

Peut-on générer de la houle multidirectionnelle 'réaliste' dans un bassin de traction?

Raymond Cointe
DCN Bassin d'Essais des Carènes
Chaussée du Vexin
27100 Val de Reuil

Résumé

L'objet de ce papier est d'étudier la possibilité de générer de la houle multidirectionnelle aléatoire 'réaliste' dans un bassin rectangulaire, équipé d'un batteur serpent ou d'un batteur tridimensionnel sur seulement un petit côté, en prenant avantage des réflexions sur les parois latérales du bassin. Cela conduit à une analyse critique de cette méthode qui a été proposée récemment aux Etats-Unis [13], au Japon [12] et en Grande Bretagne [3].

Le problème principal de la méthode est lié à un manque d'homogénéité (et d'ergodicité) résultant des cohérences de phases induites par les réflexions sur les parois latérales. Afin de surmonter, au moins en partie, ce problème, il est nécessaire d'utiliser un grand nombre de composantes de houle. La discrétisation en direction du spectre étant liée directement, à une fréquence donnée, à la largeur du bassin, cela impose que les longueurs d'onde énergétiques du spectre soient 'beaucoup' plus petites que la largeur du bassin. Des simulations numériques confirment cette tendance et suggèrent que la période de pic maximum pouvant être réalisée dans un bassin de largeur b est approximativement $C \sqrt{b}$ avec $C \simeq 0.3sm^{-1/2}$.

Summary

In this paper the feasibility of the generation of 'realistic' stochastic short-crested seas using a segmented or three-dimensional wavemaker located on the short side of a rectangular tank and taking advantage of the reflection on the side walls is studied theoretically and numerically within the framework of linear wave theory. This provides a critical analysis of this technique which has been proposed recently in the U.S. [13], Japan [12] and U.K. [3].

The main problem of the method is related to a lack of homogeneity (and ergodicity) resulting from phase coherences induced by the reflections on the side walls. In order to overcome, at least partially, this difficulty, it is necessary to use a very large number of components. The discretization in direction being directly related, at a given frequency, to the width of the tank, this demands that the energetic wave lengths in the spectrum be 'much' smaller than the width of the tank. Numerical simulations confirm this tendency and suggest that the maximum peak period that can be realized in a tank of width b is approximately $C \sqrt{b}$ with $C \simeq 0.3sm^{-1/2}$.

1 Introduction

Afin de pouvoir se placer dans des conditions d'essais les plus réalistes possible, de nombreux laboratoires de génie océanique ou côtier se sont équipés de bassins à houle multidirectionnelle. La génération d'une houle multidirectionnelle donnée dans une zone de dimensions réduites du bassin semble aujourd'hui être un problème à peu près maîtrisé. Les bassins de carènes, par contre, ne disposent pas encore d'installations leur permettant d'effectuer des essais de tenue à la mer avec vitesse d'avance sur houle multidirectionnelle. Aucune technique ne s'est en effet imposée pour la génération de houles multidirectionnelles 'réalistes' dans une zone utile de dimensions suffisamment importantes pour permettre des essais avec vitesse d'avance.

Récemment il a été proposé, à l'étranger, des techniques apparemment similaires pour générer de la houle multidirectionnelle dans un bassin rectangulaire [3, 12, 13]. L'intérêt de ces techniques provient du fait qu'il n'est nécessaire de situer un batteur segmenté (ou un batteur tridimensionnel) que sur le petit côté du bassin, que les réflexions sur les parois latérales sont mises à profit pour réaliser l'état de mer multidirectionnel dans le bassin, et que l'on dispose, a priori, d'une zone utile de longueur 'infinie' selon l'axe du bassin. Les japonais, en particulier, les ont utilisées pour générer de la houle multidirectionnelle dans un bassin de traction. Ces techniques ne semblent cependant pas avoir fait l'objet, pour l'instant, de descriptions détaillées dans la littérature, en particulier en ce qui concerne la représentativité de la houle ainsi générée.

Aussi a-t-il semblé intéressant de présenter ici une analyse critique de la méthode fondée sur le calcul théorique puis numérique, en théorie linéaire, de la houle générée dans le bassin.

Il convient de noter que, par ailleurs, des techniques ont été proposées pour générer de la houle oblique dans un bassin ayant la même configuration géométrique [2, 9]. Ces techniques sont différentes de la technique décrite ici. Elles doivent permettre de générer des houles multidirectionnelles de direction moyenne non nécessairement dans l'axe du bassin, mais uniquement dans une zone utile de dimensions finies.

2 Calcul de la houle pour un mouvement donné des batteurs

2.1 Calcul du potentiel des vitesses et de l'élévation de surface libre.

La largeur du bassin est b , sa profondeur est h et sa longueur est semi-infinie (voir figure 1 pour les définitions géométriques). Les conditions aux limites que doit satisfaire le potentiel harmonique ϕ sont les suivantes.

- condition d'imperméabilité au fond :

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=-h} = 0 \quad (1)$$

- condition aux limites de surface libre :

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)_{z=0} \quad (2)$$

- condition d'imperméabilité sur les parois latérales :

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{y=b} = 0 \quad (3)$$

- condition d'imperméabilité sur le batteur (dans le cas d'un mouvement harmonique du batteur) :

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{x=0} = \Re(u(y, z) \exp(i\omega t)) \quad (4)$$

Dans cette équation, $u(y, z)$ représente l'amplitude complexe du mouvement du batteur. A noter qu'un tel mouvement peut être réalisé de différentes manières, par exemple en utilisant

