

4e JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE

1, 2, 3 mars 1993 - Nantes

## **ETUDE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES ENGINES SOUS-MARINS REMORQUÉS PAR CÂBLE**

C. JACQUOT - D. MARICHAL

Laboratoire de Mécanique des Fluides

Division Hydrodynamique - URA 1217 du CNRS

Ecole Centrale de Nantes

44000 Nantes

### **Résumé**

Nous proposons une nouvelle mise en équations de la dynamique des câbles sous-marins.

La qualité des résultats obtenus permet son application à des études originales :

- la détermination des efforts qu'il faut exercer sur un engin sous-marin pour l'obliger à suivre une trajectoire donnée
- la détermination de la loi horaire du mouvement d'un système flottant, lâché du fond de l'eau et remontant à la surface en étant guidés par quatre câbles symétriques..

### **Summary**

We propose a new formulation of the submarine cable dynamics. This method was applied to the following practical and original cases :

- determination of the force to be applied upon a submarine device moving on a prescribed trajectory
- determination of water exit law of a non archimedean body retained with four slack anchor cables (symmetrical configuration)

## Introduction

Afin d'améliorer les études concernant les systèmes sous-marins "remorqués" par câbles; nous avons développé ces dernières années un logiciel entièrement nouveau. Cette étude a été présentée en détails dans les références [4], [5], [6] et [7]. La qualité de la modélisation des mouvements et des tensions du câble nous permet de résoudre maintenant de manière tout à fait satisfaisante des problèmes connexes difficilement abordables avec nos anciens logiciels. Nous nous proposons de présenter ici deux exemples de ces applications particulières :

- la prédiction des efforts supplémentaires, dus à l'action du câble de liaison, qu'il faut exercer sur un engin sous-marin pour l'obliger à suivre une trajectoire donnée (étude préalable indispensable pour une bonne détermination des propulseurs et des surfaces portantes de contrôle).
- la détermination de la loi horaire du mouvement d'un engin passif, plus léger que l'eau, lâché du fond et remontant à la surface tout en étant retenu par un système de quatre câbles symétriques et munis de flotteurs..

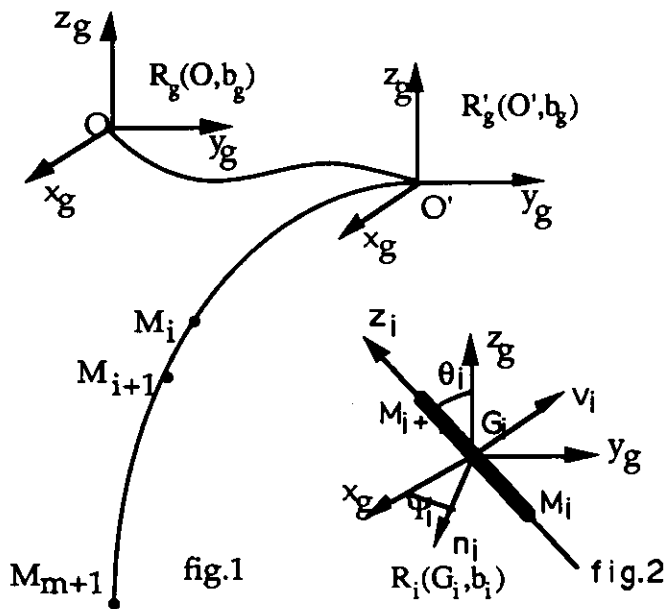
### 1 - Mise en équations générale de la dynamique du câble

Nous rappelons ici très succinctement la démarche que nous avons adoptée pour l'étude générale des mouvements et tensions d'un câble sous-marin (Le lecteur intéressé par plus de détails pourra se reporter aux références déjà citées).

Les équations du mouvement du câble (C) sont obtenues à l'aide d'une écriture lagrangienne.

