâce au théorème des accroissements finis. A l'ordre de σ^1 on peut obtenir le système d'équations de la variable Φ_1

$$(1.1) \begin{cases} \Delta \Phi_1 = 0 & \text{dans la masse du fluide} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} = 0 & \text{sur } z = -h(x,y) \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} & \text{sur } z = 0 \end{cases} \quad \text{avec } \eta_1 = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right)_{z=0}$$

C'est le système auquel nous consacrons cette étude, nous bornant à étudier la théorie correspondante, dite linéarisée. Ecrivons maintenant que l'écoulement est de pulsation ω : $\Phi_1(x,y,z,t) = \phi_1(x,y,z)e^{i\omega t}$ et utilisons l'hypothèse d'une pente faible c'est à dire de l'ordre d'un petit paramètre ϵ sans rapport avec σ . Dans (1.1) effectuons le changement de coordonnées

$$\bar{x} = \epsilon x \quad , \quad \bar{y} = \epsilon y \quad (\text{qui conduit à } \frac{\partial h}{\partial \bar{x}} = \alpha(1) \quad , \quad \frac{\partial h}{\partial \bar{y}} = \alpha(1))$$

On obtient alors les équations du système linéarisé distordu :

$$(1.2) \begin{cases} \epsilon^2 \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial \bar{y}^2} \right) + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} = 0 & \text{dans la masse du fluide} \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial z} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{x}} \frac{\partial h}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \bar{y}} \frac{\partial h}{\partial \bar{y}} \right) = 0 & \text{sur le fond } z = -h(\bar{x}, \bar{y}) \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi_1 = 0 & \text{sur } z = 0 \end{cases}$$

2 - ETUDE AU PREMIER ORDRE : THEORIE DES RAYONS. THEORIE DES RAYONS GENERALISEE

2-1 bases physiques. traduction théorique

La forme la plus simple que peut prendre une onde progressive est l'onde plane. Son potentiel est recherché, sous la forme :

$$\phi_1 = A e^{i\lambda(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} \quad \text{avec} \quad A = \text{cste} * f(z)$$

(La dépendance temporelle, déjà éliminée, n'apparaît pas dans la phase.)

Notons que * l'amplitude A est horizontalement constante. On peut l'écrire comme étant dépendante des variables lentes. $A = A(\bar{x}, \bar{y}) * f(z)$

* la phase $S = \lambda_0(x \cos \alpha + y \sin \alpha) = \frac{\lambda_0(\bar{x} \cos \alpha + \bar{y} \sin \alpha)}{\epsilon}$

Lorsqu'un tel train d'onde pénètre dans une zone à fond lentement variable, le nombre d'onde λ_0 varie, ce qui induit un changement graduel de la vitesse de phase. Les fronts d'onde ne sont alors plus des plans. Ce changement de caractéristiques n'est pas décrit par les solutions "ondes planes" (Fig 3,4,5).

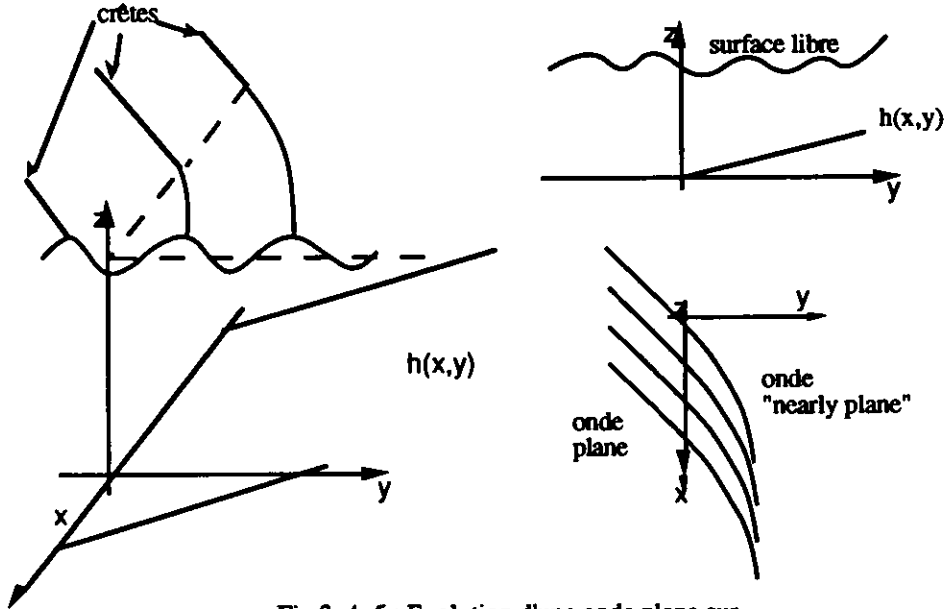


Fig 3, 4, 5 : Evolution d'une onde plane sur un fond variable

Pour décrire ces nouveaux types d'ondes, cherchons des solutions plus générales sous la forme

$$\phi_1 = A(\bar{x}, \bar{y}, z) e^{S(\bar{x}, \bar{y}, z)} = A(\bar{x}, \bar{y}, z) e^{S(\bar{x}, \bar{y}, z)/\epsilon}$$

où A, l'amplitude, et S, la phase sont des fonctions réelles

On fait alors apparaître l'influence de la pente du fond caractérisée par le petit paramètre ϵ . Quand le fond varie lentement, on observe expérimentalement que l'amplitude varie faiblement c'est pourquoi on astreint A à varier avec les variables lentes \bar{x}, \bar{y} alors qu'on laisse la phase prendre une forme quelconque (car $\frac{\bar{x}}{\epsilon} = x$). Cette formulation, cohérente avec le cas particulier du fond horizontal, fait apparaître une différence d'échelles caractéristiques entre les variations de la phase et de l'amplitude. Cette méthode, appelée W.K.B, est l'idée de base de la théorie des rayons. De telles ondes lentement modulées sont alors appelées "nearly plane waves" (LeBLOND & MYSAK(1978)). En reportant cette expression dans (1.2), on obtient un système de 3 équations complexes qu'on peut décomposer suivant leurs parties réelle et imaginaire, ce qui donne finalement deux équations dans la masse (Mr, Mi), deux à la surface libre (SLr, SLi) et deux sur le fond (Fr, Fi). Chercher les inconnues A et S sous forme des développements pairs du petit paramètre ϵ (Eq(2.0)) permet d'obtenir un système d'équations à vérifier à chaque ordre de ϵ