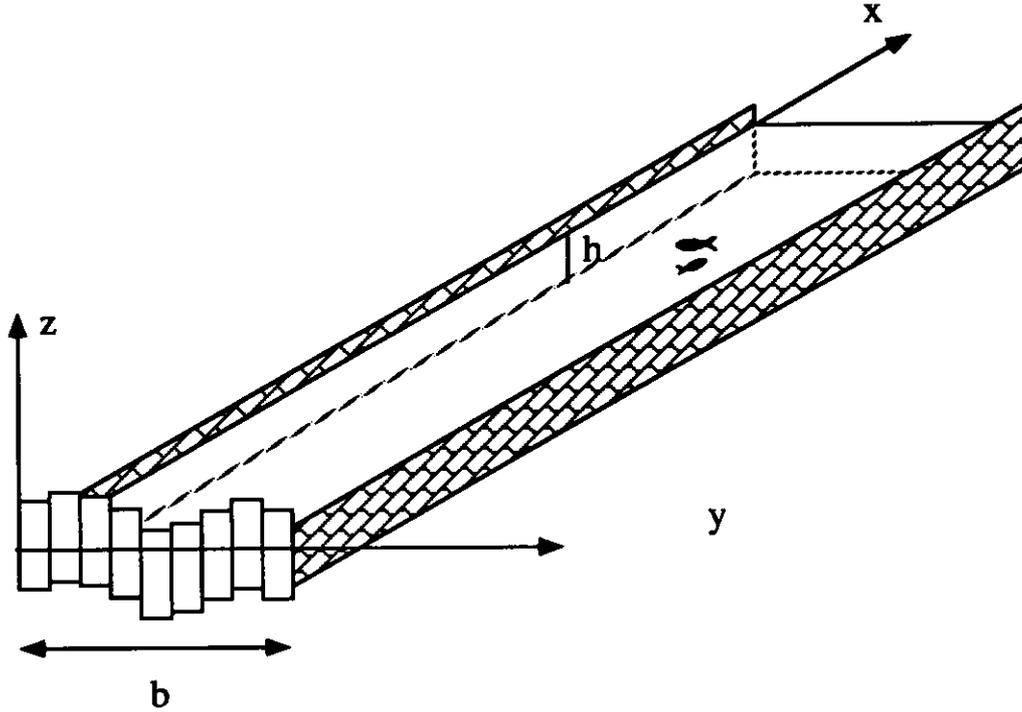


Figure 1: Définitions géométriques

un générateur segmenté traditionnel ou un plongeur tridimensionnel. Il convient d'ajouter à ces conditions aux limites une condition à l'infini ($x \rightarrow \infty$) qui stipule que la solution est bornée et qu'il n'y a que des ondes sortantes à l'extrémité du bassin.

La géométrie peut être mise à profit pour résoudre le problème en recherchant, de façon heuristique, une solution s'exprimant comme combinaison linéaire de fonctions à variables séparées (ou, de manière plus savante, en procédant par décomposition modale). On obtient alors :

$$\begin{aligned} \phi &= \Re \{ \exp(i\omega t) \} \\ &\times \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} \exp \left(-\sqrt{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + k_n^2} x \right) \cos \left(\frac{m\pi}{b} y \right) \cos (k_n(z+h)) \right. \\ &+ \sum_{m=0}^M A_{0m} \exp \left(-i \sqrt{-\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \kappa^2} x \right) \cos \left(\frac{m\pi}{b} y \right) \cosh (\kappa(z+h)) \\ &\left. + \sum_{m=M+1}^{\infty} A_{0m} \exp \left(-\sqrt{\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 - \kappa^2} x \right) \cos \left(\frac{m\pi}{b} y \right) \cosh (\kappa(z+h)) \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

où :

$$\kappa \tanh \kappa h = \frac{\omega^2}{g}, \quad k_n \tan k_n h = -\frac{\omega^2}{g}, \quad M = E \left(\frac{\kappa b}{\pi} \right) \quad (6)$$

E désignant la partie entière, et où les coefficients A_{nm} sont complexes. Afin de calculer ces coefficients, il convient d'utiliser la condition aux limites sur le batteur. Cela ne pose pas de difficultés particulières une fois que l'on s'est fixé la géométrie des batteurs [6] (mais n'est possible que quand $\kappa b/\pi$ n'est pas entier). Les pulsations correspondant à $\kappa b/\pi$ entier sont appelées pulsations de coupure ("cut-off frequencies"). Elles sont égales aux pulsations des modes propres latéraux du bassin.

Sans procéder au calcul des A_{nm} , on peut décrire l'écoulement loin du batteur. En effet, on peut négliger le premier et le dernier terme du membre de droite qui décroissent exponentiellement à l'infini si ω n'est pas une pulsation de coupure¹ et on en déduit que :

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z, t) \simeq & \Re \left\{ \exp(i\omega t) \left\{ A_{00} \exp(-i\kappa x) \cosh(\kappa(z+h)) \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{m=1}^M A_{0m} \exp(-i\kappa_m x) \cos\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cosh(\kappa(z+h)) \right\} \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

avec

$$\kappa_m = \sqrt{-\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \kappa^2} \quad (8)$$

De cette expression on peut déduire celle de l'élévation de surface libre :

$$\begin{aligned} \eta(x, y, t) = & -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=0} \simeq \alpha_0 \sin(\kappa x - \omega t + \varphi_0) \\ & + \sum_{m=1}^M \alpha_m \sin\left(\kappa_m x + \frac{m\pi}{b}y - \omega t + \varphi_m\right) \\ & + \sum_{m=1}^M \alpha_m \sin\left(\kappa_m x - \frac{m\pi}{b}y - \omega t + \varphi_m\right) \end{aligned} \quad (9)$$

où :

$$\alpha_m = \frac{\omega}{2g} \cosh(\kappa h) \|A_{0m}\|, \quad A_{0m} = \|A_{0m}\| \exp(i\varphi_m) \quad (10)$$

Le premier terme du membre de droite correspond à une onde plane se propageant suivant l'axe du bassin. Les $2M$ termes suivants s'interprètent comme la superposition de paires d'ondes planes. Ces paires sont constituées de deux ondes se propageant suivant deux directions symétriques par rapport au plan Oxz .

On réalise donc ainsi un état de mer multidirectionnel pouvant s'interpréter comme superposition de $2M+1$ houles planes de même pulsation et se propageant suivant des angles compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ par rapport à l'axe du bassin. On notera que le nombre de composantes directionnelles, égal à $2M+1$, dépend de la pulsation à laquelle on opère le batteur (voir équation (6)). Si cette pulsation est faible (inférieure à la première pulsation de coupure), on ne peut générer que des ondes planes se propageant suivant l'axe du bassin (et cela quel que soit le mouvement du batteur).

L'expression (9) correspond à un mouvement harmonique du batteur. Par superposition de N mouvements du batteur de ce type, chacun de pulsation ω_n , on obtient l'expression de la réalisation d'un état de mer multichromatique et multidirectionnel dans le bassin :

$$\begin{aligned} \eta(x, y, t) \simeq & \sum_{n=1}^N \alpha_{0n} \sin(\kappa_{0n} x - \omega_n t + \varphi_{0n}) \\ & + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M(n)} \alpha_{mn} \sin\left(\kappa_{mn} x + \frac{m\pi}{b}y - \omega_n t + \varphi_{mn}\right) \\ & + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M(n)} \alpha_{mn} \sin\left(\kappa_{mn} x - \frac{m\pi}{b}y - \omega_n t + \varphi_{mn}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

où

$$\kappa_{mn} = \sqrt{-\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \kappa_{(n)}^2}, \quad \omega_n^2 = g \kappa_{(n)} \tanh(\kappa_{(n)} h) \quad (12)$$

¹ Le premier terme décroît plus rapidement que $\exp(-\pi x/2h)$, le dernier plus rapidement que $\exp(-\sqrt{2\pi\delta\kappa/b} x)$ avec $\delta = \text{Min}(E(\kappa b/\pi) - \kappa b/\pi, E(\kappa b/\pi) + 1 - \kappa b/\pi)$. A noter que quand l'on s'approche d'une pulsation de coupure, $\delta \rightarrow 0$. Pour une étude du problème au voisinage des pulsations de coupure (qui impose de prendre en compte les effets non-linéaires), on peut consulter [14].