## 1.1 Discrétisation, repères, paramètres :

Le câble est discrétisé en  $m$  segments homogènes, rigides, rectilignes, cylindriques circulaires de même diamètre  $d$ . L'extrémité "supérieure" <sup>1</sup> est liée à un système qui impose son mouvement (celui-ci pouvant être le repos). Le câble est supposé être complètement immergé. La mise en équations ne nécessite pas de supposer que tous les éléments sont de longueurs et de masses identiques. Les liaisons entre éléments consécutifs sont supposées parfaites.



Les figures 1 et 2 précisent les repères utilisés :

- \*  $R_g(O, b_g)$  : absolu galiléen
- \*  $R'_g(O', b_g)$  : se déduit de  $R_g$  par translation
- \*  $R_i(G_i, b_i)$  : lié à un élément  $i$  du câble

La forme du câble est décrite par  $n = 2m + 3$  paramètres indépendants : les 3 coordonnées absolues  $x, y$  et  $z$  de l'extrémité remorquée et deux angles d'Euler  $\theta_i$  et  $\psi_i$  pour chaque élément.

## 1.2 Equations de Lagrange du mouvement :

La mise en équation du mouvement de (C) par la méthode de Lagrange conduit à  $n$  équations dans lesquelles le travail virtuel des forces de liaison entre les éléments est nul :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c(C/R_g)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c(C/R_g)}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p(C)}{\partial q_i} = D_i \quad \forall i \in [1, n]}$$

où :  $E_c$  est l'énergie cinétique de l'ensemble des éléments du câble,  
 $E_p$  leur énergie potentielle.

<sup>1</sup> Le qualificatif "supérieur" est donné en référence aux problèmes de remorquage. Nous allons présenter une application où l'extrémité "supérieure" du câble est son point le plus bas et où le mouvement imposé est le repos (point fixe).

$q_i$  sont les paramètres décrivant la position et la forme du câble

Les termes  $D_i$  sont obtenus en calculant le travail virtuel des forces extérieures agissant sur (C) (à l'exclusion des forces de pesanteur prises en compte dans les termes d'énergie potentielle du premier membre des équations; la poussée hydrostatique peut être regroupée avec la force de pesanteur appliquée à chaque élément à condition de considérer le poids apparent de l'élément.).

Les forces extérieures qui agissent sur le câble sont de deux types :

- les forces dues à l'action du fluide sur le câble, autres que les efforts hydrostatiques. Elles dépendent des paramètres  $q_i$  et de leurs dérivées premières et secondes par rapport au temps, essentiellement de manière non linéaire.)
- les forces dues à l'action de systèmes mécaniques en des points donnés de (C), qu'il faudra préciser suivant les problèmes étudiés (force de remorquage, effort dû à la présence d'un engin remorqué, singularités...)

### 1.3 Efforts hydrodynamiques

Pour décrire les efforts hydrodynamiques nous utilisons un schéma qui est une synthèse des hypothèses de Landweber [8] et de la formule de Morison (décomposition de ces efforts en traînée de pression normale à la vitesse du câble par rapport au fluide, traînée de frottement tangentielle et force d'inertie ajoutée).

#### Force de traînée de pression :

Selon les hypothèses de Landweber : chaque élément du câble est soumis à une force de traînée de pression  $T_i$  qui lui est normale. Ses composantes s'écrivent dans le repère lié ( $R_i$ ) :

$$T_{n_i} = -\frac{1}{2}\rho d_i 2l_i C_d V_n |V_N|$$

$$T_{v_i} = -\frac{1}{2}\rho d_i 2l_i C_d V_v |V_N|$$

$$T_{z_i} = 0$$

avec :  $|V_N| = \sqrt{V_{n_i}^2 + V_{v_i}^2}$

$V_{v_i}$  et  $V_{v_j}$  sont les composantes suivant  $\vec{n}_i$  et  $\vec{v}_i$  de la vitesse relative du centre de l'élément par rapport au fluide.  $C_d$  est le coefficient de traînée que nous avons supposé constant.

