

4e JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE

1, 2, 3 mars 1993 - Nantes

## **Etude numérique du détachement tourbillonnaire autour de deux cylindres par une Méthode de Vortex**

**Yves-Marie Scolan**  
Norges Tekniske Høgskole  
Institutt for Marin Hydrodynamikk  
7034 Trondheim (Norvège)

### **Résumé**

L'étude du comportement dynamique d'un groupe de risers soumis à l'action d'un courant et/ou des vagues nécessite de bien modéliser le mouvement du fluide dans les interstices. On se propose ainsi de résoudre les équations bidimensionnelles de Navier-Stokes en régime laminaire et pour des fluides incompressibles autour de deux cylindres de section circulaire et de position relative arbitraire. Le modèle numérique complet est la combinaison de principalement trois techniques: la Méthode d'Intégrale de Frontière, un Solveur d'Equations Elliptiques et la Technique des Transformations Conformées. Des résultats sont obtenus pour différents arrangements et types d'écoulement, et ils sont comparés aux mesures expérimentales disponibles.

### **Summary**

The study of the dynamical behavior of a group of risers submitted to the action of current and/or waves, requires a good modelling of the fluid motion in the gaps. Thus, the two-dimensional Navier-Stokes equations are solved in the incompressible and laminar flow regime around two circular cylinders of arbitrary relative position. The global numerical scheme is the combination of mainly three techniques: the Boundary Integral Method, an Elliptic Solver and the Technique of Conformal Transformations. Results are obtained for different arrangements and types of flow, and those are compared to the available experimental measurements.

# 1 Introduction

On simule un écoulement de fluide visqueux autour de deux cylindres circulaires de même rayon en utilisant une méthode Mixte Euler-Lagrange: la Méthode Vortex-In-Cell est combinée aux techniques dites d'Operator Splitting et de Random Walk. Le champ de vorticité est représenté par des vortex discrets qui sont transportés dans le fluide en résolvant les équations de Navier-Stokes en régime subcritique.

Afin d'étudier l'interaction entre les deux corps, une transformation conforme est utilisée: le domaine extérieur à deux cylindres est transformé en un anneau limité par deux cercles concentriques.

Le schéma numérique global est la combinaison de trois différentes méthodes que sont la Méthode d'Intégrale de Frontière, un Solveur d'Equations Elliptiques et une Transformation Conforme. L'utilisation de ces trois méthodes est décrite ici et certaines difficultés numériques sont soulignées.

Différents arrangements de cylindres ont été étudiés pour des écoulements réguliers ou oscillants. Les résultats sont comparés aux mesures expérimentales actuellement disponibles pour des nombres de Keulegan - Carpenter relativement faibles et des nombres de Reynolds subcritiques. L'influence de la largeur de l'espacement entre les deux corps est également étudiée: le plus petit espace considéré étant la moitié du rayon des deux cercles.

Les résultats obtenus montrent que le modèle numérique rend bien compte des phénomènes physiques. Le code nécessite néanmoins certaines améliorations; le but étant d'obtenir une meilleure régularité de la force calculée sur chacun des corps ainsi qu'une optimisation du temps de calcul. De futurs développements prévoient également l'étude de sections autres que circulaires grâce à l'utilisation de transformations conformes additionnelles.

## 2 Le modèle théorique

### 2.1 Les Méthodes Vortex-In-Cell et de Random Walk

Le noyau du schéma numérique qui est utilisé ici, est la combinaison de la Méthode Vortex-In-Cell, telle qu'elle a été introduite par Christiansen (1973) et de la Technique dite d'Operator Splitting utilisée par Chorin (1973) pour simuler le transport de vorticité. Durant les vingt dernières années, ces méthodes ont été largement utilisées et on doit souligner, à ce propos, les contributions importantes de Smith et Stansby (1986   1991).

La formulation du problème est faite en terme de vorticité ( $\omega$ ) et de fonction courant ( $\psi$ ); il en résulte l'équation de Poisson:

$$\Delta\psi = -\omega \quad (1)$$

Le terme source est représenté par des vortex discrets, chacun transportant une certaine quantité de circulation constante en temps:

$$\omega(x, y) = \sum_{l=1}^{N_v} \Gamma_l \delta(x - x_l) \delta(y - y_l) \quad \delta \equiv \text{fonction Dirac.} \quad (2)$$

Lors de la résolution de l'équation de Poisson, la circulation de chaque vortex est distribuée aux noeuds des cellules constituant un maillage eulérien qui couvre tout le domaine de calcul. Ceci se fait en utilisant un schéma de pondération bilinéaire tel qu'il a été introduit par Christiansen (1973).

A tout les niveaux de la méthode de résolution, l'équation de Poisson est résolue dans un anneau: par conséquent le Solveur Elliptique sera composé d'une Méthode de Différences Finies dans la direction radiale et d'une Transformation de Fourier Rapide dans la direction azimutale.

La génération de vortex a lieu sur le corps: on y vérifie une condition d'adhérence ( $\vec{u} = \vec{0}$ ) en annulant la seule composante tangentielle de la vitesse ( $\vec{u} \cdot \vec{t}$ ); celle-ci est calculée aux noeuds du maillage sur le corps lors de la résolution de l'équation de Poisson et de nouveaux vortex sont introduits en ces mêmes noeuds, leur circulation est fournie par la formule:

$$\Gamma \equiv (\vec{u} \cdot \vec{t}) dl \quad (3)$$

où  $dl$  désigne la longueur d'un arc élémentaire entourant chaque point de production de vorticité.

On transporte la vorticité dans le fluide en résolvant l'équation de Navier Stokes en régime laminaire:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial\omega}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\omega = \nu\Delta\omega \quad (4)$$

où  $\nu$  est la viscosité cinématique. On utilise la Technique d'Operator Splitting. La partie convection (ou équation d'Euler) conduit à déplacer les vortex avec la vitesse ambiante; cela s'effectue sans modification de leur circulation. La vitesse de convection dérive de la fonction courant; elle est calculée aux noeuds du maillage puis interpolée au point vortex en utilisant une nouvelle fois le schéma de pondération bil naire. C'est un schéma d'intégration de type Runge-Kutta d'ordre 2 qui réalise complètement la convection; cela signifie que deux résolutions de l'équation de Poisson sont nécessaires à chaque pas de temps.

La partie diffusion – aussi appelée équation de la chaleur – consiste à superposer au mouvement de convection un déplacement aléatoire à chaque vortex. Ces déplacements suivent une loi normale de valeur moyenne nulle et de déviation standard  $\sqrt{2\nu\Delta t}$  où  $\Delta t$  est le pas de temps.

La conséquence principale du déplacement des vortex est de modifier la vitesse induite sur le corps et donc une nouvelle génération de vortex est nécessaire. Cela conduit à une production continue de vorticité. A noter que le théorème de Kelvin doit être vérifié à tout instant puisqu'aucune circulation n'existe dans le fluide à l'instant initial.

Du fait du type de modélisation de la diffusion, il appar it dans toutes les variables locales (vorticité, fonction courant, vitesse ...) et par conséquent dans les efforts eux-mêmes, une faible composante aléatoire qui croît comme:  $\sqrt{\Delta t/Re}$ .

Le dernier aspect de ce modèle numérique concerne les vortex qui traversent la paroi solide du corps et qu'il convient de traiter afin de conserver le taux de circulation en temps en chaque point de production de vorticité. La technique utilisée ici s'inspire de

celle développée par Smith et Stansby (1989): les vortex "indiscrètes" sont coalescés aux deux noeuds les plus proches de la frontière. Une fois terminée l'étape de diffusion, la circulation ainsi absorbée est ensuite re-injectée dans le fluide sous forme de vortex à une certaine distance radiale du corps de l'ordre de la déviation standard du mouvement de diffusion. Cette technique conduit principalement à une diminution très sensible du nombre de vortex présents dans le fluide spécialement lors d'écoulements oscillants pour lesquels les grosses structures vorticales sont ramenées périodiquement sur le corps.