Par un choix approprié du mouvement du batteur, on peut espérer obtenir des coefficients α_{mn} et des phases φ_{mn} arbitraires². Si les phases sont définies comme des variables aléatoires indépendantes (et équiréparties entre 0 et 2π), on définit ainsi un processus aléatoire fonction de l'espace et du temps.

2.2 Calcul de la densité spectrale d'énergie de l'élévation.

La densité spectrale d'énergie du processus (considéré comme processus de l'espace et du temps) s'obtient par transformée de Fourier de l'autocorrélation *spatio-temporelle* que l'on commence donc par calculer :

$$R(x, y, t, u, v, \tau) = \langle \eta(x, y, t) \eta(x + u, y + v, t + \tau) \rangle \quad (13)$$

où $\langle A \rangle$ désigne l'espérance de A . Si l'on ne suppose pas a priori que le processus est homogène, stationnaire et ergodique, cette espérance doit s'interpréter comme moyenne d'ensemble (c'est-à-dire moyenne sur les phases φ_{mn}).

Le calcul de l'autocorrélation conduit à :

$$\begin{aligned} 2 R(x, y, t, u, v, \tau) = & \sum_{n=1}^N \alpha_{0n}^2 \cos(\kappa_{0n} u - \omega_n \tau) \\ & + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M(n)} \alpha_{mn}^2 \cos\left(\kappa_{mn} u + \frac{m\pi}{b} v - \omega_n \tau\right) \\ & + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M(n)} \alpha_{mn}^2 \cos\left(\kappa_{mn} u - \frac{m\pi}{b} v - \omega_n \tau\right) \\ & + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M(n)} 2 \alpha_{mn}^2 \cos(\kappa_{mn} u - \omega_n \tau) \cos\left(\frac{2m\pi}{b} y + \frac{m\pi}{b} v\right) \end{aligned} \quad (14)$$

Le dernier terme de cette expression provient de l'égalité des phases des deux composantes de directions symétriques. Le fait qu'il dépende de y montre que le processus n'est pas homogène (et donc pas ergodique, au moins en espace). Cela conduit à prendre garde aux définitions et à la manière de calculer le spectre.

Calculons par exemple le spectre *spatial* de houle, S_s , en effectuant la transformée de Fourier en espace de l'autocorrélation spatiale calculée en utilisant comme moyenne la moyenne d'espace. Cela donne³ :

$$2 S_s(\omega, \theta) = \sum_{n=1}^N \alpha_{0n}^2 \delta_{[\omega_n, 0]} + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M(n)} \alpha_{mn}^2 \delta_{[\omega_n, \theta_{mn}]} + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{M(n)} \alpha_{mn}^2 \delta_{[\omega_n, -\theta_{mn}]} \quad (15)$$

avec :

$$\tan \theta_{mn} = \frac{m\pi/b}{\kappa_{mn}}, \quad \theta_{mn} \in [-\pi/2, \pi/2] \quad (16)$$

et où on a noté $\delta_{[\Omega, \Theta]}$ la distribution de Dirac en $\omega = \Omega$ et $\theta = \Theta$.

Le fait d'avoir utilisé la moyenne spatiale fait disparaître le terme correspondant au dernier terme de (14) et conduit à l'expression du spectre que l'on aurait obtenue avec un déphasage

²Il est clair que cela ne sera pas possible si, par exemple, le nombre de batteurs est trop faible. Le problème du calcul des mouvements des batteurs pour obtenir des coefficients souhaités, abordé dans [1], ne sera pas discuté ici.

³Le spectre est calculé sur tout le plan xy en prolongeant la solution par périodicité en dehors de la surface du bassin. En toute rigueur, le spectre spatial devrait s'exprimer en fonction du nombre d'onde vectoriel, (κ_x, κ_y) . On utilise la relation de dispersion pour exprimer le spectre en fonction de $\omega = \sqrt{g\kappa \tanh(\kappa d)}$ et $\theta = \tan^{-1}(\kappa_y/\kappa_x)$. Il n'y a pas d'indétermination sur le sens de propagation ici car toutes les composantes de houle se dirigent vers les x positifs ; on prendra donc θ dans $[-\pi/2, \pi/2]$.

aléatoire entre les composantes de directions symétriques. Ce spectre correspond donc au spectre 'attendu' de la réalisation (11).

Calculons maintenant le spectre *temporel* de houle, S_t , en effectuant la transformée de Fourier en temps de l'autocorrélation temporelle calculée en utilisant comme moyenne la moyenne temporelle. Si le processus était stationnaire, homogène et ergodique, on devrait retrouver l'intégrale sur $[-\pi/2, \pi/2]$ du spectre spatial. Ce n'est pas le cas ici, et la différence entre les deux s'exprime :

$$2 \left\{ S_t(\omega) - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} S_r(\omega, \theta) d\theta \right\} = \sum_{n=1}^N C'_n \delta_{[\omega_n]} \quad (17)$$

avec

$$\begin{aligned} C'_n &= \sum_{m=1}^{M(n)} 2 \alpha_{mn}^2 \cos\left(\frac{2m\pi}{b} y\right) \\ &+ \sum_{m=1}^{M(n)} 4 \alpha_{mn} \alpha_{0n} \cos((\kappa_{mn} - \kappa_{0n}) x + \varphi_{mn} - \varphi_{0n}) \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \\ &+ \sum_{m=1}^{M(n)} \sum_{\ell=1}^{m-1} 8 \alpha_{mn} \alpha_{\ell n} \cos((\kappa_{mn} - \kappa_{\ell n}) x + \varphi_{mn} - \varphi_{\ell n}) \cos\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{\ell\pi}{b} y\right) \end{aligned} \quad (18)$$

Cette expression permet de quantifier l'erreur entre le spectre attendu et le spectre temporel en un point. On constate d'abord que la moyenne spatiale (en x et en y) de cette erreur est nulle. Par contre, la moyenne d'ensemble (sur le tirage des phases) de cette erreur n'est pas nulle ; il y a un biais systématique fonction de la position latérale du point de mesure. Cela est bien en accord avec le résultat obtenu pour l'autocorrélation spatio-temporelle, la moyenne d'ensemble du spectre temporel correspondant à la transformée de Fourier de $R(x, y, t, 0, 0, \tau)$ (c'est-à-dire à la transformée de Fourier en temps de l'autocorrélation temporelle calculée en utilisant comme moyenne la moyenne d'ensemble).