La confrontation des résultats de simulations numériques et de mesures en mer a montré qu'une valeur de  $C_d$  voisine de 1,8 ou 1,9 conduit généralement à des résultats proches de la réalité; même pour des problèmes stationnaires pour lesquels on pouvait penser utiliser la valeur 1,2 (coefficient de traînée d'un cylindre circulaire rigide placé dans un écoulement uniforme au même nombre de Reynolds) . Cette augmentation du coefficient est due à l'influence des vibrations du câble provoquées par des lâchers de tourbillons alternés.

De plus, les travaux de D. Marichal et de P.L. Bourget [1] à propos de l'influence des vibrations des câbles sous-marins sur la valeur de leur coefficient de traînée justifient, à défaut de mieux, l'usage de cette valeur de  $C_d$  constante et égale à 1,8.

#### Forces d'inertie ajoutée :

Ces efforts sont dus, d'une part aux accélérations linéaires et angulaires, d'autre part à un couplage des vitesses de translation et de rotation de chaque élément. Les expressions de ces forces seront obtenues en faisant l'hypothèse que l'on peut utiliser les coefficients de "masse ajoutée" constants calculés dans le cas d'écoulements potentiels. Pour un élément cylindrique circulaire très allongé les 36 éléments du tenseur des masses ajoutées sont tous nuls sauf 4 :

$$m_{a_{xx}} = m_{a_{yy}} = m_t \quad \text{et} \quad m_{a_{zz}} = m_{a_{\theta\theta}} = m_r$$

#### Forces de frottement tangentiel :

Dans les hypothèses de Landweber, au sens strict, la force de frottement est constante et indépendante de l'angle que fait l'élément de câble avec la vitesse de l'écoulement relatif. Cette hypothèse simplificatrice, justifiée surtout par le manque de connaissance réelle des efforts de frottement, est acceptable dans le cas de remorquages (les efforts de traînée de pression sont prépondérants). Elle est insuffisante pour traiter des problèmes où la vitesse moyenne du câble est faible ou nulle (problème d'ancrage par exemple). Nous avons donc adopté la loi de frottement proposée par Richtmyer en 1941 [12] :

$$F = f \frac{1}{2} \rho C_d d l (V \cos \varphi)^2$$

où  $V \cos \varphi$  est la composante tangentielle à l'élément de la vitesse de l'écoulement relatif.

Nous supposons que toutes ces forces, qui agissent sur chaque élément, sont appliquées en leur centre de volume confondu avec  $G_j$ .

### 1.3 Forces extérieures autres que l'action du fluide

Ces forces dépendent du type de problème étudié.

Dans les travaux cités en référence, l'extrémité supérieure est soumise à l'action du remorqueur; l'extrémité inférieure à celle du corps remorqué.

Dans un des exemples que nous traiterons ici, nous introduirons des forces ponctuelles agissant sur des éléments particuliers. Il faut naturellement tenir compte du travail virtuel de ces efforts dans l'écriture des équations de Lagrange.

## 2 - Ecriture des équations de Lagrange sous forme d'un système matriciel

Nous disposons donc de  $2m + 3$  équations différentielles du second ordre mais non linéaires qui peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$[M_{ij}] [\ddot{q}_j] = [SM_i]$$

où  $[M_{ij}]$  est une matrice  $(n,n)$  de coefficients ne dépendant que des paramètres  $q$  et  $[SM_i]$  une matrice colonne  $(n)$  de fonctions ne dépendant que de termes en  $q$  et  $\dot{q}$  ou  $\dot{q}^2$ .

Dans les problèmes que nous traitons actuellement le mouvement du point "supérieur" est imposé. Nous connaissons donc les fonctions  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$ , ainsi que leurs dérivées premières et secondes. Par contre, les 3 composantes de la force de remorquage  $\vec{F}_R$  sont inconnues.