$$\begin{aligned} A(\bar{x}, \bar{y}, z) &= A_0(\bar{x}, \bar{y}, z) + \epsilon^2 A_2(\bar{x}, \bar{y}, z) + \epsilon^4 A_4(\bar{x}, \bar{y}, z) \dots\dots\dots \\ S(\bar{x}, \bar{y}, z) &= S_0(\bar{x}, \bar{y}, z) + \epsilon^2 S_2(\bar{x}, \bar{y}, z) + \epsilon^4 S_4(\bar{x}, \bar{y}, z) \dots\dots\dots(2.0) \end{aligned}$$

a) Etude du premier ordre significatif : l'ordre (- 2)

$$\frac{\partial S_0}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_0 = S_0(\bar{x}, \bar{y}) \quad S_0 \text{ ne dépend pas de } z.$$

b) Etude du second ordre significatif : l'ordre(0)

$$A_0(\bar{x}, \bar{y}, z) = a_0(\bar{x}, \bar{y}) \operatorname{ch}[\lambda_0(z+h)] \quad (2.1)$$

$$\text{avec la relation d'Airy } \frac{\omega^2}{g\lambda_0(\bar{x}, \bar{y})} = \operatorname{th}[\lambda_0(\bar{x}, \bar{y})h(\bar{x}, \bar{y})] \quad (2.2)$$

$$\text{et la relation eikonale } \left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right] = \lambda_0^2(\bar{x}, \bar{y}) \quad (2.3)$$

La relation eikonale définit S_0 moyennant une condition limite horizontale (qui pourrait par exemple être un angle d'incidence de l'onde plane pénétrant dans le domaine). L'étude à cet ordre ne permet pas de connaître a_0 . Sa détermination se fait grâce à l'étude de l'ordre supérieur

c) Etude partielle du troisième ordre significatif : l'ordre(2)

On détermine a_0 grâce à l'équation de l'ordre supérieur Mi,2, dont on peut montrer qu'elle se ramène à une équation de conservation de l'énergie et aux conditions aux limites Fi,2 et SLi,2. On obtient donc la relation qui définit complètement a_0 moyennant une condition limite horizontale sur a_0

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(a_0^2 C_h \frac{\partial S_0}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(a_0^2 C_h \frac{\partial S_0}{\partial \bar{y}} \right) = 0 \quad \text{avec} \quad C_h = \frac{h}{2} + \frac{\operatorname{sh}(2\lambda_0 h)}{4\lambda_0} \quad (2.4)$$

Les inconnues de l'ordre 0 sont alors complètement déterminées. On retiendra que :

- * à cet ordre la phase ne dépend pas de z ,
- * la relation d'Airy (5) détermine λ_0 ,
- * la relation eikonale (6), $\overrightarrow{\operatorname{grad} S_0}^2 = \lambda_0^2$, se résout géométriquement grâce à la donnée d'une condition limite horizontale,
- * la détermination des inconnues du premier ordre a nécessité une résolution d'équation de l'ordre supérieur,
- * ces résultats sont équivalents à ceux obtenus par BERKHOFF(1976), sous une apparence différente.

2 - 2 Quelques définitions et propriétés

front d'onde : surface sur laquelle la phase est constante.

ligne de crête : intersection d'un front d'onde et de la surface.

rayon d'onde (ou orthogonale) : courbe en tout point perpendiculaire aux fronts d'onde. Les rayons sont tangents au vecteur $\overrightarrow{\operatorname{grad} S_0}$ donc au vecteur unitaire suivant :

$$\vec{n} = \frac{p\vec{i} + q\vec{j}}{\sqrt{p^2 + q^2}} \quad \text{avec} \quad p = \frac{\partial S_0}{\partial \bar{x}} \quad (2.5) \quad \text{et} \quad p^2 + q^2 = \lambda_0^2$$

$$q = \frac{\partial S_0}{\partial \bar{y}}$$

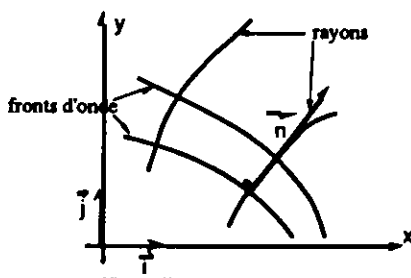


Fig 6 : Rayons et fronts d'onde

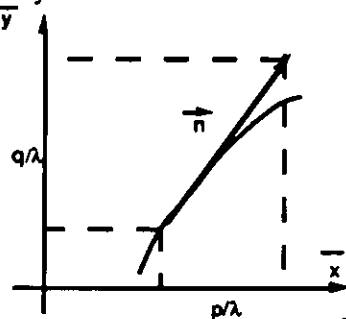


Fig 7 : Composantes du vecteur \vec{n}

Si s est la mesure de l'arc orienté le long du rayon, les coordonnées des points du rayon et la phase le long de ce rayon sont alors données en fonction de s par les formules

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \frac{q}{p} \quad (2.6) \quad \text{et} \quad \frac{dS_0}{ds} = \lambda_0 \quad (2.7)$$

Pour déterminer la variation de l'amplitude le long du rayon, BERKHOFF(1976) écrit l'équation différentielle (2.4) définissant a_0 le long d'un rayon. En posant $\beta = a_0^2 * C_h$ et après quelques manipulations, il obtient alors l'équation différentielle du second ordre définissant β (et donc l'amplitude) :

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} + P \frac{d\beta}{ds} + Q = 0 \quad \text{avec} \quad P = \frac{1}{\lambda_0^2} \left(p \frac{\partial \lambda_0}{\partial \bar{x}} + q \frac{\partial \lambda_0}{\partial \bar{y}} \right)$$

$$\text{et} \quad Q = \frac{2}{\lambda_0^2} \left(q \frac{\partial \lambda_0}{\partial \bar{x}} + p \frac{\partial \lambda_0}{\partial \bar{y}} \right) - \frac{1}{\lambda_0^3}$$