## 2.2 Extension aux configurations multi-corps

Les techniques déjà existantes consistent à utiliser des maillages recouvrants (voir Stansby et al. 1987); dans ce cas les résolutions successives du maillage le plus grossier jusqu'au maillage le plus fin fournissent les conditions aux limites de chaque problème aux limites intermédiaire. Des résultats de pression ont été comparés aux mesures expérimentales en régime d'écoulement turbulent (Penoyre et Stansby 1986). Cependant, comme il a été souligné par Vada et Skomedal (1986), la méthode est défailante si un des deux cylindres est directement dans le sillage du second. De plus, des difficultés numériques apparaissent pour de faibles espacements en régime d'écoulements subcritiques pour lesquels les couches limites des deux cylindres peuvent interagir fortement. Ce dernier point a une importance capitale dans le cadre de la méthode de vortex utilisée ici, puisque les vortex sont produits indifféremment à partir de frontières complètement indépendantes l'une de l'autre et comme c'est l'influence de ces vortex qui fournit l'information nécessaire à la génération de nouveaux vortex, sachant par ailleurs qu'il convient de respecter au mieux la condition de circulation totale nulle, il est par conséquent crucial de contrôler la création d'un mouvement orbital du fluide qui conduirait rapidement à une "explosion numérique".

La méthode qui est présentée ici est basée sur l'utilisation d'une transformation conforme. Il s'agit ici de transformer le domaine fluide (qui a 2 trous) en un domaine de calcul évidemment plus simple. Plusieurs transformations existent mais tout choix doit suivre certains critères qui sont:

- l'exacte similarité des types de frontière géométrique et de condition qui y est affichée,
- l'image du maillage le plus "naturel" du plan transformé dans le plan physique doit s'adapter au mieux aux phénomènes physiques auxquels on s'intéresse.

Par conséquent il faut trouver une transformation qui préserve l'intégralité des lignes de courant sans les couper et qui raffine le maillage dans l'espace entre les corps.

La transformation retenue est plutôt utilisée en aérodynamique où il est fréquent de prendre en compte les phénomènes d'interaction entre plusieurs niveaux de foils: les développements analytiques peuvent être trouvés dans Lagally (1929) et des applications ultérieures dans Ives (1976) ou Suddhoo (1985).

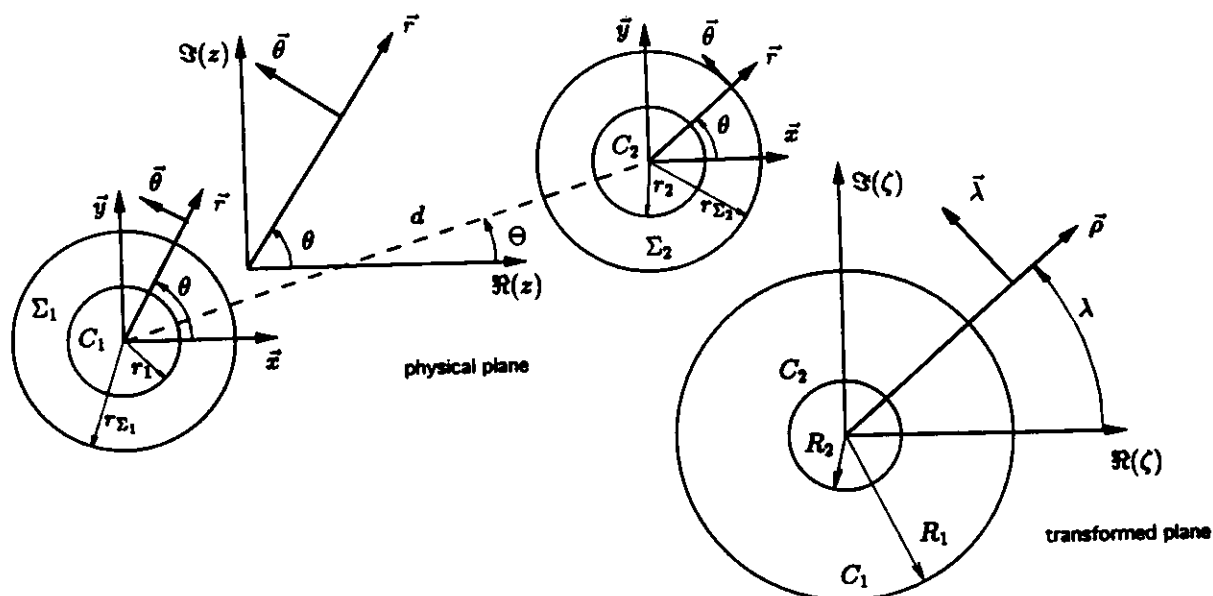


Figure 1: notations dans les différents domaines de calcul des plans physique et transformé

### 2.3 La Transformation Conforme de deux cercles en un anneau

Le principe est de transformer le domaine extérieur à deux cylindres de section arbitraire  $C_1$  et  $C_2$  en un domaine annulaire limité par deux cercles concentriques. Pour simplifier la description, on considère au départ deux cercles, sachant par ailleurs qu'il est toujours possible de transformer un corps simplement connexe en un cercle de rayon unité.

Les géométries dans les plans physique et transformé sont décrites sur la figure (1). Les notations (voir Kober 1957) sont les suivantes:

$$z \text{ plane } \begin{cases} r_i & : \text{ rayon du cylindre } N^{\circ}i, \text{ ici } r_1 = r_2 = a \\ z_i & : \text{ affixe du centre du cylindre } N^{\circ}i \\ d & : \text{ distance entre les deux centres } (= |z_2 - z_1|) \\ \Theta & : \text{ orientation de la droite joignant les deux centres } (= \arg(z_2 - z_1)) \end{cases} \quad (5)$$

$$\zeta \text{ plane } \begin{cases} R_i & : \text{ rayon du cylindre } N^{\circ}i \\ \zeta_0 & : \text{ affixe du centre des cercles concentriques} \end{cases} \quad (6)$$

L'équation de la transformation s'écrit alors:

$$\frac{\zeta - \zeta_0}{R_1} = \frac{te^{i\Theta}}{r_1} \frac{d(z - z_1) - s(z_2 - z_1)}{d(z - z_1) - t(z_2 - z_1)} \quad (7)$$

avec

$$\begin{cases} st = r_1^2 \\ (d-s)(d-t) = r_2^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{R_2}{R_1} = \frac{r_2}{r_1} \left| \frac{t}{d-t} \right| \quad (8)$$

On peut fixer arbitrairement la valeur de deux variables:  $\zeta_0 = 0$  et  $\min_i(R_i) = 1$ , si bien que l'on obtient finalement:

$$\zeta = C R_1 \frac{z d + A}{z d + B} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A = -dz_1 - s(z_2 - z_1) \\ B = -dz_1 - t(z_2 - z_1) \\ C = \frac{te^{i\Theta}}{r_1} \end{cases} \quad (9)$$