On voit donc apparaître deux contributions dans l'expression de cette erreur. La première (premier terme du membre de droite) provient de l'égalité des phases des deux composantes de directions symétriques qui résulte des réflexions sur les parois latérales et correspond au dernier terme de l'équation (14). Elle est intrinsèque à la méthode utilisée ici et ne dépend pas du tirage des phases effectué. On notera également que cette contribution est indépendante de la position longitudinale x . On parlera donc d'erreur (et de spectre) moyens en un point, le qualificatif de 'moyen' se référant à la moyenne d'ensemble.

La deuxième contribution (deux derniers termes du membre de droite) provient de l'existence de composantes ayant la même pulsation et se propageant suivant des directions différentes. Elle n'est pas propre au problème étudié ici et apparaît dans toutes les méthodes utilisant la double sommation [4]⁴. Sans que cela ait été clairement démontré, il semble exister un consensus dans la littérature pour affirmer que l'influence de cette contribution disparaît quand le nombre de composantes utilisées devient très grand [4, 7, 11], si du moins le résultat est moyenné ou lissé en pulsation. Cela semble d'autre part confirmé par simulations numériques.

Pour l'étude de la technique de génération décrite ici, c'est donc l'évaluation de l'erreur moyenne qui apparaît comme essentielle. On notera que sur les parois latérales cette erreur moyenne correspond à l'énergie totale des composantes ne se propageant pas selon l'axe du bassin. Cela montre que, sauf dans le cas d'une houle presque monodirectionnelle, cette erreur est très importante sur les parois. Ce résultat n'est pas surprenant puisque la méthode fonctionne en mettant à profit les réflexions sur les parois. Au milieu du bassin, par contre, l'erreur moyenne est proportionnelle, à une fréquence donnée, à la somme des $(-1)^m \alpha_{mn}^2$; on peut donc espérer

⁴Ce problème est parfois évité en utilisant une technique de simple sommation, c'est-à-dire en n'ayant qu'une direction de propagation à une pulsation donnée. Cela pourrait être envisagé ici mais n'aurait d'effet que sur cette contribution.

qu'elle tend vers zéro quand la discrétisation en direction augmente si α_{mn} ne varie pas de manière pathologique avec m .

Il est clair qu'il serait intéressant d'étudier mathématiquement comment se comporte, pour un choix de discrétisation particulier, l'erreur moyenne en fonction de la distance latérale à la paroi et de la discrétisation en direction, non seulement pour le spectre en pulsation, mais aussi pour l'autocorrélation spatio-temporelle. Cela n'a cependant pas été fait lors de cette étude (par manque de temps et de compétences) et l'on s'en est remis à des simulations numériques en prenant comme seuls critères le spectre en pulsation en un point et une estimée locale de l'étalement directionnel.

3 Simulations numériques

3.1 Calcul des α_{mn} .

Le calcul des α_{mn} s'effectue de manière classique : on va approcher le spectre réel, S_r , en "pavant" le plan ω, θ et en écrivant que dans un "pavé" centré sur ω_n, θ_{mn} les intégrales de S_r (le spectre réel ou objectif) et S_s (le spectre spatial calculé en (15)) sont égales⁵. Il est à noter que l'on a le choix de la discrétisation en pulsation mais pas de celle en direction (puisque, à une pulsation donnée, la discrétisation la plus fine réalisable est imposée par la largeur du bassin). On procédera ici avec un pavage à pas constant en pulsation. Comme la discrétisation en direction est imposée, elle risque de ne pas être toujours très fine, en particulier à basse fréquence. Afin de s'assurer au moins que, à toute pulsation, l'intégrale de la fonction de répartition angulaire est bien égale à 1, on écrira que :

$$\alpha_{mn} = \sqrt{2\Delta\omega \int_{\theta_{mn}^-}^{\theta_{mn}^+} S_r(\omega, \theta) d\theta} \quad (19)$$

où θ_{mn} est donné par l'équation (16), $\omega_n = n\Delta\omega$ et :

$$\theta_{mn}^- = \theta_{mn} - \frac{1}{2} (\theta_{mn} - \theta_{m-1n}), \quad \theta_{mn}^+ = \theta_{mn} + \frac{1}{2} (\theta_{m+1n} - \theta_{mn}) \quad (20)$$

Comme on l'a déjà indiqué, on ne peut réaliser que des composantes de houle se dirigeant vers les x positifs. En conséquence, on sera amené à tronquer les spectres directionnels en dehors de $[-\pi/2, \pi/2]$. D'autre part, il est clair que l'on ne pourra discrétiser ainsi que des spectres symétriques par rapport à l'axe du bassin.

3.2 Principe des simulations.

On a effectué des simulations dans un bassin de 30m de large et de grande profondeur (c'est-à-dire en utilisant la relation de dispersion en profondeur infinie). A noter que cela correspond à la largeur du bassin espagnol d'El Pardo, long de 150m et effectivement équipé d'un batteur serpent sur un petit côté. Cela permettra de donner une idée des ordres de grandeur des houles pouvant être réalisées dans ce bassin, bien sûr très large pour un bassin de traction (les résultats se généralisant évidemment par similitude de Froude). On a pris comme spectre de houle un spectre directionnel de type Bretschneider avec un étalement directionnel en $\cos^{2s}(\theta/2)$ [5, 8], à savoir :

$$S_r(\omega, \theta) = D(\omega, \theta) \frac{A}{\omega^5} \exp\left(-\frac{B}{\omega^4}\right) \quad (21)$$

⁵Ce mode de calcul des α_{mn} repose donc sur l'identification du spectre objectif et du spectre spatial calculé sur l'ensemble de la surface du bassin. Il ne privilégie a priori aucune zone utile particulière dans le bassin à la différence de la technique proposée dans [2, 9].

$$D(\omega, \theta) = 2^{2s-1} \frac{\Gamma^2(s+1)}{\pi \Gamma(2s+1)} \cos^{2s}(\theta/2) \quad (22)$$

$$A = 0.3127 H_s^2 \omega_p^4, \quad B = \frac{5}{4} \omega_p^4 \quad (23)$$

où H_s est la hauteur significative, ω_p est la pulsation de pic et le coefficient de normalisation dans l'expression de D est tel que $\int_{-\pi}^{\pi} D(\omega, \theta) d\theta = 1$.

Pour la discrétisation, on a tronqué le spectre en pulsation en-deçà de $0.5\omega_p$ et au-delà de $2.5\omega_p$ et en direction en dehors de $[-\pi/2, \pi/2]$ (ce qui conduit à renormaliser D). Cela n'est raisonnable que pour des valeurs de s suffisamment grandes, sinon une partie non négligeable de l'énergie devrait se propager suivant les x négatifs.