On est donc passé d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre à une équation différentielle du second ordre. Notons que si l'onde passe au dessus d'une rupture de pente du fond, les dérivées spatiales de λ_0 ne seront pas continues et P et Q ne le seront pas non plus. La solution de cette équation différentielle s'écrira en tout point :

$$\beta(s) = A e^{\left(\frac{-P + \sqrt{P^2 - 4Q}}{2} \right) s} + B e^{\left(\frac{-P - \sqrt{P^2 - 4Q}}{2} \right) s}$$

La détermination des deux constantes A et B assurera nécessairement la continuité de l'amplitude et de sa dérivée suivant s en dépit de la discontinuité de la pente. Ces résultats sont en accord avec ceux obtenus par MUNK & ARTHUR(1952) par dérivation des lois de SNELL.

2 - 3 Cas d'un fond cylindrique. première limite de la théorie des rayons

2 - 3 - 1 Equations

L'Hypothèse d'un fond cylindrique simplifie les calculs et permet d'obtenir des solutions analytiques tout en conservant la physique du problème. Supposons que la profondeur ne dépende plus que de la variable, il en ira de même pour le nombre d'onde déterminé par la relation d'Airy: $h = h(\bar{y}) \Rightarrow \lambda_0 = \lambda_0(\bar{y})$

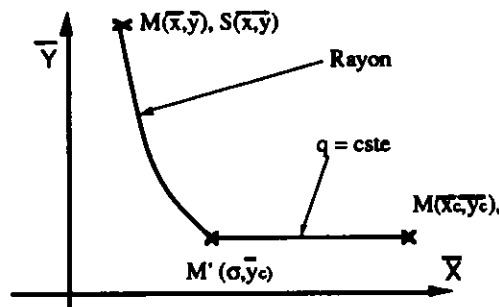


fig 8 :

Le rayon passant par le point (x_c, y_c) (cf fig 8) est défini par

$$\bar{x} - \bar{x}_c = \int_{\bar{x}}^{\bar{x}_c} \frac{p_c d\rho}{\sqrt{\lambda_0^2(\rho) - p_c^2}}$$

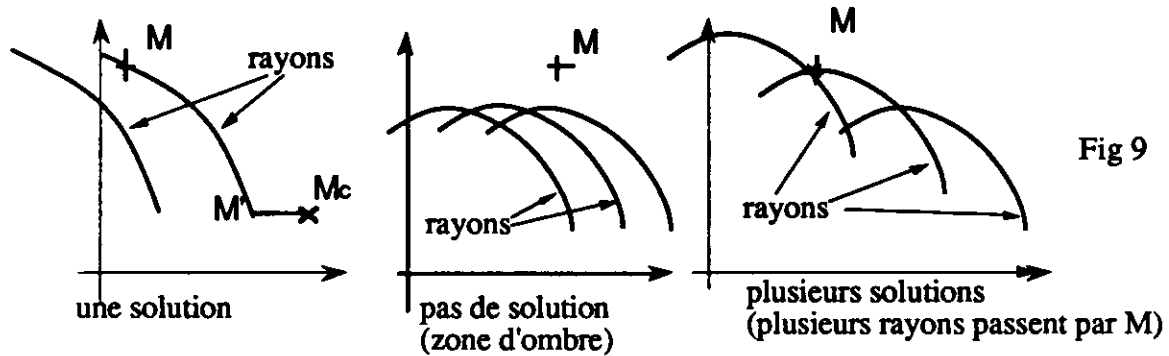
La phase en tout point du domaine, où il passe un rayon, s'écrit (cf fig 8) :

$$S_0(\bar{x}, \bar{y}) = S_0(\bar{x}_c, \bar{y}_c) + \int_{\bar{x}_c}^{\bar{x}} p(\rho) d\rho + \int_{\bar{y}_c}^{\bar{y}} \frac{\lambda_0^2(\rho)}{\sqrt{\lambda_0^2(\rho) - p^2(\sigma)}} d\rho$$

L'abscisse σ du point d'intersection du rayon qui passe par M et de la droite $y = y_c$ (cf fig 8) étant déterminée géométriquement par la formule

$$\bar{x} - \sigma = p(\sigma) \int_{\bar{x}}^{\bar{y}} \frac{d\rho}{\sqrt{\lambda^2(\rho) - p^2(\sigma)}}$$

Remarquons que cette équation peut avoir zéro, une ou plusieurs solutions (cf fig 9)



L'amplitude s'écrit le long d'un rayon

$$a_0^2(\bar{x}, \bar{y}) = a_0^2(\bar{y}_c) * \frac{C_b(\bar{y}_c)}{C_b(\bar{y})} * \frac{\lambda_0^2(\bar{y}_c) - p^2(\sigma)}{\lambda_0^2(\bar{y}) - p^2(\sigma)} * \frac{1}{1 + p'(\sigma) \int_{\bar{x}}^{\bar{y}} \frac{\lambda_0^2(\rho) d\rho}{(\lambda_0^2(\rho) - p^2(\sigma))^{3/2}}} \quad (2.8)$$

Remarquons que si on rencontre une rupture de pente, les dérivées spatiales de h étant discontinues, celles de a_0 le sont aussi. Nous sommes en désaccord avec BERKHOFF (1976) sur ce point précis tout en prenant conscience que notre résultat est physiquement non admissible.