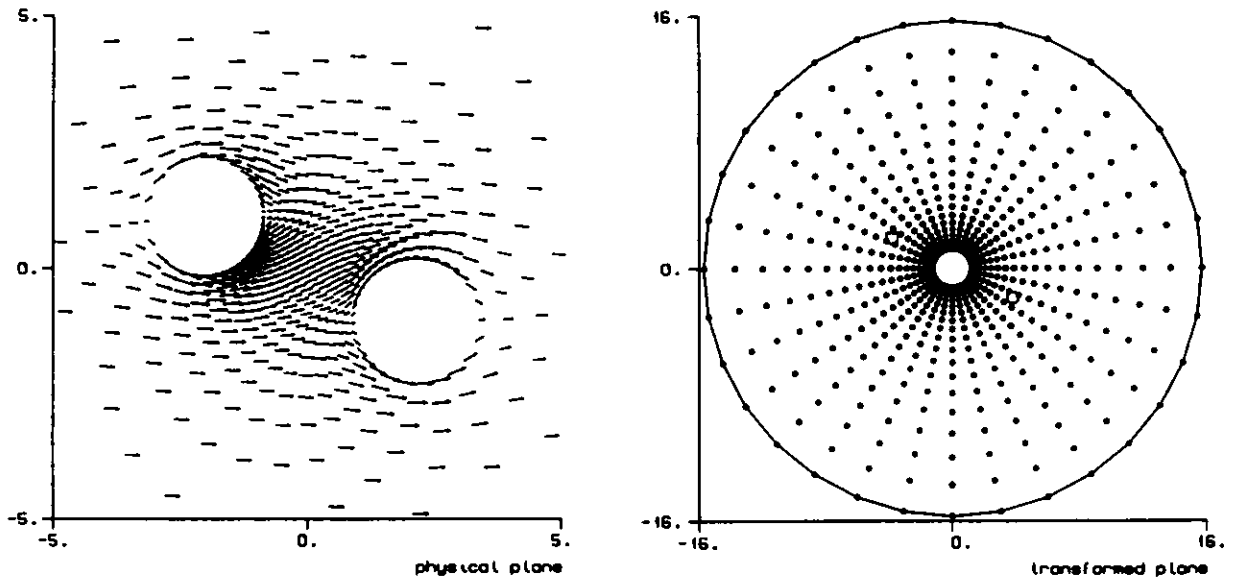


Figure 2: Transformation conforme pour 2 cylindres; les images de l'origine et de l'infini se trouvent respectivement aux points marqués par ( $\square$ ) et ( $\circ$ ).

A noter que l'image de l'infini dans le plan transformé se trouve à l'affixe:  $\zeta_{\infty} = CR_1$ . En outre l'alternative qui consiste à "imbriquer"  $C_1$  dans  $C_2$  (ou le contraire) est définie par la condition suivante: si ( $t < s$ ) il y a imbrication de  $C_2$  dans  $C_1$  (et inversement). Le facteur d'imbrication est important dans la mesure où l'éventuelle symétrie du plan physique (géométrie plus écoulement) est détruite par la transformation et par conséquent les deux cylindres ne "jouent plus le même rôle numérique".

La figure (2) illustre la transformation conforme appliquée à deux cylindres décalés: la direction du courant est indiquée par la flèche. Le point d'application de chaque flèche est l'image d'un noeud du maillage polaire régulier dans la direction azimutale mais concentré exponentiellement dans la direction radiale, cette dernière caractéristique permet d'obtenir un maillage régulier dans l'espace qui sépare les deux contours.

### 3 Résolution du problème aux limites

Du fait de la linéarité de l'équation de Poisson, on décompose la fonction courant de la façon suivante:

$$\psi = \psi_v + \psi_p \quad (10)$$

et à chaque composante correspond un problème aux limites. L'un ne tient compte que des vortex et fournit la solution vortex ( $\psi_v$ ). L'autre "oublie" la présence des vortex et fournit la solution fluide parfait ( $\psi_p$ ).

### 3.1 La solution fluide parfait

La solution fluide parfait ne dépend que de la géométrie, de la direction de l'écoulement non perturbé ( $\vec{u}_\infty$ ) et varie linéairement avec l'amplitude de ce courant. Par conséquent en décomposant le problème de la façon suivante:

$$\begin{cases} \Delta \psi_p^{xy} = 0 & \text{dans } R^2 \\ \vec{\nabla} \psi_p^{xy} \cdot \vec{t} = - \begin{cases} \vec{x} \cdot \vec{n} \\ \vec{y} \cdot \vec{n} \end{cases} & \text{sur chaque corps} \\ |\vec{\nabla} \psi_p^{xy}| = O(1) & \text{à l'infini} \end{cases} \quad (11)$$

la solution complète est reconstruite linéairement à partir de:

$$\vec{\nabla} \psi_p = (\vec{u}_\infty \cdot \vec{x}) \vec{\nabla} \psi_p^x + (\vec{u}_\infty \cdot \vec{y}) \vec{\nabla} \psi_p^y \quad (12)$$

Ce problème aux limites est résolu une fois pour toute grâce à une représentation intégrale de la solution à l'aide de distributions de singularités de type source/dipole. Les points de calculs sont les images (dans le plan physique) des noeuds du maillage polaire du plan transformé: c'est donc les points d'application des flèches de la figure 2).

### 3.2 La solution vortex

La solution vortex correspond à la vitesse induite par la seule présence des vortex (i.e. sans courant incident). Afin de simplifier son calcul, on décompose le domaine de calcul en plusieurs sous-domaines et l'équation de Poisson est résolue dans chacun d'entre eux; le but étant de déterminer au mieux la vitesse de convection dans la zone qui sépare les deux corps et de représenter correctement la couche limite qui se forme autour de chaque corps.

Un premier problème est résolu dans le plan transformé; il fournit la vitesse de convection des vortex "suffisamment éloignés" des frontières solides. Puis deux sous-problèmes sont résolus successivement dans le plan physique. Ils sont posés chacun dans un domaine annulaire limité par la frontière solide du corps  $C_j$  et par une surface cylindrique ( $\Sigma_j$ ) entourant ce corps. La résolution de ces deux problèmes fournit la vitesse de convection des vortex "suffisamment proches" des frontières solides. Les termes "proches" et "éloignés" font respectivement référence à l'appartenance ou non à ces deux sous-domaines annulaires du plan physique. La figure (1) décrit les différents domaines de calcul ainsi que certaines notations.

#### 3.2.1 Problème aux limites dans le plan transformé

Ce problème aux limites est lui-même décomposé en deux sous-problèmes dont on cherche la solution dans l'espace annulaire défini par  $\zeta = \rho e^{i\lambda}$  et  $R_2 < |\zeta| < R_1$ . Le premier problème contient l'équation de Laplace:

$$(P_1) \begin{cases} \Delta \psi_v^l = 0 & \text{pour } |\zeta| \in [R_2, R_1] \\ \psi_v^l = c_j(t) & \text{sur } C_j \end{cases} \quad (13)$$

On note  $\delta\psi_v$  la différence de la fonction courant entre les deux corps; c'est également le flux de vitesse dans l'espace qui sépare les deux corps:

$$\delta\psi_v = c_2 - c_1 = \int_{(C_1 \rightarrow C_2)} \vec{\nabla}\psi_v \cdot d\vec{\ell} = \int_{(C_1 \rightarrow C_2)} \vec{u}_v \cdot d\vec{n} \quad \text{avec} \quad d\vec{n} = d\vec{\ell} \wedge \vec{k} \quad (14)$$

où  $(\vec{u}_v)$  désigne la vitesse induite par la seule présence des vortex. On obtient, par ailleurs, une solution du problème  $(P_l)$  par la méthode de séparation des variables, et en utilisant la condition aux limites du problème (13), la solution s'écrit:

$$\psi_v^l(\rho, \lambda) = A \log \rho + B \quad (15)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes fonctions uniquement du temps; et par conséquent la vitesse cartésienne dans le plan transformé est:

$$\vec{u}_v^l(\zeta) = -\frac{\delta\psi_v}{\log(R_2/R_1)} \frac{\vec{\lambda}}{\rho} \quad \forall \quad \zeta = \rho e^{i\lambda} \quad (16)$$

que l'on peut exprimer, sous forme complexe, dans le plan physique:

$$W_v^l(z) = W_v^l(\zeta) \frac{d\zeta}{dz} = \frac{\delta\psi_v}{\log(R_2/R_1)} \frac{d\zeta}{dz} \frac{ie^{-i\lambda}}{\rho} \quad (17)$$

Cette solution représente un courant orbital autour de chaque corps. On peut vérifier numériquement que sa contribution reste toujours très faible quelque soit le type d'arrangement des cylindres.

Le second problème contient des conditions homogènes de Dirichlet:

$$(P_h) \begin{cases} \Delta\psi_v^h = -\omega & \text{pour } |\zeta| \in [R_2, R_1] \\ \psi_v^h = 0 & \text{sur } C_1 \cup C_2 \end{cases} \quad (18)$$

Il est résolu numériquement par la Méthode Vortex-In-Cell sur un maillage polaire défini par:

- $(N_\theta)$  noeuds dans la direction azimutale: c'est une puissance de 2 car on utilise une Transformation de Fourier Rapide,
- $(N_{rad}^2)$  noeuds dans la direction radiale: on utilise une Méthode de Différence Finie du second ordre.