Le principe de la simulation est simple, il consiste à réaliser un signal de houle à partir des formules (11) et (19). Ensuite, le spectre temporel peut être calculé en chaque point, par analyse de Fourier, à partir du signal de houle⁶. Pour l'évaluation du spectre directionnel, on utilise les signaux d'élévation et de pentes en un point pour déterminer les cinq premiers coefficients du développement en série de Fourier de la fonction de répartition directionnelle (voir par exemple [5, 8, 10]) :

$$D(\omega, \theta) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta + a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta + \dots \quad (24)$$

Cela permet en particulier d'estimer l'étalement directionnel s selon la formule (voir par exemple [8, 10]) :

$$s \simeq \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{a_0 - \sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \quad (25)$$

3.3 Influence de la discrétisation en pulsation.

Dans un premier temps, on s'intéresse à l'évaluation numérique de l'influence de la discrétisation en pulsation. Pour cela, on prend $T_p = 2\pi/\omega_p = 1.5s$ et $s = 4$. On calcule ensuite le spectre temporel et le coefficient d'étalement directionnel au milieu du bassin ($y = b/2$) et en $x = 0$.

On montre sur la figure 2 la comparaison entre le spectre temporel souhaité, le spectre "moyen" et le spectre correspondant à une réalisation particulière pour une discrétisation sur 125 pulsations (correspondant, pour cette valeur de la pulsation de pic, à un nombre total de 11 077 composantes). Le spectre calculé est lissé sur 6 pulsations. Il est clair que la discrétisation est insuffisante pour reproduire correctement le spectre objectif. Le calcul du coefficient d'étalement conduit également à des variations très importantes de ce coefficient avec la pulsation, voir figure 3. En valeur moyenne, on obtient cependant une valeur relativement correcte, $s = 4.94$.

On montre sur la figure 4 la même comparaison, mais maintenant pour une discrétisation sur 1000 pulsations (correspondant, pour cette valeur de la pulsation de pic, à un nombre total de 88 150 composantes). Le spectre calculé est lissé sur 50 pulsations. On constate que pour cette discrétisation, le spectre s'approche de manière raisonnable du spectre théorique. Le coefficient d'étalement est donné sur la figure 5. On constate de même qu'il est en accord raisonnable avec la valeur théorique de s (la valeur moyenne de s est de 4.55), même s'il semble que le coefficient d'étalement est surévalué à basse fréquence (ce qui pourrait s'expliquer un nombre de composantes directionnelles insuffisant).

Cette discrétisation est du même ordre de grandeur que celle qu'il est suggéré [11] d'utiliser avec la technique de double sommation afin d'éviter les problèmes de manque d'ergodicité.

⁶ Cette analyse de Fourier est effectuée par transformée de Fourier rapide (FFT) en utilisant un pas en pulsation identique à celui de la discrétisation du spectre. Ceci est plus rapide numériquement que d'utiliser la formule (18) dont on n'a pas cherché à optimiser le calcul. Les résultats sont identiques.

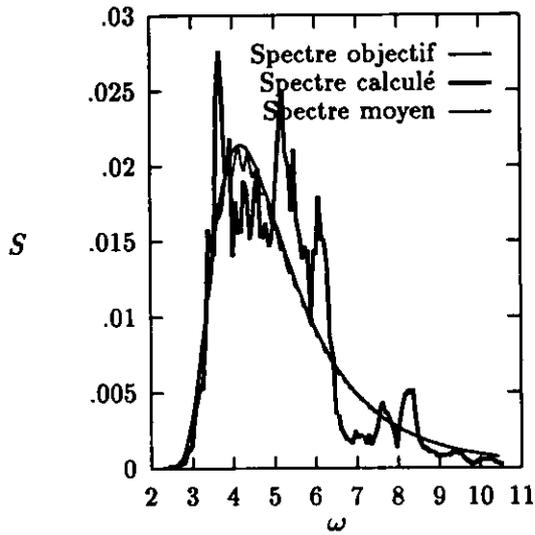


Figure 2: Spectre temporel en $x = 0$ et $y = b/2$ ($T_p = 1.5s$, spectre discrétisé avec 125 pulsations pour un total de 11 077 composantes)

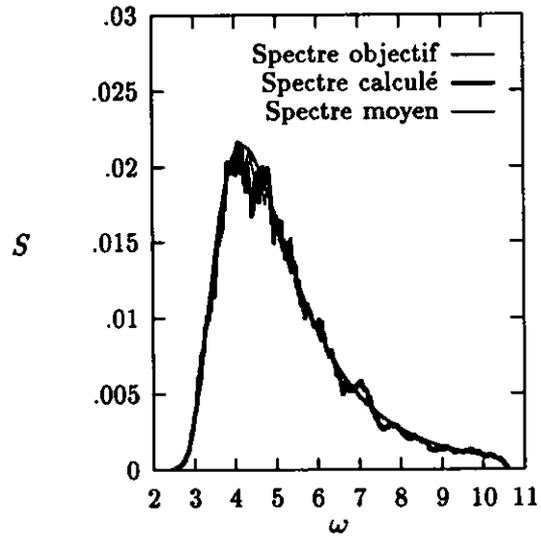


Figure 4: Spectre temporel en $x = 0$ et $y = b/2$ ($T_p = 1.5s$, spectre discrétisé avec 1000 pulsations pour un total de 88 150 composantes)

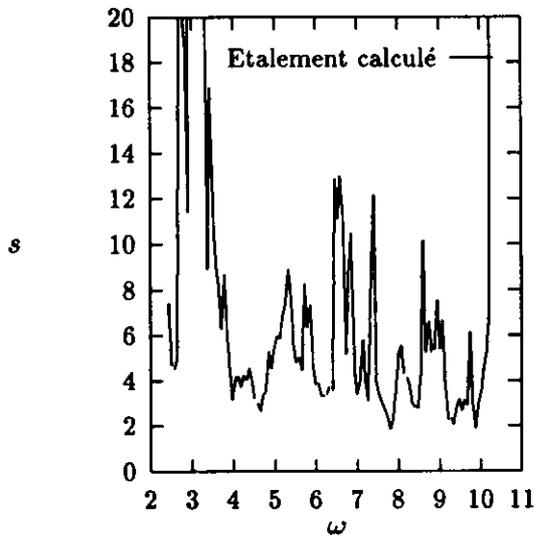


Figure 3: Coefficient d'étalement en $x = 0$ et $y = b/2$ ($T_p = 1.5s$, spectre discrétisé avec 125 pulsations pour un total de 11 077 composantes)