2 - 3 - 2 Application : le cas du talus ascendant ($h_1 > h_3$)

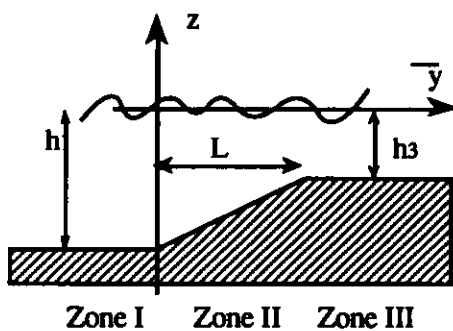


Fig 10 : le talus, les zones, les dimensions, le repère

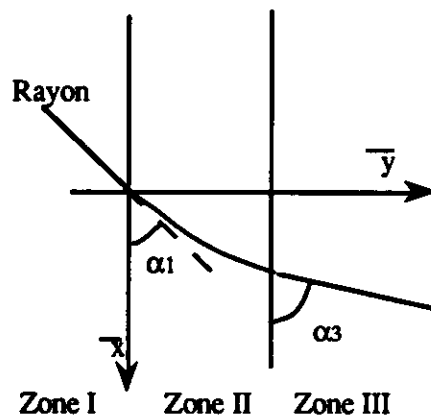


Fig 11 : Schema qualitatif de réfraction sur un talus "ascendant"

zone I : une onde plane d'amplitude constante a_1 se propage, avec un angle d'incidence α_1 avec la direction x .

Son nombre d'onde est défini par la relation d'Airy : $th\lambda_{01} h_1 = \frac{\omega^2}{g\lambda_{01}}$ Sa phase s'écrit sous la forme

$$\frac{S}{\varepsilon} = \lambda_1(\bar{x} \cos \alpha_1 + \bar{y} \sin \alpha_1) / \varepsilon . \text{ Ceci nous sert de condition limite sur } y=0$$

zone II : Les caractéristiques de l'onde varient lentement. Le nombre d'onde $\lambda_{02}(y)$ varie en accord avec la relation d'Airy de λ_{01} à λ_{03} . Le long d'un rayon, $p=p_c=\lambda_{01}\cos\alpha_1$ et l'angle $\theta = (\vec{OX}, \vec{n})$ est défini par $\operatorname{tg}\theta = \frac{q}{p_c} = \frac{(\lambda_{02}^2(\bar{y}) - p_c^2)^{1/2}}{\lambda_{01}\cos\alpha_1}$. C'est une fonction croissante de y . Sur la rupture de pente, $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\alpha_1$ (cf Fig 9): la tangente au rayon ne subit pas de discontinuité. Pour $y = L$, $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\alpha_3$ (cf Fig 11) ce qui définit l'angle de sortie du rayon. Remarquons que S , $\frac{\partial S}{\partial x}$, $\frac{\partial S}{\partial y}$ sont continues sur $y=0$. L'amplitude ne dépend que de y et vérifie :

$$a_0(\bar{y}) = a_1 * \left(\frac{2\lambda_{01}h_1 + \operatorname{sh} 4\lambda_{01}h_1}{2\lambda_{02}(\bar{y})h(\bar{y}) + \operatorname{sh} 4\lambda_{02}(\bar{y})h(\bar{y})} * \frac{\lambda_{02}(\bar{y})}{\lambda_{01}} \right)^{1/2} * \left(\frac{\lambda_{01}^2 - p_c^2}{\lambda_{02}^2(\bar{y}) - p_c^2} \right)^{1/4} \quad (2.9)$$

$\frac{\partial a_0}{\partial y}$, reliée aux dérivées de la profondeur et du nombre d'onde n'est pas continue en $y = 0$ et $y = L$. Ce résultat est directement opposé à celui obtenu par BERKHOFF décrit au 2-2. Il faut donc résoudre le problème de la discontinuité des dérivées spatiales de l'amplitude au passage sur la rupture de pente.

zone III: Si une onde sinusoidale s'y propage, elle est plane et régie par la relation $\operatorname{th}\lambda_{03} h_3 = \frac{\omega^2}{g\lambda_{03}}$.

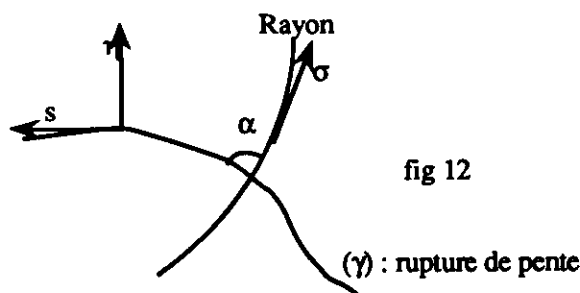
2 - 4 Théorie des rayons généralisée

2 - 4 - 1 Aspects théoriques

Face aux lacunes d'une théorie de l'eau peu profonde incapable, en particulier de décrire le passage d'un obstacle par une houle, GERMAIN (1971) imagina des solutions dites perturbations locales dont l'influence diminue exponentiellement lorsqu'on s'éloigne d'un certain point. Nous allons procéder de façon similaire en cherchant des ondes évanescentes générées par le passage sur une rupture de pente d'une solution de (1.2) vue précédemment, maintenant appelée onde "génératrice" ou "ordinaire". Elles seront cherchées sous la forme $\phi_1 = A(\bar{x}, \bar{y}, z) e^{(R+iS)(\bar{x}, \bar{y}, z)}$ où A , R et S sont des fonctions réelles. Le terme complexe (et non imaginaire pur) de l'exponentielle permet une modulation de l'amplitude. La linéarité de (1.2) induit que toute combinaison linéaire de solutions est encore solution, on pourra donc sommer d'éventuelles solutions de ce type avec l'onde ordinaire.

Soit γ la courbe représentant une rupture de pente, définie par l'équation : $\gamma : f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. On impose sur γ $R(\bar{x}, \bar{y}, z) = 0$. Notons κ la mesure de l'arc le long de la courbe γ , s la mesure de l'arc le long d'un rayon de l'onde ordinaire. Sur γ , S est imposée par l'onde génératrice et on note

$$\lambda = \frac{\partial S}{\partial \kappa} = \frac{dS}{ds} \cos \alpha = \lambda_0 \cos \alpha \quad \text{sur } \gamma$$