C'est la solution de ce problème qui fournit une partie de la vitesse de convection des vortex appartenant au complémentaire des intérieures des surfaces de contrôle  $(\Sigma_j)_{j=1,2}$ . La contribution additionnelle est la vitesse calculée à partir de la solution du problème (11).



### 3.2.2 Problèmes aux limites dans le plan physique

Chaque corps (ce sont dans la présente étude, des cercles de rayon unité) est entouré par un maillage polaire. A noter que les deux maillages polaires ne peuvent pas se recouvrir. Le problème est posé dans un référentiel dont l'origine est le centre du cercle étudié. Sur la frontière intérieure (le corps  $C_j$ ) une condition homogène de Dirichlet est imposée: la constante  $c_j(t)$  est soustraite de la variable  $\psi$  puisque la seule quantité nécessaire est la vitesse. Sur la frontière extérieure on doit raccorder les deux composantes de la vitesse. Cela est réalisé en utilisant la 2<sup>ème</sup> formule de Green pour les deux fonctions suivantes:

- $\psi$  : la fonction courant totale,
- $\varphi^{(e)}$  : une fonction harmonique dans le domaine  $\Omega_e$  limité par le frontière extérieure ( $\Sigma$ ) circulaire de rayon  $r_{\Sigma_j}$  et une certaine surface de contrôle ( $\Sigma_\infty$ ) rejetée à l'infini.

On est alors amené à résoudre l'équation intégrale suivante:

$$\int_{\Omega} \varphi^{(e)} \omega ds = \int_{\partial\Omega} [\psi \varphi_{,n}^{(e)} - \varphi^{(e)} \psi_{,n}] dl \quad (19)$$

où  $n$  désigne la normale extérieure au contour ( $\partial\Omega = \Sigma_j \cup \Sigma_\infty$ ). La fonction courant  $\psi$  doit de raccorder à la solution fluide parfait sur ( $\Sigma_\infty$ ). Sur cette surface, on sait que la vorticité a complètement disparu et donc  $\psi$  peut se raccorder à l'écoulement non-perturbé plus éventuellement un terme de type dipôle qui tient compte de la perturbation des corps. Le comportement de  $\psi$  et son gradient radial sur ( $\Sigma_\infty$ ) peut donc s'écrire:

$$\begin{cases} \psi_{,r} \propto -(\vec{u}_\infty \cdot \vec{\theta}) \\ \psi \propto -(\vec{u}_\infty \cdot \vec{\theta}) \left( r + O\left(\frac{1}{r}\right) \right) \end{cases} \quad (20)$$

Par conséquent, on cherche la fonction  $\varphi^{(e)}$  qui vérifie le problème aux limites:

$$\begin{cases} \Delta\varphi^{(e)} = 0 & \text{dans } \Omega_e \text{ i.e. } r > r_{\Sigma_j} \\ r\varphi_{,r}^{(e)} - \varphi^{(e)} = O\left(\frac{1}{r}\right) & \text{quand } r \longrightarrow \infty \end{cases} \quad (21)$$

ce problème est résolu par séparation des variables, et on obtient:

$$\varphi_m^{(e)}(r, \theta) = \left(\frac{r_{\Sigma_j}}{r}\right)^m e^{im\theta} \quad \text{avec } m = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

puis en décomposant la fonction courant en série de Fourier de l'angle polaire sous la forme:

$$\psi(r, \theta) = \frac{1}{2}\hat{\psi}^0 + \sum_{n=1}^{\frac{N_\theta}{2}-1} \hat{\psi}^{nc}(r) \cos n\theta + \hat{\psi}^{ns}(r) \sin n\theta \quad (23)$$

et en reportant les expressions de  $\psi$  et  $\varphi^{(e)}$  dans l'identité de Green, on obtient finalement:

$$\begin{aligned} \pi r_{\Sigma_j} \left\{ \begin{array}{l} \hat{\psi}_{,r}^{mc} \\ \hat{\psi}_{,r}^{ms} \end{array} \right\}_{r=r_{\Sigma_j}} + \pi m \left\{ \begin{array}{l} \hat{\psi}^{mc} \\ \hat{\psi}^{ms} \end{array} \right\}_{r=r_{\Sigma_j}} &= \int_{\Omega_e} \omega \varphi_m^{(e)} ds \\ &+ 2\pi r_{\Sigma_j} \delta_{m1} \left\{ \begin{array}{l} -\vec{u}_\infty(t) \cdot \vec{y} \\ \vec{u}_\infty(t) \cdot \vec{x} \end{array} \right\} \quad (24) \end{aligned}$$

où  $\delta$  est le symbole de Kroenecker et  $m \in [0, \frac{N_a}{2} - 1]$ . En particulier pour le mode zéro, cela se réduit à:

$$\pi \tau_{\Sigma_j} (\widehat{\psi}_{,r}^0)_{r=\tau_{\Sigma_j}} = \int_{\Omega_a} \omega ds \quad (25)$$

où on reconnaît dans le second membre la quantité de circulation qui a déjà traversé la frontière  $(\Sigma_j)$  située à  $r = \tau_{\Sigma_j}$ , et qui contrebalance la circulation totale encore à l'intérieur du maillage polaire par simple respect du théorème de Kelvin. Pour les modes différents de zéro, on peut poursuivre les développements analytiques en utilisant l'équation (2) et cela donne:

$$\int_C \omega \varphi_m^{(e)} ds = \sum_{r_l > \tau_{\Sigma_j}} \Gamma_l \left( \frac{r_{\Sigma_j}}{r_l} \right)^m e^{im\theta_l} \quad (26)$$

On reconnaît donc une condition de Fourier que l'on adjoint au problème aux limites qui s'écrit finalement:

$$(P_j) \begin{cases} \psi = 0 & \text{sur } C_j \\ \Delta \psi = -\omega & \text{pour } r < \tau_{\Sigma_j} \\ f(\widehat{\psi}^m, \widehat{\psi}_{,r}^m) = F_e^m(\tau_{\Sigma_j}, t) & \text{à } r = \tau_{\Sigma_j} \text{ et } m \in [0, \frac{N_a}{2} - 1] \end{cases} \quad (27)$$

Ce problème est résolu de manière standard par la Méthode Vortex-In-Cell. Sa solution permet de convecter tous les vortex intérieurs à chaque sous-domaine annulaire.

## 4 Résultats et discussion

### 4.1 Définition des paramètres des simulations numériques

Les principaux paramètres qui définissent le phénomène physique sont: le nombre de Keulegan-Carpenter  $KC = \frac{UT}{L}$  où  $U$  et  $T$  sont respectivement l'amplitude et la période de la vitesse du courant oscillant, et  $L$  est une longueur caractéristique d'un des corps (dans le cas présent c'est le diamètre des deux cercles:  $L = 2a$ ); le nombre de Reynolds  $Re = \frac{UL}{\nu}$  où  $\nu$  désigne la viscosité cinématique; un troisième coefficient est souvent introduit: le paramètre de Stokes  $\beta = \frac{Re}{KC}$ ; enfin pour les écoulements réguliers on peut définir le nombre de Strouhal  $St = \frac{f_0 L}{U}$  où  $f_0$  désigne la fréquence du lacher tourbillonnaire.

Les efforts sont calculés par intégration du tenseur de Cauchy sur la surface de chacun des corps. Les composantes normale et tangentielle de ce tenseur correspondent respectivement à la pression et à la friction. Pour plus de détails sur le calcul des efforts on peut se référer à Scolan et Faltinsen (1991).