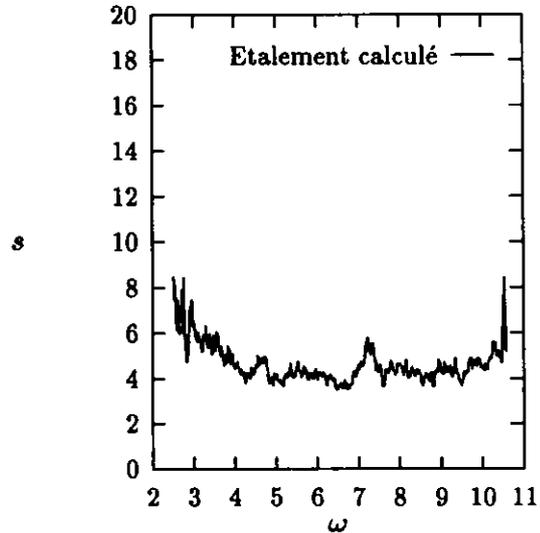


Figure 5: Coefficient d'étalement en $x = 0$ et $y = b/2$ ($T_p = 1.5s$, spectre discrétisé avec 1000 pulsations pour un total de 88 150 composantes)

3.4 Influence de la pulsation de pic (discrétisation en direction).

Cela conduit à s'interroger sur l'influence de la discrétisation en direction que, dans cette méthode, on ne maîtrise pas totalement et qui intervient de manière prépondérante dans le premier terme de (18). On notera que, pour une largeur fixée du bassin, faire varier la pulsation de pic du spectre de houle revient à en faire varier la discrétisation en direction. On montre sur les figures 6 à 9 les résultats correspondant à des simulations pour des périodes de pic de 2.5s et 3.5s. Le nombre de pulsations utilisées pour la discrétisation est toujours de 1000 (avec un lissage du spectre calculé sur 50 pulsations). Compte-tenu de l'influence de la pulsation sur la discrétisation en direction, cela conduit à un total de 31 806 composantes à 2.5s et de 16 230 composantes à 3.5s. Cette diminution du nombre de composantes s'accompagne d'une dégradation nette des résultats, les spectres moyens et calculés s'écartant très sensiblement du spectre objectif à 3.5s.

Raffiner la discrétisation en pulsation ne permet pas d'améliorer les résultats ; cela conduit principalement à faire tendre le spectre calculé vers le spectre moyen qui lui ne varie pas. On a aussi tracé, par exemple, le résultat d'un calcul avec 2000 pulsations (32 440 composantes) et un lissage du spectre calculé sur 100 pulsations pour $T_p = 3.5s$ sur les figures 8 et 9. La différence majeure entre ce calcul et celui avec 1000 pulsations est une meilleure convergence vers le spectre moyen, lui-même sensiblement différent du spectre objectif.

3.5 Influence de la position du point de mesure.

On a vu qu'en raffinant la discrétisation en pulsation, le spectre calculé en un point se rapprochait (après lissage) du spectre moyen. Pour étudier l'influence de la position du point de mesure, on est donc conduit à regarder comment varie le spectre moyen avec x et y .

Un premier résultat (dans le cadre de la théorie linéaire avec réflexions parfaites sur les parois utilisée ici) est que le spectre moyen ne dépend pas de x . Ceci est clairement l'avantage majeur de la méthode, puisque cela conduit à une zone utile de longueur infinie. Ce résultat paraît donc particulièrement intéressant pour des essais de tenue à la mer avec vitesse d'avance.

Quant à la variation avec y , on l'a étudiée numériquement dans le cas d'une période de pic $T_p = 3.5s$. On montre sur la figure 10 le spectre moyen à diverses valeurs de y comprises 0 et $b/2 = 15m$ ($y = 0$ correspondant à la paroi et les résultats étant symétriques par rapport à l'axe du bassin). On constate d'abord que le spectre sur la paroi du bassin est nettement supérieur au spectre objectif. Cela résulte du fait que les amplitudes des deux composantes de directions symétriques par rapport à l'axe du bassin s'ajoutent sur la paroi puisqu'elles sont en phase ; leur contribution au spectre est donc le double de ce qu'elle devrait être. A 2.5m de la paroi, le spectre est encore (dans le cas étudié ici) notablement perturbé. Entre 7.5m et 15m, on voit apparaître des variations plus faibles du spectre moyen (bien qu'importantes dans ce cas où la discrétisation en direction est insuffisante). On notera en particulier des discontinuités des spectres moyens aux pulsations de coupure (ici 1.43, 1.76, 2.03, 2.30, 2.48, ..., rad/s). Ce n'est que dans une zone étroite, de largeur environ 2m, que le spectre moyen est 'à peu près' constant.

3.6 Influence de l'étalement directionnel.

Il n'y a pas d'influence considérable de l'étalement directionnel sur les résultats présentés jusqu'à maintenant, du moins dans la gamme $s \in [4, 20]$ pour laquelle des simulations ont été effectuées. Avec l'étalement en $\cos^{2s}(\theta/2)$ choisi ici, un problème apparaît cependant pour de faibles valeurs de s du fait de la propagation, pour le spectre objectif, de composantes de houle vers les x négatifs. Cela conduit à une différence importante entre le s objectif et le s estimé.

Comme illustration, on montre sur la figure 11 deux vues de la surface libre (à $t = 0$ et pour $x \in [0, 60]m$) dans le cas de $T_p = 2.5s$ et avec $s = 4$ et 20. Les simulations sont effectuées en utilisant 1000 fréquences pour la discrétisation et le tracé utilise un pas en espace de 2m. Il est

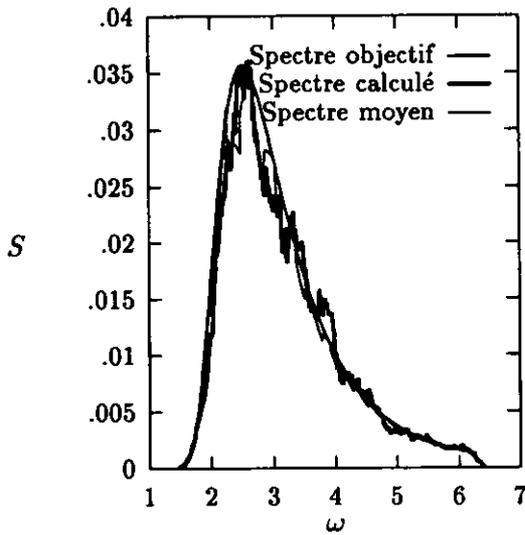


Figure 6: Spectre temporel en $x = 0$ et $y = b/2$ ($T_p = 2.5$ s, spectre discrétisé avec 1000 pulsations pour un total de 31 806 composantes)