Développons A , R et S en séries paires du petit paramètre ϵ dans le système (1.2). Comme précédemment, on obtient des équations dans la masse, à la surface libre et sur le fond, décomposables suivant leurs parties réelles et imaginaires et vérifiées à tout ordre de ϵ . L'étude suivant les ordres croissants de ϵ nous donne successivement :

$$R_0 = R_0(\bar{x}, \bar{y}), \quad S_0 = S_0(\bar{x}, \bar{y})$$

$$\text{Mr},0 \quad \frac{\partial^2 A_0}{\partial z^2} + (\mu^2 - \lambda^2) A_0 = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial R_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial R_0}{\partial \bar{y}} \right)^2 = \mu^2 \\ \left(\frac{\partial S_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial S_0}{\partial \bar{y}} \right)^2 = \lambda^2 \end{cases}$$

$$\text{Mi},0 \quad \frac{\partial R_0}{\partial \bar{x}} \frac{\partial S_0}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial R_0}{\partial \bar{y}} \frac{\partial S_0}{\partial \bar{y}} = \vec{\nabla} R_0 \cdot \vec{\nabla} S_0 = 0$$

avec comme conditions limites :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_0}{\partial z} &= 0 && \text{sur le fond} \\ \frac{\partial A_0}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} A_0 &= 0 && \text{à la surface.} \end{aligned}$$

On exclut le cas $\mu^2 - \lambda^2 < 0$ qui se ramène à la situation d'un angle d'incidence α , de l'onde sur la rupture de pente, nul. Dès lors, on peut poser $\mu^2 - \lambda^2 = k^2$. La condition limite à la surface libre définit une infinité de valeurs propres $k_m = \lambda_m$ du problème de Sturm-Liouville par l'équation d'Airy trigonométrique $-\frac{\omega^2}{g\lambda_m} = \text{tg } \lambda_m h$. Les fonctions propres associées sont de la forme $\cos \lambda_m(z+h)$. On est alors amené à définir μ_m et λ_m qu'on pourra déterminer grâce aux équations

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} R_{0,m}^2 - \vec{\nabla} S_{0,m}^2 &= k_m^2 = \lambda_m^2 && \text{(définition de } k) \\ \vec{\nabla} R_{0,m} \cdot \vec{\nabla} S_{0,m} &= 0 && \text{(eq Mi},0) \end{aligned}$$

De plus on notera $A_{0,m} = a_{0,m} \cos \lambda_m(z+h)$

Pour étudier les variations de ces fonctions sur γ , projetons ces équations sur les directions κ, η . (cf Fig 12). On obtient :

$$R_{0,m} = 0 = \text{constante sur } \gamma \Rightarrow S_{0,m} = S_{0,m}(\kappa)$$

$$\frac{\partial R_{0,m}}{\partial \eta} = \pm \sqrt{\lambda_m^2 + \lambda_0^2 \cos^2 \alpha} \quad \forall m$$

Le signe à imposer est celui pour lequel, lorsqu'on s'éloigne indéfiniment de γ , l'onde correspondante s'amortisse. La connaissance de $R_{0,m} (= 0)$ et de sa dérivée spatiale suivant η sur la courbe γ permet par application du théorème de Taylor-Mac-Laurin de construire graphiquement une courbe voisine sur laquelle $R_{0,m} = \Delta R = \text{cte}$. On peut alors renouveler cette opération avec la nouvelle courbe obtenue. $S_{0,m}$ est alors connue partout puisqu'elle est constante suivant η . La solution la plus générale s'écrit à cet ordre

$$\phi_1(\bar{x}, \bar{y}, z) = a_0(\bar{x}, \bar{y}) \text{ch}[\lambda_0(z+h)] e^{iS_0(\bar{x}, \bar{y})} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m(\bar{x}, \bar{y}) \cos \lambda_m(z+h) e^{iR_{0,m} + iS_{0,m}(\bar{x}, \bar{y})} \quad (2.10)$$

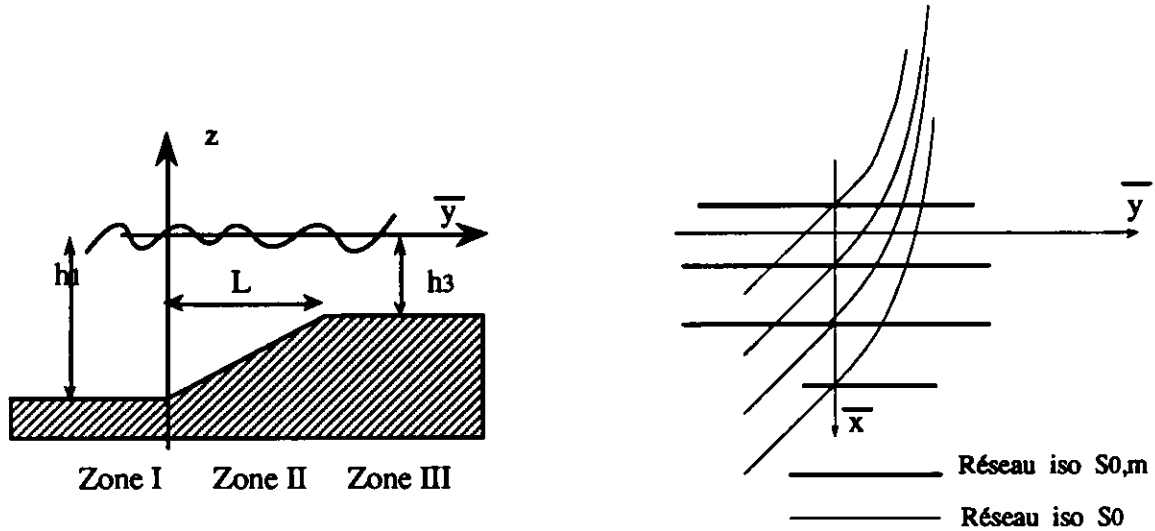
avec $\frac{\omega^2}{g\lambda_0} = \text{th}\lambda_0 h$ et $-\frac{\omega^2}{g\lambda_m} = \text{tg } \lambda_m h$

où $a_{0,m}$ vérifiant (2.11) est complètement déterminée par sa valeur sur γ

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(a_{0,m}^2 C_i \frac{\partial S_{0,m}}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(a_{0,m}^2 C_i \frac{\partial S_{0,m}}{\partial \bar{y}} \right) = 0 \quad \text{avec} \quad C_i = \frac{h}{2} + \frac{\sin(2\lambda_m h)}{4\lambda_m} \quad (2.11)$$

2 - 4 - 2 ondes piégées dans le cas du talus cylindrique

On s'intéresse au passage sur la rupture de pente située en $y = 0$ qui est donc l'équation de la courbe γ . L'onde génératrice est une onde progressive plane.