Pour les écoulements oscillants, la force instantanée  $F(t)$ , s'exerçant sur un corps dans la direction du courant non perturbé  $u(t)$ , est décomposée suivant la formule de Morison:

$$F(t) = \frac{1}{2} \rho C_D L u(t) |u(t)| + \frac{\pi}{4} \rho L^2 C_M \frac{du(t)}{dt} \quad (28)$$

où  $|\cdot|$  désigne la valeur absolue. Les coefficients de trainée et d'inertie sont calculés en intégrant la force sur chaque cycle d'oscillation du courant suivant les formules:

$$C_D = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho U^2 L} \frac{3\omega}{8} \int_0^T F(t) \sin(\omega t) dt \quad (29)$$

$$C_M = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho U^2 L} \frac{KC\omega}{\pi^3} \int_0^T F(t) \cos(\omega t) dt \quad (30)$$

sachant que la vitesse se comporte comme:  $u(t) = U \sin(\omega t)$  à la pulsation  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

## 4.2 Quelques aspects numériques

### 4.2.1 Effets de la transformation conforme

Comme il a été indiqué précédemment, la transformation conforme fait que les deux cylindres ne jouent pas le même rôle d'un point de vue purement numérique. Il convient donc de vérifier que ce facteur n'influence pas les propriétés globales de l'écoulement. Ceci a été vérifié pour deux cas d'application.

#### Cylindres en tandem dans un écoulement oscillant

Le courant oscillant non perturbé est dirigé dans l'axe joignant les centres des deux cercles. En outre on impose la symétrie de l'écoulement lors des résolutions successives de l'équation de Poisson dans les plans physique et transformé: cela se fait en annulant les modes cosinus du développement en série de Fourier des variables  $(\psi, \omega)$  (voir equation 23).

$I_{mb}$	$N_{cyl}^o$	$N_{cycles}$	$C_{Df}$	$\sigma_{C_{Df}}$	$C_{Dp}$	$\sigma_{C_{Dp}}$	$C_M$	$\sigma_{C_M}$
1	1	10	0.2364	0.0097	0.7143	0.0382	1.9533	0.0187
0	1	10	0.2384	0.0109	0.7082	0.0419	1.9512	0.0170
1	2	10	0.2344	0.0108	0.7249	0.0396	1.9503	0.0169
0	2	10	0.2409	0.0105	0.7492	0.0375	1.9582	0.0184

La table ci-dessus résume les résultats concernant les coefficients de trainée et d'inertie calculés pour chaque cylindre à  $KC = 2$  et  $\beta = 534$ . Le facteur d'imbrication ( $I_{mb}$ ) est égal à 1 si l'image du contour  $C_2$  est imbriquée dans l'image du contour  $C_1$ , et égal à 0 pour la configuration inverse. Les coefficients d'effort, s'exerçant sur le cylindre numéroté  $N_{cyl}^o$ , sont la moyenne des coefficients calculés sur chacun des  $N_{cycles}$  cycles d'oscillation du courant ambiant. On définit séparément la trainée due à la pression ( $C_{Dp}$ ) de celle due à la friction ( $C_{Df}$ ). En outre on calcule les écarts types ( $\sigma_C$ ) autour de la valeur moyenne pour chaque coefficient. Ces résultats prouvent la stabilité des simulations et on note surtout que les deux configurations possibles ne présentent pas de différences significatives.

#### Cylindres cote-à-cote en écoulement régulier

Les deux cylindres sont placés cote-à-cote; le courant est mis en mouvement de façon impulsive à l'instant initial dans la direction perpendiculaire à la droite joignant les 2

centres des cylindres. Le nombre de Reynolds de l'écoulement est fixé à  $Re = 500$ . Le sillage qui se forme produit rapidement des structures vorticales alternées. Pour chaque corps il est possible de calculer les efforts de trainée et de portance (respectivement dans la direction du courant et dans la direction perpendiculaire). En outre à partir des oscillations de l'effort de portance on peut calculer la fréquence du lacher tourbillonnaire et donc du coefficient de Strouhal.

$d/a$	$N_{cyl}^o$	$I_{mb}$	$C_{D_{moy}}$	$C_{L_{moy}}$	$N_{1/2cy}$	$St$	$\sigma_{St}$	$C_{L_{osc}}$	$\sigma_{C_{L_{osc}}}$
3.5	1	1	1.940	-0.418	10	0.230	0.030	1.514	0.513
3.5	1	0	2.021	-0.316	11	0.243	0.024	1.629	0.492
3.5	2	1	1.851	0.512	10	0.226	0.047	1.444	0.708
3.5	2	0	1.983	0.546	11	0.241	0.034	1.741	0.705
6.0	1	1	1.510	-0.025	9	0.236	0.017	1.227	0.160
6.0	1	0	1.523	0.017	9	0.227	0.020	1.238	0.150
6.0	2	1	1.543	0.267	9	0.230	0.026	1.201	0.343
6.0	2	0	1.526	0.314	9	0.226	0.019	1.241	0.399

La table ci-dessus résume les résultats pour deux espacements de cylindres  $d/a$ . Les coefficients de trainée ( $C_{D_{moy}}$ ) et de portance ( $C_{L_{moy}}$ ) sont la moyenne des efforts sur la totalité d'une simulation. L'erreur sur la trainée, entre les deux configurations possibles du plan transformé, est de l'ordre de 5% pour  $d/a = 6$  et décroît jusqu'à 1% pour  $d/a = 3.5$ . Pour la valeur moyenne de la portance l'erreur est plus importante (de l'ordre de 20% pour  $d/a = 3.5$ ). Néanmoins de tels écarts sont attendus dans la mesure ou l'on sait que dans l'intervalle  $d/a \in [2; 4]$ , le lacher de tourbillons provenant d'un des deux cylindres peut être plus important que l'autre (voir Zdravkovich 1987). A noter que le cylindre  $N^o1$  est en dessous du cylindre  $N^o2$  et que le courant est dirigé de gauche vers la droite si bien que l'on a bien un effet de répulsion entre les deux cylindres.

Pour le nombre de Strouhal et l'amplitude de la composante oscillante de la portance ( $C_{L_{osc}}$ ), les valeurs ne diffèrent pas de manière significative. A noter que le nombre de Strouhal est calculé sur un demi-cycle d'oscillation de la portance. En outre, les écarts types (sur un nombre de demi-cycles  $N_{1/2cy}$ ) sont fournis pour ces deux dernières quantités.

On note qu'ici, le facteur d'imbrication affecte les résultats bien plus que pour le cas d'écoulement oscillant précédent. Néanmoins l'examen des efforts montre que ceux-ci (et par conséquent l'écoulement lui-même) ne sont pas différents jusqu'à  $\frac{U_l}{a} \approx 15$ ; cela est suffisant pour dire que l'erreur relevée peut aussi bien être attribuée aux instabilités mêmes du phénomène physique étudié.

#### 4.2.2 Raccord entre les différents problèmes aux limites

Chaque résolution d'un problème aux limites peut fournir les composantes de la vitesse uniquement induite par les vortex. Aussi, pour contrôler numériquement le raccord