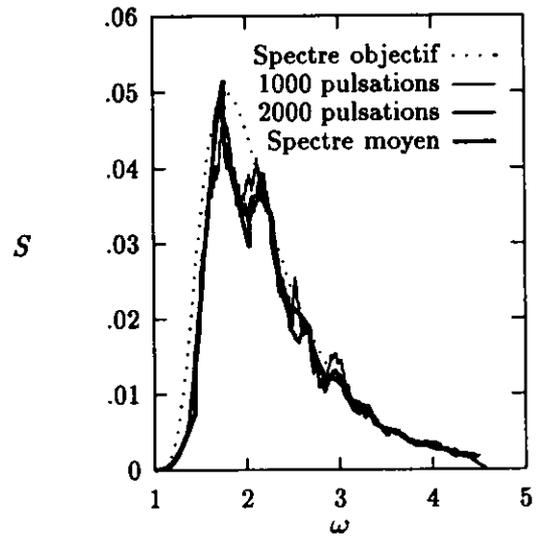


Figure 8: Spectre temporel en $x = 0$ et $y = b/2$ ($T_p = 3.5$ s, spectre discrétisé avec 1000 et 2000 pulsations pour un total de 16 230 et 32 440 composantes)

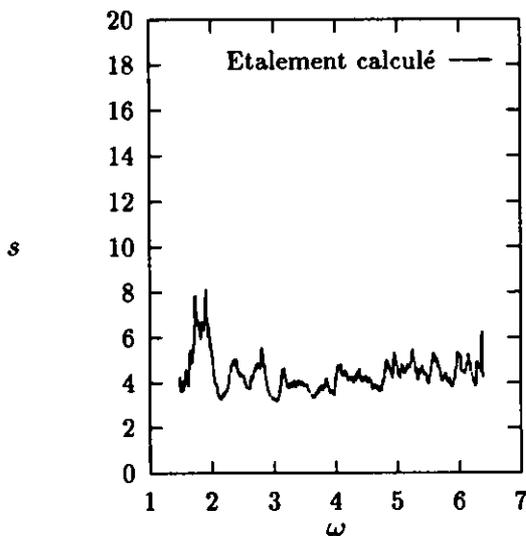


Figure 7: Coefficient d'étalement en $x = 0$ et $y = b/2$ ($T_p = 2.5$ s, spectre discrétisé avec 1000 pulsations pour un total de 31 806 composantes)

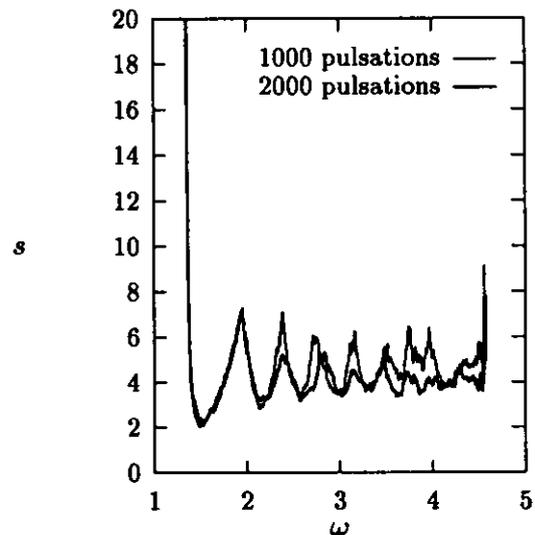


Figure 9: Coefficient d'étalement en $x = 0$ et $y = b/2$ ($T_p = 3.5$ s, spectre discrétisé avec 1000 et 2000 pulsations pour un total de 16 230 et 32 440 composantes)

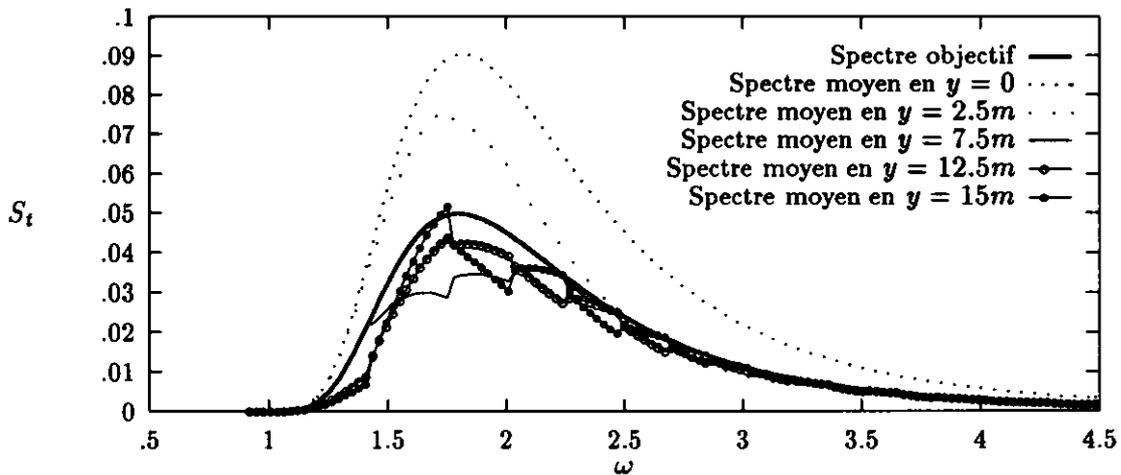


Figure 10: Variation du spectre moyen en fonction de la distance latérale ($T_p = 3.5s$)

délicat d'affirmer quoi que ce soit à la seule vue de cette figure, mais il est clair que l'on retrouve bien un état de mer moins multidirectionnel quand s augmente.

3.7 Normalité du processus.

On n'a pas cherché à démontrer ou à infirmer de manière théorique la normalité du processus (ce qui pourrait sans doute se faire à l'aide du théorème central limite).

On a par contre effectué des tests numériques fondés sur la méthode de Kolmogorov-Smirnov pour toutes les simulations réalisées. Ils ne permettent pas d'affirmer que les densités de probabilités de premier order des signaux simulés (élévation et pentes de la surface libre en un point considérées comme processus aléatoires ergodiques fonctions du temps) ne sont pas gaussiennes.

4 Conclusion

On a étudié, de manière théorique et numérique, une technique devant permettre de réaliser dans un bassin rectangulaire un état de mer multidirectionnel de direction moyenne selon l'axe du bassin et dans une zone utile 'infinie' selon cette direction. Il s'agit donc d'une technique d'un intérêt évident pour des essais de tenue à la mer avec vitesse d'avance en mer de l'avant (voire de l'arrière).

En faisant un certain nombre d'hypothèses (théorie linéaire, réflexions parfaites sur les parois latérales, bassin semi-infini selon l'axe des x , possibilité d'exciter de manière sélective tous les modes à l'aide du générateur de houle), on a montré que cette technique, sans être 'fantaisiste', souffre d'inconvénients assez similaires à ceux de la technique classique de double sommation. Deux différences essentielles en sont cependant que l'on ne maîtrise pas ici la discrétisation en direction qui est déterminée par la pulsation et la largeur du bassin et que des cohérences de phases sont induites par les réflexions sur les parois. Il en résulte en particulier un manque d'homogénéité intrinsèque à la méthode qui apparaît aussi bien dans l'expression de l'autocorrélation spatio-temporelle (14) que dans celle du spectre temporel (18).