Sur la courbe γ , on a $\frac{\partial S_{0,m}}{\partial \bar{x}} = p_c = \lambda_m$, $\frac{\partial S_{0,m}}{\partial \bar{y}} = 0$ donc $R_m(\bar{y}) = \pm \int_{y_0}^{\bar{y}} \sqrt{\lambda_m^2(\rho) + p_c^2} d\rho$

Le signe de R_m est choisi de façon telle que R_m décroisse lorsqu'on s'éloigne de γ .

Zone I $R_m(\bar{y}) = + \int_{y_0}^{\bar{y}} \sqrt{\lambda_m^2 + \lambda_0^2 \cos^2 \alpha} d\rho$ Zone II $R_m(\bar{y}) = - \int_{y_0}^{\bar{y}} \sqrt{\lambda_m^2(\rho) + \lambda_0^2 \cos^2 \alpha} d\rho$

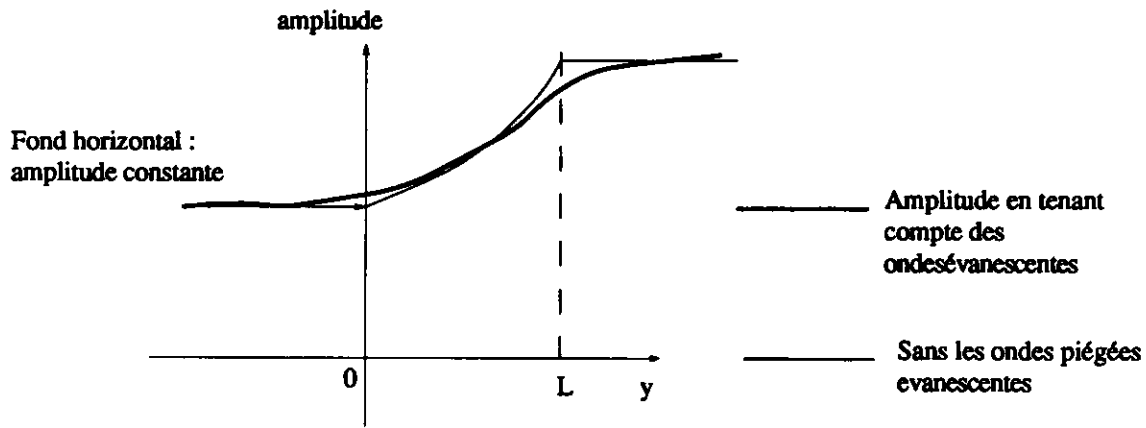
On remarque que la décroissance n'est pas symétrique. Le raccord des potentiels de part et d'autre de la rupture de pente sur $y = 0$ montre que

$$a_m = \text{constante} \quad (=0 \text{ s'il n'y a pas de rupture de pente})$$

Le raccord des dérivées normales s'exprime par la relation

$$\begin{aligned} a_{00}(\bar{y}_c) \operatorname{sh} \lambda_0(z+h) \left[\frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\lambda_0(z+h))_{y=0^+} - \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\lambda_0(z+h))_{y=0^-} \right] \\ = \\ \sum_{m=1}^{\infty} a_{0m}(\bar{y}_c) \sin \lambda_m(z+h) \left[\frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\lambda_m(z+h))_{y=0^+} - \frac{\partial}{\partial \bar{y}} (\lambda_m(z+h))_{y=0^-} \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

La projection de (2.12) sur la base de fonctions propres du système Sturm-Liouville $\operatorname{ch} \lambda_0(z+h)$, $\cos \lambda_m(z+h)$, m variant de 1 à ∞ , nous donne un système linéaire d'un infinité de relation à une infinité d'inconnues et permet théoriquement le calculs des a_{0m} . La qualité du lissage des discontinuités dépend du nombre de modes évanescents dont on tient compte. A ce point, on a montré que le long d'une rupture de pente il existe des ondes piégées et que elles et elles seules permettent de décrire le passage d'une onde ordinaire sur une rupture de pente en assurant la continuité physiquement indispensable, des dérivées spatiales de l'amplitude.



3 - ETUDE AU SECOND ORDRE. VARIATION VERTICALE DE LA PHASE

3 - 1 Analyse bibliographique.

BATTJES (1968) montre que la phase varie suivant la verticale. Son raisonnement est le suivant : les équations SL_i et Fi (respectivement conditions aux limites à la surface et sur le fond) expriment que les fronts d'ondes sont perpendiculaires à la surface libre et au fond. La surface libre est en moyenne horizontale alors que la profondeur varie. Le front d'onde est donc nécessairement incurvé. Il suppose alors une convergence uniforme du vecteur flux d'énergie défini par $\vec{F} = \frac{1}{2} \rho \omega A^2 \vec{\nabla} S$ entre le fond et la surface libre et une remontée du fond linéaire et parallèle à la direction de propagation, (cas bidimensionnel) pour finalement retrouver le résultat de **MICHE (1944)** : les fronts d'ondes sont des sections de cercles dont il détermine le centre et le rayon.

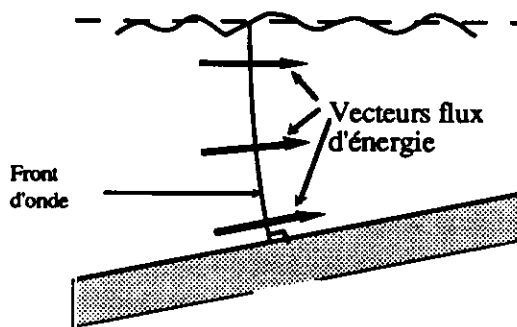


Fig 12 : Resultat de Battjes(1968)

BERKHOFF (1976) n'exclut pas à priori que la phase puisse varier suivant la verticale mais ses travaux, limités au premier ordre, ne peuvent mettre en évidence une variation verticale de la phase, comme on l'a vu.