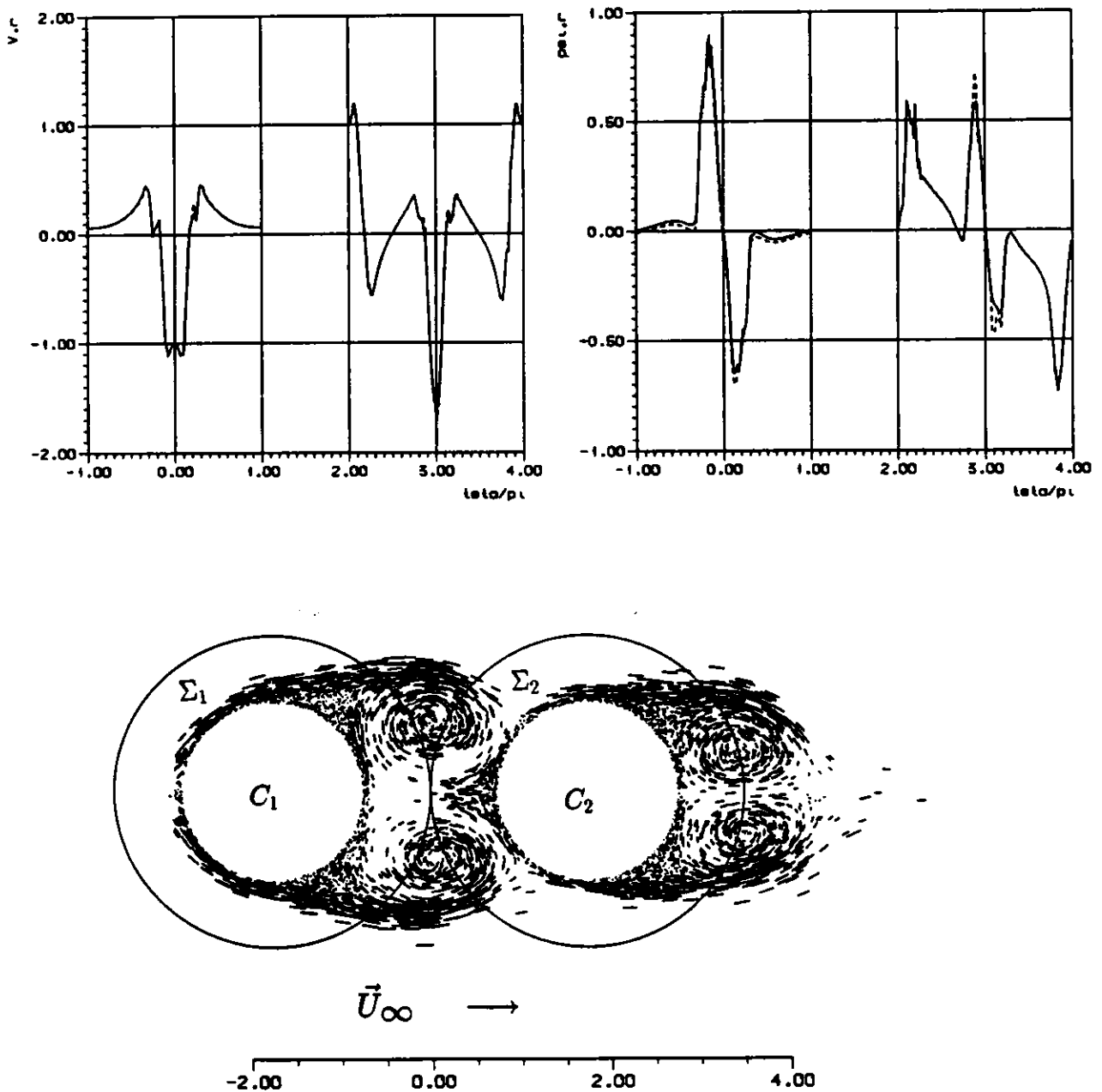


Figure 3: Raccord des composantes radiale et azimutale de la vitesse sur la frontière extérieure des problèmes  $(P_j)$  posés dans le plan physique pour chaque corps; (—): solution de  $(P_h)$ ; (---): solution de  $(P_j)$ ; courbe de gauche = cylindre  $N^{\circ}1$ ; courbe de droite = cylindre  $N^{\circ}2$ ; la figure du bas représente la trajectoire des vortex sur un pas de temps; les surfaces de contrôle  $r_{\Sigma_j}$  y sont tracées en trait plein

entre les différents problèmes on se place aux noeuds de la frontière extérieure des maillages polaires qui entourent chaque corps et on compare:

- la vitesse calculée dans le plan transformé en résolvant le problème ( $P_h$ ) ( voir équation 18 ); la vitesse aux noeuds de calcul est interpolée à partir des valeurs fournies sur le maillage du plan transformé en utilisant le schéma d'interpolation bilinéaire classique,
- la vitesse calculée dans le plan physique en résolvant le problème ( $P_j$ ) ( voir équation 27) pour chaque corps  $N^o_j$  et à laquelle on a soustrait la solution fluide parfait fournie par l'équation (12).

Les figures (3) montrent des exemples de raccord des composantes azimutale ( $\psi_{,r} = -\vec{v} \cdot \vec{\theta}$ ) et radiale ( $\vec{v} \cdot \vec{r}$ ) de la vitesse partielle ( $\vec{v}$ ) (uniquement induite par les vortex). Ces courbes sont relatives à deux cylindres placés en tandem dans un courant régulier, l'espacement entre les centres des cylindres est  $d/a = 3.5$  et les vitesses sont calculées à  $\frac{U_i}{a} = 5$ . Les trajectoires des vortex sur un pas de temps sont également représentées à ce même instant; 26847 vortex sont alors présents dans le domaine de calcul mais la trajectoire d'un vortex sur cinq seulement est représentée.

### 4.3 Résultats

Des résultats sont présentés ici pour deux configurations (en tandem et cote-à-cote) et dans la mesure du possible ils sont comparés aux résultats expérimentaux disponibles. A noter que de nombreuses mesures expérimentales et observations sont rapportées par Zdravkovich (1987) pour des valeurs relativement élevées du nombre de Reynolds subcritiques ( $Re \geq 8000$ ) et par Williamson (1985) pour des écoulements laminaires. Cependant aucune comparaison quantitative n'a pu être faite avec ces derniers résultats car le modèle numérique actuel n'a pas encore fourni de résultats satisfaisants au delà de  $Re = 5000$ .

#### 4.3.1 Cylindres en tandem dans un écoulement oscillant

Le modèle est utilisé ici en imposant la symétrie numérique par rapport à la direction de l'écoulement incident; outre la raison d'un coût de calcul moindre (le temp CPU est principalement fonction du nombre de vortex), la symétrie permet également d'éviter des instabilités numériques lors du renversement du courant, c'est à dire lorsque les gros tourbillons qui sont déjà formés glissent sous l'effet du courant contraire de part et d'autre des frontières solides, dans ce cas un courant orbital peut être généré et celui-ci conduit rapidement à une "explosion numérique". Il faut également préciser que si cette symétrie est justifiée pour des nombres de Keulegan-Carpenter  $KC \leq 4$ , au delà par contre, son emploi est plus discutable car on sait que pour un seul cylindre circulaire la formation des grosses structures vorticales dans le sillage peut être dissymétrique pour  $KC \in [4, 8]$  (voir Bearman 1985).

Les figures (4) montrent les coefficients de traînée et d'inertie pour un espacement de cylindres  $d/a = 4$  valeur pour laquelle on dispose des résultats expérimentaux de Sortland