Le système matriciel s'écrit finalement sous une forme très générale :

$$\begin{bmatrix} E_{xj} & F_{xj} & -1 & 0 & 0 \\ E_{yj} & F_{zj} & 0 & -1 & 0 \\ E_{zj} & F_{zj} & 0 & 0 & -1 \\ A_{ij} & B_{ij} & & & 0 \\ C_{ij} & D_{ij} & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_j \\ \ddot{\psi}_j \\ F_{R_x} \\ F_{R_y} \\ F_{R_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} SM_x \\ SM_x \\ SM_x \\ SM_{\theta_i} \\ SM_{\psi_i} \end{bmatrix} \quad i,j \in [1,m]$$

Les  $2m$  premières équations du système sont indépendantes des 3 dernières. Ces  $2m$  équations sont relatives aux paramètres fondamentaux du problème et sont résolues à chaque pas de temps. Les 3 dernières nous donnent des informations complémentaires qui pourront n'être calculées que de temps en temps suivant les besoins de l'utilisateur. Cette remarque permet de réduire un peu l'ordre du système à résoudre.

### 3 - Résolution du système d'équations

Pour la résolution du système  $(2m, 2m)$  dont les équations sont du type :  $\ddot{y} = f(t, y, \dot{y})$  nous utilisons une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Elle permet, à partir d'un état connu des paramètres et de leurs dérivées par rapport au temps à un instant  $t$ , de calculer le nouvel état à l'instant suivant  $t + dt$ .

Pour initialiser le système, on se donne une déformée du câble et l'état des vitesses à l'instant initial; ces conditions initiales peuvent être, à priori, arbitraires mais une forme trop quelconque peut conduire à des valeurs très faibles du pas de temps  $h$  préjudiciables à la durée des calculs. En effet la convergence des calculs, d'un pas de temps au suivant, implique que les variations des paramètres  $q$  et  $\dot{q}$  restent faibles.

Si on désire étudier, à partir d'un équilibre stationnaire, la déformée du câble sous l'effet de phénomènes instationnaires la déformée initiale peut être calculée par des méthodes maintenant classiques (9).

### 4 - Asservissement d'un engin à suivre une trajectoire donnée (3)

On se propose d'étudier les efforts exercés sur un "poisson autopropulsé" par son ombilical lorsqu'on lui impose différents mouvements autour d'une position déterminée. Cette étude préliminaire doit permettre de dimensionner les propulseurs et les gouvernes de l'engin sous-marin.

Après avoir défini la position nominale de fonctionnement (problème de statique des systèmes sous-marins à câbles), on souhaite imposer au poisson des excursions en avant, en arrière, vers le haut ou vers le bas (problème bidimensionnel) ou même des excursions latérales (problème tridimensionnel).

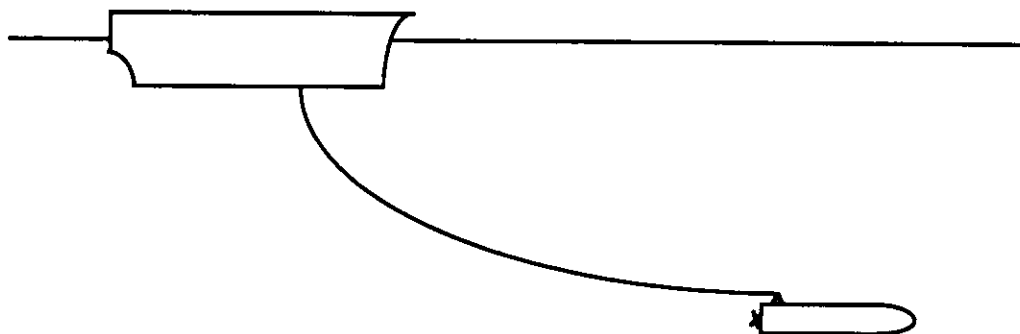


Figure 3  
Poisson autopulsé muni d'un ombilical

Remarquons que nous cherchons à ne déterminer que les efforts exercés par le câble sur le poisson; pour poursuivre l'étude du système complet il serait nécessaire d'introduire, dans les équations propres du poisson, tous les autres efforts qui agissent sur celui-ci.

Le problème, tel que nous le traitons, se réduit donc à la détermination des efforts qu'il faut appliquer à l'extrémité inférieure du câble pour lui imposer un mouvement prédéterminé (trajectoire et loi horaire).