KELLER (1958) & MEI (1989) cherchent des solutions de (1.2) en développant l'amplitude complexe en série d'un petit paramètre (2.1) ce qui leur permet de ne pas développer la phase.

$$(2.1) \quad \phi(\bar{x}, \bar{y}, z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-i\varepsilon)^n \phi_n \right) e^{i S_0(\bar{x}, \bar{y})} / \varepsilon \quad \text{KELLER \& MEI}$$

Notre développement s'écrit

$$(2.2) \quad \phi(\bar{x}, \bar{y}, z) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} A_{2l}(\bar{x}, \bar{y}, z) \right) e^{i \left(\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{2m} S_{2m}(\bar{x}, \bar{y}, z) \right)} / \varepsilon \quad \text{NOUS}$$

(2.1) semble à priori imposer une phase ne dépendant pas de la variable verticale z , mais les termes en amplitude, dépendant de z sont complexes, et peuvent être reportés dans la phase. Montrons l'équivalence de ces expressions. L'étude à l'ordre de $(\varepsilon)^0$ montre que $S_0 = S_0(\bar{x}, \bar{y})$. (2.2) peut donc s'écrire :

$$\phi(\bar{x}, \bar{y}, z) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} A_{2l}(\bar{x}, \bar{y}, z) \right) \left[e^{i \left(\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^{2m-1} S_{2m}(\bar{x}, \bar{y}, z) \right)} e^{i S_0(\bar{x}, \bar{y})} / \varepsilon \right]$$

Si on développe e^{ix} en série entière, cette expression peut s'écrire sous la forme :

$$\phi(\bar{x}, \bar{y}, z) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} A_{2l}(\bar{x}, \bar{y}, z) \right) \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n TP_{2n}(\bar{x}, \bar{y}, z) + \sum_{n=1}^{\infty} i^{2n-1} TI_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}, z) \right] e^{i S_0(\bar{x}, \bar{y})} / \varepsilon$$

Dans le terme TP, les puissances de ε sont toutes paires; dans le terme TI, elles sont toutes impaires. Il existe donc une suite T_n réelle, dont les termes sont tous d'ordre 1, telle que

$$\phi(\bar{x}, \bar{y}, z) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} A_{2l}(\bar{x}, \bar{y}, z) \right) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} T_{2n}(\bar{x}, \bar{y}, z) + \sum_{n=1}^{\infty} (i\varepsilon)^{2n-1} T_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}, z) \right] e^{i S_0(\bar{x}, \bar{y})} / \varepsilon$$

On développe alors le produit. Il existe alors une série ϕ_n telle que

$$\phi(\bar{x}, \bar{y}, z) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} \phi_{2n}(\bar{x}, \bar{y}, z) + \sum_{n=1}^{\infty} (i\varepsilon)^{2n-1} \phi_{2n-1}(\bar{x}, \bar{y}, z) \right] e^{i S_0(\bar{x}, \bar{y})} / \varepsilon = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-i\varepsilon)^n \phi_n(\bar{x}, \bar{y}, z) \right) e^{i S_0(\bar{x}, \bar{y})} / \varepsilon$$

C'est la forme sous laquelle Keller et Mei cherchent le potentiel. CQFD. Quelle différence existe-t'il entre les deux développements dont nous avons montré l'équivalence?

La démonstration suppose que les développements sont faits jusqu'à l'infini, or nous n'étudierons, chacun de notre côté qu'un nombre fini de termes. Si leurs sommes sont égales, il n'en va pas de même des sommes partielles ni de l'importance relatives des premiers termes de la série, le problème étant de ramener le plus possible de la physique dans les premiers ordres. L'amplitude complexe (qui "reporte de la phase dans l'amplitude") de Keller et Mei permet de ne développer que l'amplitude. Il est clair que cela simplifie les calculs. Nous faisons un choix différent et préférons garder la notion de module (reel) et phase pour décrire un nombre complexe. Nous développons donc l'amplitude et la phase.

3 - 2 Etude théorique

3 - 2 - 1 Equations du second ordre

On intègre le second ordre significatif de l'équation Mi suivant la verticale de 0 à une profondeur z constante. L'utilisation des conditions limites SLi,2 et Fi,2 nous donne S_2 à une constante additive $F_2(\bar{x}, \bar{y})$ ne dépendant que de x et y , près.

$$S_2(\bar{x}, \bar{y}, z) = \frac{B}{4C_h^2} \frac{\omega^2 g^3}{(g^2 \lambda_0^2 - \omega^4)^2} [Z \operatorname{th} Z] + \frac{C_h B}{\lambda_0^2} \left[\lambda_0 - \frac{Z}{2C_h} \right]^2 + F_2(\bar{x}, \bar{y})$$

$$\text{avec } B = \frac{\partial h}{\partial \bar{x}} \frac{\partial S_0}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial h}{\partial \bar{y}} \frac{\partial S_0}{\partial \bar{y}}, \quad C_h = \frac{h}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2\lambda_0 h}{4\lambda_0} \quad \text{et} \quad Z = \lambda_0(z + h)$$