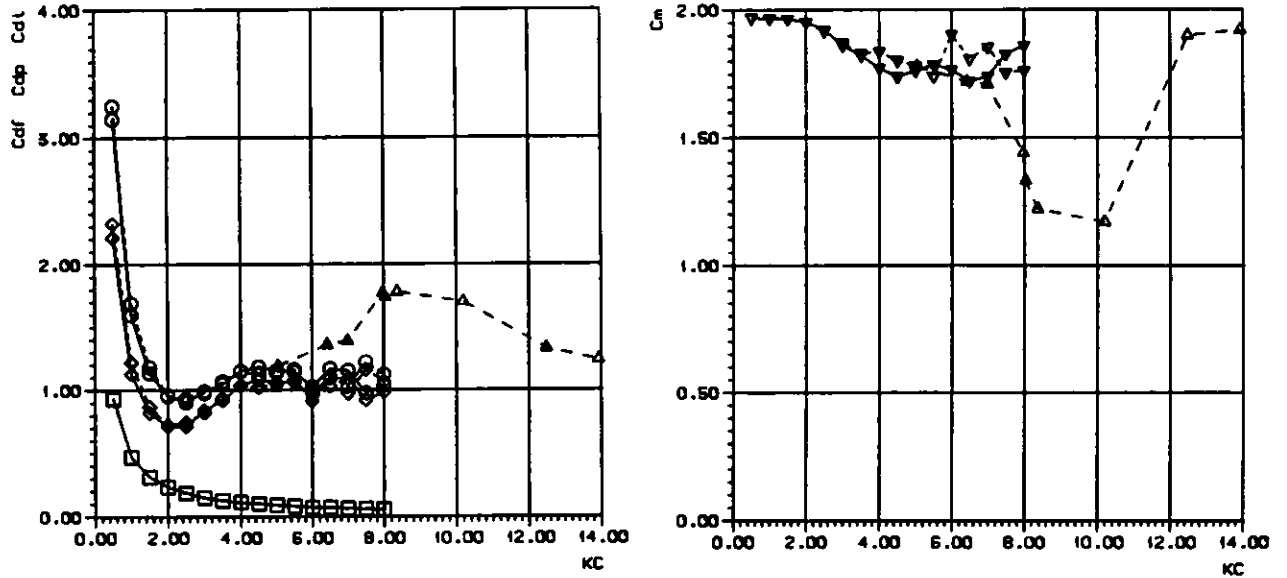


Figure 4: Coefficients de trainée et d'inertie sur 2 cylindres en tandem  $d/a = 4$ ; ( $\square$ ): trainée due à la friction (numérique); ( $\diamond$ ): trainée due à la pression (numérique); ( $\circ$ ): trainée totale (numérique); ( $\nabla$ ): inertie totale (numérique); ( $\Delta$ ): résultats expérimentaux de Sortland (1987); (—): cylindre N°1; (---): cylindre N°2

(1987). Ces résultats sont relatifs au paramètre de Stokes  $\beta = 534$  et les conditions de calcul sont les suivantes:

- le pas de temps est tel que  $\frac{U\Delta t}{L} = \frac{KC}{100}$  jusqu'à  $KC = 2.5$ , pour des valeurs plus grandes de  $KC$  le pas de temps n'est jamais supérieur à  $\frac{U\Delta t}{L} = 0.025$
- la discrétisation radiale des maillages polaires est respectivement  $N_{rad}^{c2} = 200$  dans le plan transformé et  $N_{rad} = 40$  dans le plan physique; dans la direction azimutale le nombre de noeuds est  $N_{\theta} = 128$  quelque soit le plan de calcul.

On constate un accord raisonnable sur le coefficient d'inertie mais celui-ci reste de toute façon très proche de celui que l'on peut obtenir numériquement pour un seul cylindre. Par contre l'accord sur le coefficient de trainée est nettement moins bon car ce coefficient se stabilise autour de  $C_D \approx 1$  et ne croît donc pas comme le montre les résultats expérimentaux. La table ci-dessous résume les caractéristiques des simulations en présentant les coefficients de trainée totale  $C_D$  (friction + pression) et d'inertie  $C_M$  pour les deux cylindres. En outre on y trouve les écarts types calculés autour de la valeur moyenne obtenue sur  $N_{cycles}$  cycles d'oscillation du courant non perturbé. On note une bonne stabilité des coefficients de trainée et surtout d'inertie jusqu'à  $KC \approx 4$ .

KC	$N_{cycles}$	cylindre N°1				cylindre N°2			
		$C_D$	$\sigma_{C_D}$	$C_M$	$\sigma_{C_M}$	$C_D$	$\sigma_{C_D}$	$C_M$	$\sigma_{C_M}$
0.500	10	3.1469	0.0717	1.9677	0.0143	3.2508	0.1037	1.9722	0.0143
1.000	10	1.5976	0.0373	1.9655	0.0152	1.6905	0.0629	1.9692	0.0165
1.500	10	1.1352	0.0458	1.9636	0.0166	1.1824	0.0429	1.9645	0.0155
2.000	10	0.9506	0.0436	1.9533	0.0187	0.9593	0.0416	1.9503	0.0169
2.500	10	0.9041	0.0530	1.9228	0.0221	0.9294	0.0721	1.9164	0.0183
3.000	10	0.9912	0.1301	1.8608	0.0244	0.9757	0.1316	1.8726	0.0322
3.500	10	1.0462	0.1532	1.8211	0.0613	1.0681	0.1217	1.8319	0.0387
4.000	10	1.1517	0.1454	1.7732	0.1011	1.1488	0.1498	1.8371	0.0343
4.500	10	1.1845	0.1795	1.7382	0.0595	1.1224	0.1291	1.8016	0.0396
5.000	10	1.1524	0.1816	1.7625	0.0657	1.1359	0.1648	1.7816	0.0460
5.500	8	1.1428	0.1326	1.7864	0.0825	1.1611	0.3798	1.7394	0.1554
6.000	8	1.0230	0.2299	1.7665	0.1184	0.9819	0.4270	1.9033	0.1403
6.500	7	1.1688	0.1965	1.7212	0.1134	1.0974	0.1327	1.8087	0.0933
7.000	6	1.1523	0.1830	1.7407	0.0928	1.0313	0.1394	1.8547	0.1077
7.500	6	0.9764	0.1134	1.8277	0.1510	1.2211	0.2036	1.7556	0.0900
8.000	6	1.0350	0.1030	1.8602	0.1191	1.1227	0.0975	1.7630	0.1400

#### 4.3.2 Cylindres cote-à-cote en écoulement régulier

On considère ici deux cylindres placés cote-à-cote. L'écoulement est régulier et est dirigé de la gauche vers la droite perpendiculairement à la droite qui joint les deux centres des cercles. On veut mettre ici en évidence l'influence de la largeur ( $d/a$ ) de l'espace fluide qui sépare les deux corps et donc d'évaluer la stabilité du modèle numérique pour de faibles valeurs de  $d/a$ . Les résultats sont relatifs au nombre de Reynolds  $Re = 500$ , les conditions de calcul sont les suivantes:

- le pas de temps est  $\frac{U\Delta t}{a} = 0.05$ ; les simulations se déroulent sur 1000 pas de temps,
- la discrétisation radiale du maillage polaire dans le plan transformé est telle que  $\frac{d}{aN_{r_{\text{ext}}}} = 0.01$ ; dans le plan physique le rayon de la frontière extérieure des couronnes entourant chaque corps n'est jamais supérieure à  $r_{\Sigma}/a = 2$  et jusqu'à  $d/a = 4$  on prend donc pour  $r_{\Sigma}/a$  sa valeur maximum admissible; dans la direction azimutale, on fixe le nombre de noeuds à  $N_{\theta} = 128$  quelque soit le plan de calcul,
- une coalescence de vortex est imposée afin de réduire le nombre de vortex au cours de la simulation; la coalescence consiste ici à remplacer de façon intermittente (tous les 20 pas de temps) un nombre suffisamment important de vortex par un nombre beaucoup plus petit de vortex sachant que la circulation totale n'est pas modifiée par cette opération; la zone de coalescence est annulaire, située à  $\frac{r}{a} \in [10; 11]$  dans le plan physique et est maillée par 5 noeuds radiaux: cette coalescence permet de ne pas dépasser un nombre maximum de 16000 vortex en fin de simulation.



Les figures (5) montrent les différents coefficients caractérisant les efforts et l'écoulement. La portance (qui s'exerce verticalement) peut être décomposée en une composante moyenne et une composante oscillante; cette dernière composante donne accès au nombre de Strouhal en recherchant les changements de signe sur un demi-cycle d'oscillation. Il n'a pas été possible ici de déterminer les effets de détachement tourbillonnaire alterné apparaissant aux fréquences  $\frac{3f_c}{2}$  et  $\frac{f_c}{2}$  comme le rapporte Williamson (1985), cela est dû en partie au schéma très simplifié de détermination des coefficients et une analyse spectrale doit fournir plus de renseignements. On constate également l'effet de répulsion qui s'exerce entre les deux cylindres, cet effet diminue rapidement avec la valeur de l'espacement.

## 5 Conclusion

Le modèle numérique présenté ici donne accès aux efforts s'exerçant sur deux cylindres de section circulaire, de position arbitraire et placés dans un écoulement visqueux. L'interaction entre les corps est prise en compte au moyen d'une transformation conforme. Grâce à cette transformation, de faibles valeurs de l'espacement entre les corps ont pu être étudiées. Les résultats obtenus pour différents arrangements et types de courant permettent de valider le modèle théorique.