Nous supposons que la liaison avec le poisson se fait par l'intermédiaire d'une rotule parfaite; il ne nous faut donc déterminer que les trois composantes de la force.

La méthode utilisée est semblable à une méthode d'asservissement linéaire.

A un instant donné le poisson se trouve dans une certaine position qui ne correspond pas exactement à celle désirée. Cette erreur de position,  $\Delta E$ , est un vecteur dont les trois composantes peuvent être déterminées. En effet, notre méthode permet de connaître à tout instant la position de l'extrémité inférieure du câble en fonction des efforts qui lui ont été appliqués depuis l'origine du mouvement. Il nous est de même possible d'évaluer la vitesse d'évolution  $\Delta E'$  de cette erreur de position, et, donc d'en tenir compte dans notre loi d'asservissement.

Pour déterminer les efforts à appliquer pour corriger l'erreur de position nous avons besoin de connaître une matrice de raideur de l'ensemble  $K$  (le câble est supposé inextensible, mais la forme qu'il prend sous l'action de l'écoulement relatif lui confère une élasticité apparente). Nous la déterminons en calculant les efforts qu'il faut appliquer à l'extrémité inférieure pour maintenir le câble en équilibre lorsque celle-ci se trouve placée



en quelques points situés sur une sphère entourant la position nominale. Les résultats obtenus sont linéarisés. Dans la présente application, cette matrice est calculée une fois pour toute. En pratique les efforts peuvent varier de manière importante lorsque le poisson se déplace. On améliorerait certainement les résultats (déjà satisfaisants) en recalculant la matrice de raideur de temps en temps au cours du mouvement.

Ainsi, à chaque pas de temps, nous modifions l'effort appliqué à l'instant précédent d'une quantité :

$$\vec{\Delta F} = K \left[ a \vec{\Delta E} - b \Delta t \vec{\Delta E}' \right]$$

Les coefficients a et b sont déterminés de manière encore empirique.

Dans l'exemple présenté les caractéristiques du câble sont :

longueur : 500 m  
diamètre : 0,02 m  
masse linéaire : 1,47 kg/m  
 $C_d$  : 1,8

La vitesse d'avance du remorqueur est de 2,5 m/s

Le poisson se trouve 300 m en avant du remorqueur et immergé également à 300 m.

Pour simplifier la présentation nous traitons ici un problème plan. Le mouvement désiré du poisson par rapport au remorqueur est défini par trois phases d'accélération successives :

instant	$\gamma_y$	$\gamma_z$
0 à 15 s	0,1 m/s <sup>2</sup>	0
15 s à 45 s	0	- 0,05 m/s <sup>2</sup>
t > 45 s	0	0

La figure 4 montre l'évolution de la force à appliquer à l'extrémité inférieure pour obtenir le mouvement désiré. La figure 5 présente le module de l'erreur de position à chaque instant, rapporté au déplacement maximum désiré. En valeur absolue, l'erreur ne dépasse pas 2,5 cm pour un câble de 500 m....