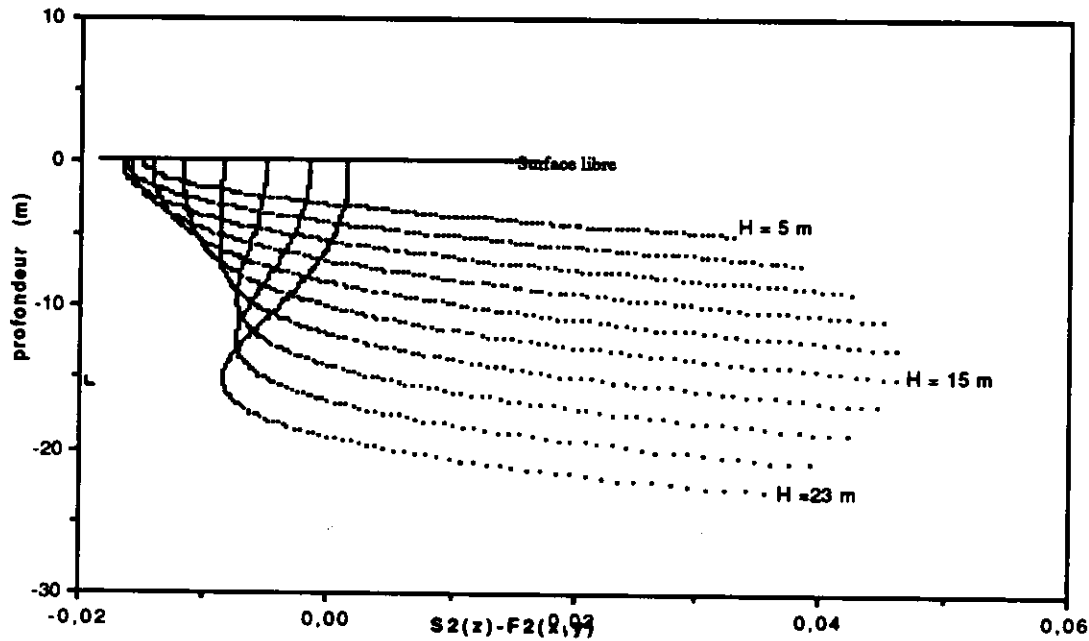
$F_2(\bar{x}, \bar{y})$ pourra être déterminée par l'étude de l'équation dans la masse de l'ordre supérieur, Mr,2, qui est une équation différentielle du second ordre avec second membre et l'utilisation des équations limite Fr,2 et SLr,2

pour obtenir :

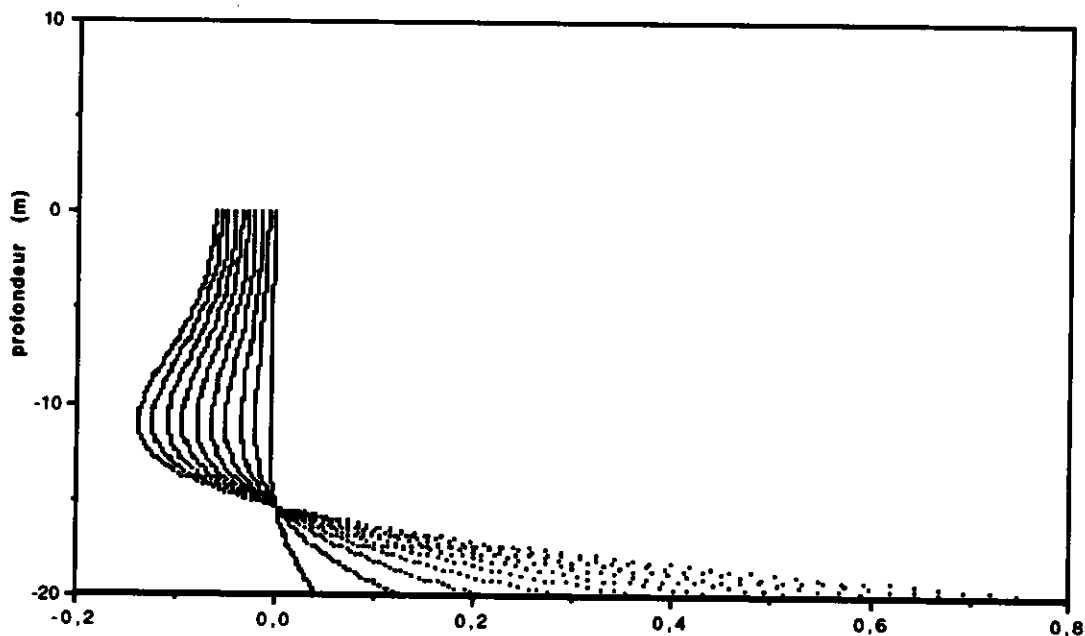
$$\frac{\partial S_0}{\partial \bar{x}} \frac{\partial F_2}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial S_0}{\partial \bar{y}} \frac{\partial F_2}{\partial \bar{y}} = G_{\text{connu}}(\bar{x}, \bar{y}, a_2)$$

qui détermine F_2 à a_2 près moyennant une condition limite horizontale. Nous avons alors complètement exploité les équations de l'ordre 2. a_2 sera déterminée à l'ordre supérieur par le même processus, F_2 sera alors complètement déterminée. Ce processus récursif pourra être entrepris à tous les ordres pairs de ϵ .

INFLUENCE DE LA PROFONDEUR SUR LA VARIATION VERTICALE DE S



vertical variation for different slopes



CONCLUSION

Nous avons montré deux aspects nouveaux de la propagation d'une houle sur un fond lentement variable.

Au premier ordre d'approximation : lors du passage sur une rupture de pente d'une onde sinusoidale, les dérivées de l'amplitude, reliées aux dérivées de la bathymétrie, ne sont pas continues. L'introduction de modes évanescents, qui décroissent exponentiellement lorsqu'on s'éloigne de la rupture de pente, permet de décomposer cette discontinuité sur l'infinité de fonctions propres d'un système de Sturm-Liouville.

Au second ordre d'approximation : sans être en contradiction avec les publications antérieures, l'étude du second ordre de notre développement montre une variation verticale de la phase soumise aux influences de la profondeur et de la pente.

BIBLIOGRAPHIE

BATTJES (1968)

"Refraction of water waves". J of the Waterways and Harbours Division, Nov 1968.

BERKHOFF J.C.W (1976)

"Mathematical model for simple harmonic linear water waves. Waves diffraction and refraction". Delft Hydraulics Laboratory, Publication no.163.

GERMAIN (1972)

"Théorie générale des mouvements d'un fluide parfait pesant en eau peu profonde de profondeur constante". C.R.A.S., Paris, T.274, P997-1000.

KELLER J.B (1958)

"Surface waves on water of non uniform depth". J of Fluid Mechanics, 4, 607-614.

LEBLOND P.H & MYSAK L.A (1978)

"Waves in the ocean". Elsevier scientific publishing company.

MEI C.C (1989)

"The applied dynamics of ocean surface waves". World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd.

NICOLAS P, GERMAIN J.P, M.J PINETTES M.J (1992)

"Surface waves refraction , vertical variation of the phase". Com AGU congress 1992, New Orleans

MUNK & ARTHUR (1952)

"Wave intensity along a refracted ray". Nat Bur Stds US Circ, gravity waves, 95-109