L'extension du modèle à l'étude de sections autres que circulaires ne pose pas de problèmes théoriques majeurs puisqu'en combinant deux transformations conformes (du type Karman-Trefftz et Theodorsen-Garrick) il est toujours possible de transformer un contour quelconque simplement connexe en un cercle de rayon unité. Néanmoins on ne peut pas envisager dans l'immédiat une extension à un nombre de corps plus important, c'est là malheureusement une limitation importante de ce modèle.

Les travaux présentés dans cet article ont été menés à l'Institut d'Hydrodynamique Marine de l'Université de Trondheim. La plupart des calculs ont été effectués sur le CRAY-YMP de Trondheim sans pratiquement aucune limite d'utilisation.

Je tiens surtout à remercier le Professeur Odd Faltinsen pour l'intérêt qu'il a porté à mes travaux tout au long des trois années que j'ai passées dans son équipe.

## 6 Références

1. BEARMAN P.W., 1985,  
"Vortex trajectories in oscillatory flow", Proc. Int. Symp. "Separated Flow Around Marine Structures", NTH, Trondheim.
2. CHORIN A.J., 1973,  
"Numerical study of slightly viscous flow.", J. Fluid Mech., Vol. 57, part 4, pp. 785,796

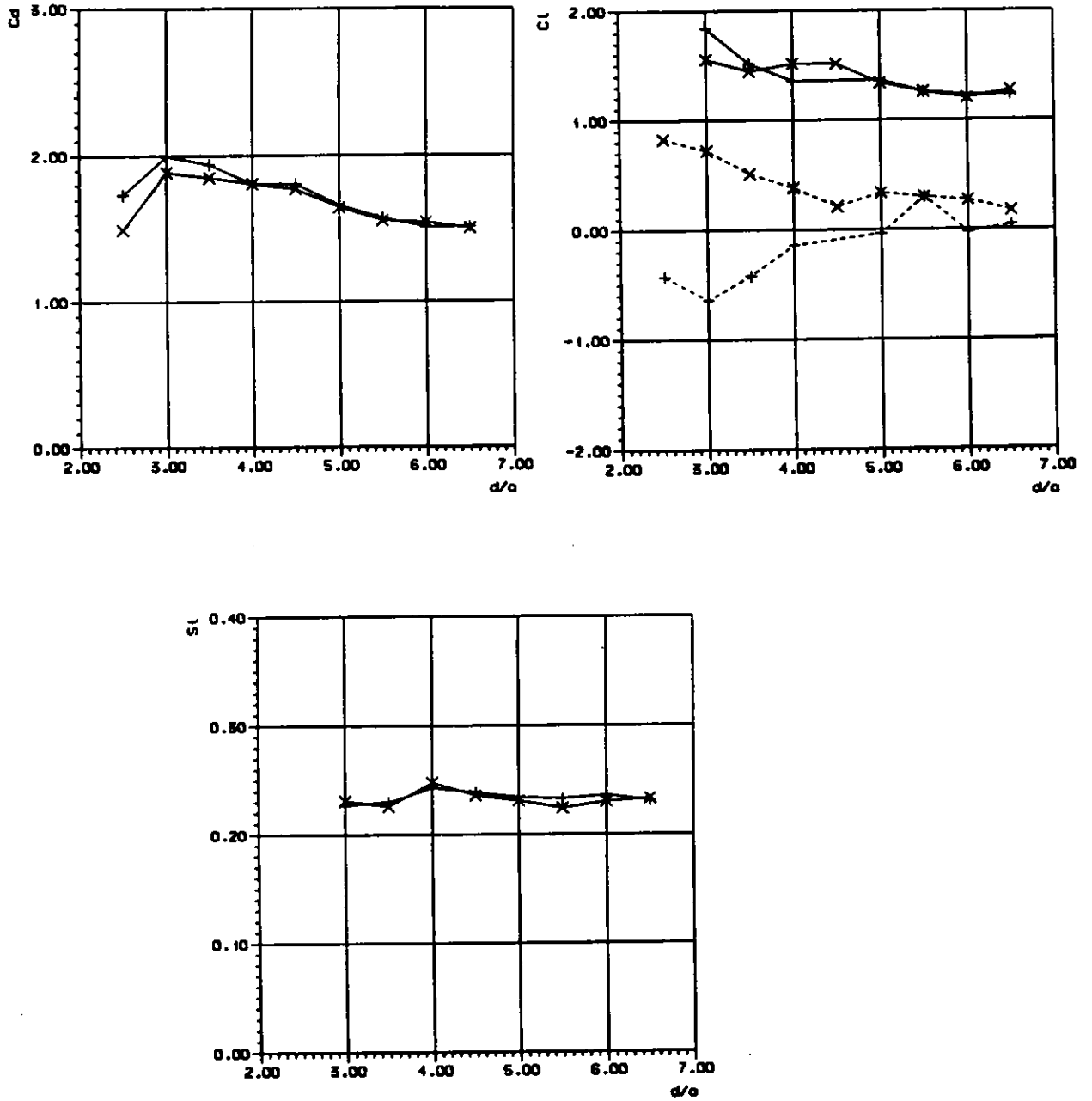


Figure 5: Coefficients de l'écoulement régulier entre 2 cylindres cote-à-cote à  $Re = 500$ ; ( $\times$ ): cylindre N°1; ( $+$ ): cylindre N°2; pour  $C_L$  la courbe (—) représente la composante oscillante et la courbe (- - -) représente la composante moyenne.

3. CHRISTIANSEN J.P., 1973,  
"Numerical simulation of hydrodynamics by the method of point vortices.", *J. Comp. Physics* 13, pp. 363,379.
4. IVES D.C., 1976,  
"A modern look on conformal mapping including multiply connected regions", *AIAA Journal*, Vol. 14, n°8, pp. 1006-1011.
5. KOBER H., 1957  
"Dictionary of conformal representations", Dover publications, inc.
6. LAGALLY M., 1929,  
"The frictionless flow in a region around two circles", Translated in NACA TM-626.
7. PENOYRE R. & STANSBY P.K., 1986,  
"Pressure distribution on a circular cylinder in the wake of an upstream cylinder in a duct", Internal report 1986, Simon Engineering laboratories, University of Manchester.
8. SCOLAN Y.M. & FALTINSEN O.M., 1991,  
"Numerical prediction of vortex shedding around bodies with sharp corners at arbitrary KC-numbers"  
Osaka Colloquium '91, Japan.
9. SMITH P.A., 1986,  
"Computation of viscous flows by the Vortex Method", Ph.D. Thesis, University of Manchester.
10. SMITH P.A. & STANSBY P.K., 1988,  
"Impulsively started flow around a circular cylinder by the vortex method", *J. Fluid Mech.* Vol. 194, pp. 45-77
11. SMITH P.A. & STANSBY P.K., 1989,  
"An efficient surface algorithm for random-paricle simulation of vorticity and heat transport", *J. Comp. Phys.*, Vol. 81, n° 2.
12. SMITH P.A. & STANSBY P.K., 1991,  
"Viscous oscillatory flows around cylindrical bodies at low Keulegan - Carpenter numbers using the Vortex Method", *J. of Fluids and Structures*, Vol. 5, pp 339-361.
13. SORTLAND B., 1987,  
"Force measurements and flow visualization on circular cylinders", Internal report n° 86-0218, Marintek.
14. SUDDHOO A., 1985,  
"Inviscid compressible flow past multi-element airfoils", PhD thesis of the University of Manchester.

15. VADA T. & SKOMEDAL N.G., 1986,  
"Simulation of supercritical viscous flow around two cylinders in various configurations" Technical Report n° 86-2020, A.S. Veritas Research.
16. WILLIAMSON C.H.K., 1985,  
"Evolution of a single wake behind a pair of bluff bodies", J. Fluid Mech., Vol. 159, pp. 1-18.
17. ZDRAVKOVICH M.M., 1987,  
"The effects of interference between circular cylinders in cross flow", J. Fluid and Structures, Vol. 1, pp. 239-261.