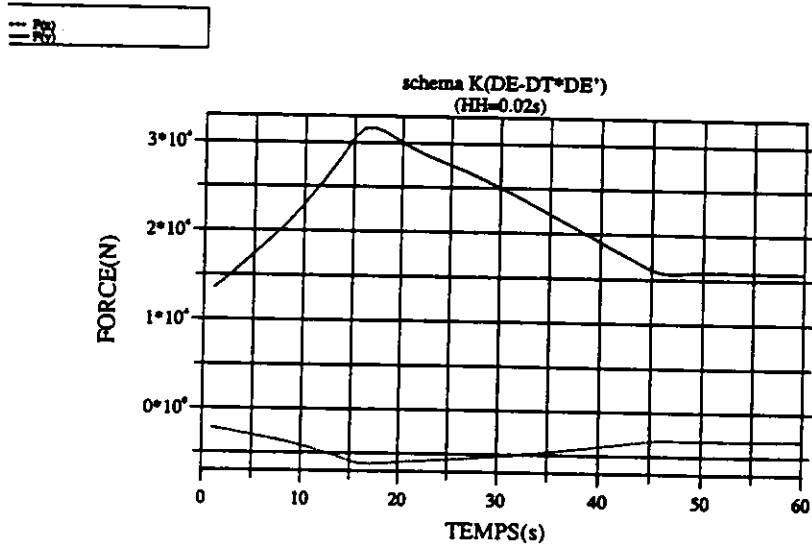


Figure 4  
Evolution des composantes de la force

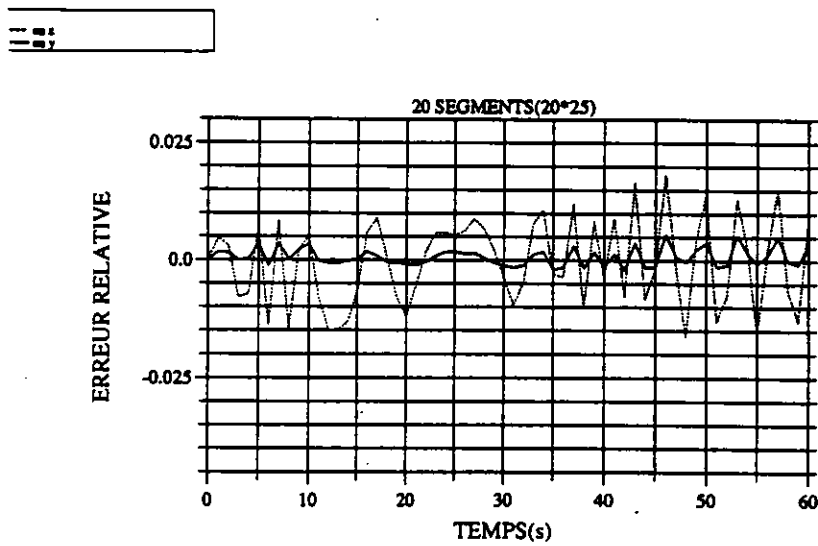


Figure 5  
Erreur relative

## 5 - Remontée d'un engin plus léger que l'eau (11)

On se propose d'étudier la loi horaire de la remontée d'un engin plus léger que l'eau et retenu par quatre câbles symétriques.

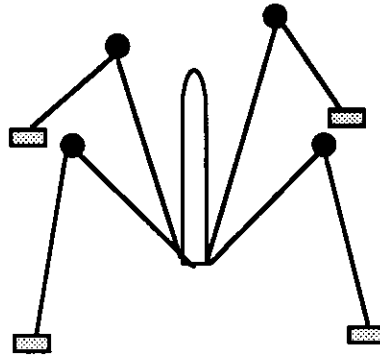


Figure 6  
Vue d'ensemble du système

Les câbles sont destinés à retenir l'engin au moment où il atteint la surface libre. Mais leur présence modifie la loi horaire de remontée. Afin de limiter cette action de freinage, et, pour lui donner une forme initiale convenable, chaque câble est équipé d'un flotteur. Ces derniers subissent également des efforts hydrodynamiques.

Compte-tenu de la symétrie du système, on peut se limiter à l'étude d'un seul câble dont l'extrémité liée à l'engin est soumise à une force inconnue et se déplace suivant un axe vertical. On assimile l'engin à une masse ponctuelle concentrée en ce point.

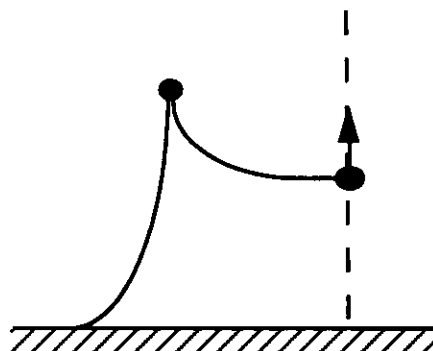


Figure 7  
Élément modélisé

## 5.1 Mise en équations

Nous appliquons la méthode générale en y apportant quelques modifications.