En prenant comme seuls critères le spectre temporel en un point et l'estimée de l'étalement directionnel, et à la vue des résultats numériques présentés ici (pour un spectre de Bretschneider),

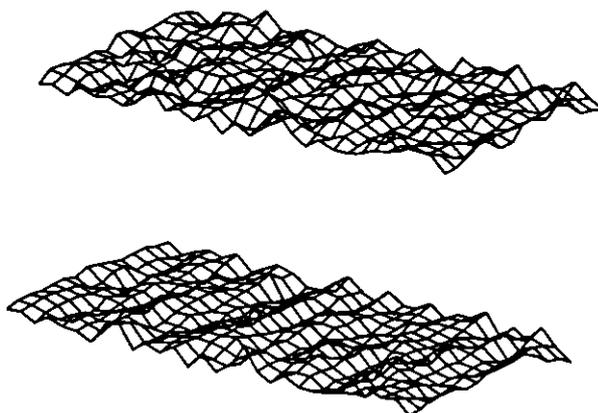


Figure 11: Visualisation de la surface libre sur une longueur de 60m pour $T_p = 2.5s$ et $s = 4$ (en haut) et 20 (en bas)

il semble nécessaire d'utiliser une discrétisation avec au moins 1000 pulsations et 31 directions à la pulsation de pic (le cas $T_p = 1.5s$ correspondant à 35 directions à la pulsation de pic). La discrétisation en pulsation ne pose pas de problème majeur ; la discrétisation en direction conduit, pour une largeur du bassin b donnée, à une période de pic maximum réalisable :

$$T_p \simeq \sqrt{\frac{4\pi b}{Mg}} \simeq 0.3 \sqrt{b} \quad (26)$$

avec $2M + 1 \simeq 31$.

Ce résultat demanderait à être confirmé par des simulations supplémentaires et des études théoriques, en particulier en ce qui concerne la variation de l'autocorrélation spatio-temporelle⁷.

Quel que que soit le résultat de ces études complémentaires, il est clair que les largeurs nécessaires sont très importantes, de sorte que les techniques plus traditionnelles de génération, voire d'autres techniques mettant à profit les réflexions, devraient également pouvoir être utilisées avec des longueurs utiles selon x assez importantes.

A ce stade de l'étude, il conviendrait donc de voir dans quelle mesure l'avantage 'décisif' de la méthode, à savoir la longueur utile infinie selon l'axe des x , n'est pas remis en cause par des phénomènes non pris en compte pour l'instant, en particulier les effets non-linéaires dans la propagation de la houle et les réflexions imparfaites sur les parois.

Parmi les problèmes qui mériteraient aussi d'être étudiés avant de procéder à une évaluation expérimentale de la technique, il faut citer le calcul exact des lois de mouvements des batteurs en prenant en compte leur géométrie et, en particulier, leur nombre fini ; et le calcul des ondes évanescences afin de déterminer à quelle distance du batteur il conviendrait de se placer et d'éviter, le cas échéant, les pulsations trop proches des pulsations de coupure.

⁷On notera également qu'on pourrait envisager de 'corriger' la réalisation du signal de houle pour obtenir l'égalité entre le spectre objectif et le spectre moyen à une distance latérale y donnée ($y = b/2$ par exemple). On n'aura cependant alors un spectre moyen proche du spectre objectif qu'au voisinage de l'axe — voir figure 10.

Il reste finalement à mentionner le problème ingrat mais essentiel de la mesure en bassin de la houle, la seule observation de l'état de mer ne permettant certainement pas de se prononcer sur les qualités de la méthode (cela pose d'ailleurs aussi des questions quant à la manière d'interpréter les résultats d'essais sur houle multidirectionnelle).

Remerciements

Cette étude a été réalisée avec la participation d'élèves de l'ENSTA (MM. Antoine Archer, Thierry Dassonville et Pierre Temperville) dans le cadre de l'enseignement par la recherche [1]. Elle a bénéficié d'un soutien financier partiel de la DRET (étude 90/1004 J) et de discussions avec MM. Bernard Molin et Loïc Boudet.

Références

- [1] Archer, A., et Dassonville, T., 1991 et Temperville, P., 1990, Reproductibilité de la houle en bassin directionnel, Rapports d'enseignement par la recherche, ENSTA.
- [2] Darlymple, R.A., 1989, "Théorie du batteur de houle directionnel avec réflexion sur les parois latérales", *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 27, pp. 23-34.
- [3] Gilbert, G., et Huntington, S.W., 1991, "Technique pour générer des ondes courtes en cuve à houle", *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 29, pp. 789-799.
- [4] Jefferys, E.R., 1987, "Directional seas should be ergodic," *Applied Ocean Research*, Vol. 9, pp. 186-191.
- [5] Longuet Higgins, M.S., Cartwright, D.E., et Smith, M.D., 1963, "Observation of the directional spectrum of sea waves using the motions of a floating buoy", *Ocean Wave Spectra*, Practice Hall Inc., pp. 111-136.
- [6] Madsen, O.S., "A three-dimensional wave-maker, its theory and application," *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 12, pp. 205-222. '
- [7] Miles, M.D., et Funks, E.R., 1987, "A comparison of methods for synthesis of directional seas", OMAE Conference, Houston, pp. 247-255.
- [8] Mitsuyasu, H., et al., 1975, "Observations of the directional spectrum of ocean waves using a coverleaf buoy," *J. Physical Oceanography*, Vol. 5, pp. 750-760.
- [9] Molin, B., 1991, "Génération de houle multidirectionnelle dans un bassin rectangulaire. Application à une petite cuve à houle", Etude 2403, pièce 4, Bassin d'Essais des Carènes.
- [10] Sand, S.E., et Mynett, E., 1987, "Directional wave generation and analysis", AIRH Seminar on Wave Analysis and Generation in Laboratory Basins, Lausanne, pp 209-235.
- [11] Stansberg, C.T., 1987, "Statistical properties of directional seas measurements," *J. Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, Vol. 109, pp. 142-147.
- [12] Takezawa, S., et Hirayama, T., 1992, "New experimental techniques on ship motions in directional spectrum waves," 19th Symposium on Naval Hydrodynamics, Séoul, Corée.
- [13] Tulin, M.P., et Kolaini, A., 1986, "Steep short-crested waves produced by a simple three-dimensional wavemaker," ATTC.
- [14] Tulin, M.P., et Yao, Y., 1992, "Wavemaking by heaving bodies in long tanks, including nonlinear group formation near resonance," 19th Symposium on Naval Hydrodynamics, Séoul, Corée.