### Extrémité supérieure

Remarquons qu'avec nos notations usuelles, l'extrémité supérieure du câble est le point le plus bas. Son mouvement est imposé; il s'agit du repos. Les efforts appliqués sont inconnus, nous pourrions éventuellement les déterminer (en faisant usage des dernières équations du système général).

### Flotteur intermédiaire

Le flotteur intermédiaire peut être considéré comme une masse ponctuelle placée au noeud  $j$ . Il est soumis à l'action de :

- son poids et la poussée hydrostatique
- sa traînée, calculée comme s'il était sphérique
- les efforts d'inertie dus à sa masse réelle, sa masse ajoutée et son accélération propre

Pour tenir compte de tous ces efforts, il est nécessaire d'en calculer le travail virtuel dans le déplacement du noeud  $j$ . Puis on introduit les coefficients ainsi obtenus dans le système général d'équations en séparant les termes faisant intervenir les dérivées secondes des paramètres angulaires (premier membre) des autres termes (second membre).

### Le corps lui-même

L'étude du mouvement vertical ne pose pas de difficulté. Nous avons assimilé le corps "flottant" à une masse ponctuelle, il suffit donc de rajouter dans les efforts s'exerçant sur l'extrémité "inférieure" les efforts verticaux appliqués sur le corps :

- force de pesanteur et de poussée hydrostatique
- force d'inertie propre et ajoutée dans le mouvement vertical
- force de traînée du corps

### Condition cinématique

La symétrie du problème impose que la trajectoire du point inférieur est une droite verticale. Deux méthodes pourraient s'appliquer pour en tenir compte :

- on pourrait écrire une condition de liaison au sens général en exprimant que la somme des projections sur un plan horizontal des éléments du câble doit être constante. Mais l'introduction d'une telle équation dans le système d'équations de

Lagrange nécessite l'usage d'un multiplicateur (or, nous avons développé cette nouvelle formulation pour justement éliminer les défauts dus à l'usage de multiplicateurs).

- on pourrait aussi utiliser une technique d'asservissement analogue à celle que nous avons développée dans l'exemple précédent.

Nous avons trouvé un artifice très simple qui s'est révélé très efficace : nous affectons au corps une masse ajoutée, dans le mouvement transversal, extrêmement importante (plusieurs milliers de fois la masse réelle). Les accélérations transversales sont donc négligeables et le corps se déplace bien suivant un axe vertical.

## 5.2 Résultat

Les deux figures suivantes présentent les déformées successives des câbles de maintien et la loi horaire de la remontée.

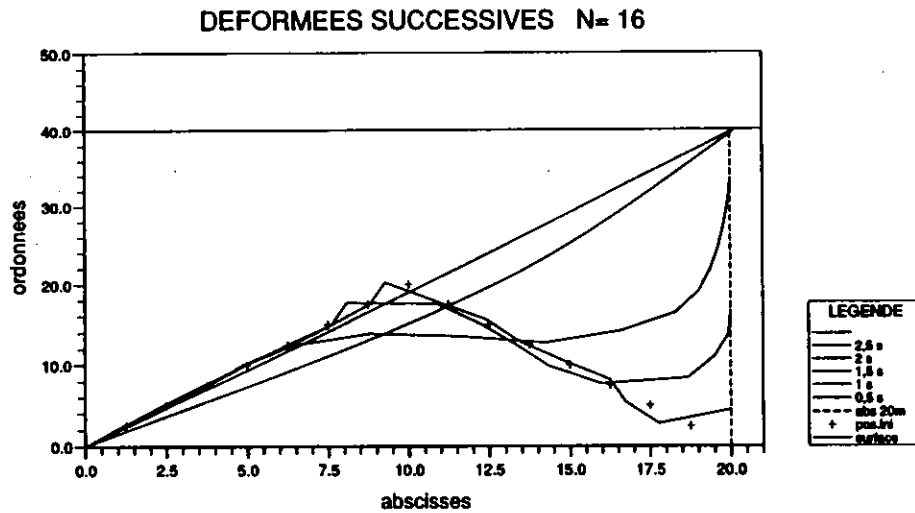


Figure 9

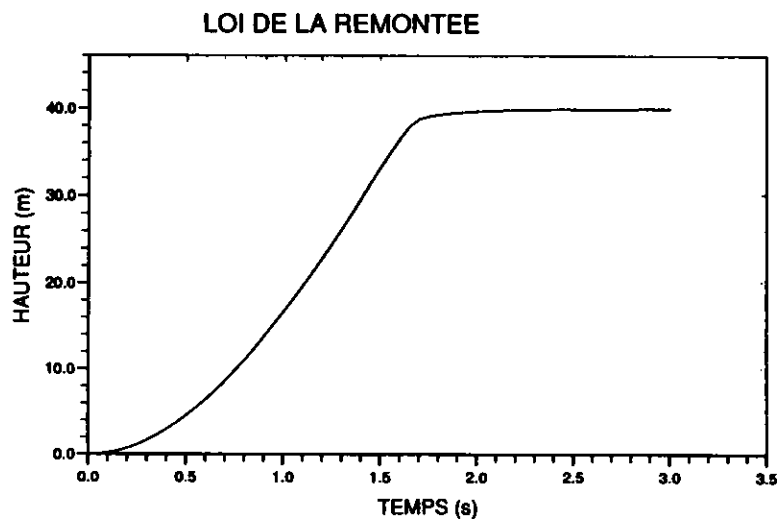


Figure 10

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Bourget P.L. et Marichal D. , 1991, "Remark about variation in the drag coefficient of circular cylinders moving through water" *Ocean Engineering* vol.17, N°6, pp 569-585
- [2] Champagnat P. , 1992, "Contribution à l'étude de l'asservissement des extrémités des câbles sous-marins" D.E.A. Ecole Centrale de Nantes juillet 1992
- [3] Greciet R. , 1991, "Contribution à l'étude de l'asservissement de position des extrémités des câbles sous-marins" D.E.A. Ecole Nationale Supérieure de Mécanique septembre 1991
- [4] Jacquot C., 1991, "Contribution à l'étude dynamique des systèmes sous-marins remorqués" Thèse de Doctorat Ecole Nationale Supérieure de Mécanique, Nantes, juillet 1991
- [5] Jacquot C. et Marichal D. , 1988 , "Study of the dynamical behaviour of immersed cables" *International Conference Computer Modelling in Ocean Engineering* Venise septembre 1988 pp 631-638
- [6] Jacquot C. et Marichal D., 1991, "Etude du comportement dynamique d'un corps remorqué par un câble immergé" 3èmes Journées de l'Hydrodynamique Grenoble février 1991 pp 419-430
- [7] Jacquot C. et Marichal D., 1992, "A propos de l'étude dynamique des systèmes sous-marins remorqués par câble" Séminaire "Systèmes Remorqués" D.G.A. 1-2 décembre 1992 Val de Reuil pp155 - 174
- [8] Landweber L. and Protter M.H. , 1947 , "The shape and tension of a light flexible cable in a uniform current" *Journal of Applied Mechanics* juin 1947 pp 121-126
- [9] Marichal D., 1979, "Contribution à l'étude statique et dynamique des câbles sous-marins" thèse de Doctorat ès Sciences Nantes juillet 1979
- [10] Marichal D. et Bourget P.L. , 1986 , "Study of the vortex-shedding influence on the drag coefficient and the shape of immersed flexible cylinders" *Proceedings of the International Conference on Computer Aided Design, Manufacture and Operation in the Marine and Offshore Industries*, Washington DC USA September 1986 pp 427-436
- [11] Nezet. R., "Contribution à l'étude dynamique des câbles sous-marins" Projet de recherches EI3 Ecole Centrale de Nantes juin 1992
- [12] Richtmyer R.D. , 1941 , "Design and Operation of Mark IV Magnetic Mine Sweeping Gear" *Bureau of Ships Scientific Group Report N°12* , January 1941