

4e JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE

1, 2, 3 mars 1993 - Nantes

GENERATION ET MESURE DE LA HOULE ALEATOIRE EN BASSIN

Bénaouda DAOUD - Jean-Michel KOBUS

*Laboratoire de Mécanique de Fluides de l'ECN, URA 1217, Division d'Hydrodynamique Navale
1, rue de la Noë - 44072 NANTES CEDEX 03*

Résumé

Cet article est une contribution à l'amélioration des procédures d'essais sur houle aléatoire. Il concerne plus particulièrement des travaux sur la génération des états de mer qui ont été réalisés pour les besoins des bassins de houle et des carènes du Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'ECN.

Dans la première étape nous abordons le problème de la génération des états de mer aléatoire. La méthode que nous avons mise au point est une méthode itérative qui permet de construire le signal de commande du batteur à partir de la fonction de transfert de celui-ci déterminée expérimentalement pour chaque spectre à reproduire.

Les signaux de commande des batteurs de houle sont obtenus grâce à une technique déterministe qui permet de construire des séquences temporelles pseudo-périodiques à partir des spectres de houle.

Dans la deuxième partie, nous décrivons une technique qui permet d'obtenir analytiquement le spectre d'un signal à partir de sa fonction d'autocorrélation expérimentale approximée par une série d'exponentielles complexes.

Ce procédé d'analyse permet, à partir d'une séquence unique de longueur au moins égale à une pseudo-période, d'obtenir une des formes lissées du spectre de houle, ce qui facilite grandement la détermination des fonctions de transfert du batteur utilisées pour la génération des vagues.

Summary

The work presented in this paper is a contribution to a perfecting experimental procedures related to testing on random waves. It concerns particularly with investigations in sea states generation field which are realized for needs of the (ECN) wave basin of fluid mechanics.

In the first part of this paper, we get on the problem of random sea state generation. The method we perform is iterative and permits to create a driving signal with help of the wave generator transfer function. This transfer function is determined experimentally for every spectrum.

The driving signals are obtained by a deterministic technique which allows to create a pseudo-periodic temporal series from wave spectrums.

In the second part, we describe a technique which allows to obtain analytically the spectrum of a given signal from its approximate experimental autocorrelation function by sum of complex exponentials.

This analysis process gives a smoothed wave spectrum, from a single sequence whose length is at least equal to one pseudo-period, what makes easier the generator transfer function determination for wave generation.

PARTIE 1

MÉTHODE DE GÉNÉRATION EN BASSIN, DE HOULES
IRRÉGULIÈRES À PARTIR DE SPECTRES DONNÉS

1.1. PRINCIPE DE LA MÉTHODE

Le principe de la méthode est d'établir par étapes successives un régime de houles de spectre donné sans connaître de façon précise la fonction de transfert batteur-houle.

Le premier spectre de commande du batteur $S_c(f)$ est obtenu à partir du spectre de la houle à reproduire $S_s(f)$ et de la fonction de transfert du batteur calculée par une méthode linéarisée $H_l(f)$ [5].

$$S_c(f) = S_s(f) / [H_l(f)]^2 \quad 1.1$$

Pour les itérations suivantes la fonction de transfert $H_m(f)$ est expérimentale.

$$S_c(f) = S_s(f) / [H_m(f)]^2 \quad 1.2$$

$H_m(f)$ est déduite de l'analyse de la houle obtenue en bassin, qui fournit le spectre mesuré $S_m(f)$, et du spectre de commande de l'itération précédente. On a en effet

$$H_m(f) = \sqrt[3]{S_m(f) / S_c(f)} \quad 1.3$$

Une fois le procédé initialisé par la donnée de la fonction de transfert théorique, toutes les séquences itératives se répètent identiquement. On arrête les itérations lorsque l'écart entre le spectre obtenu et le spectre souhaité est satisfaisant.

Le signal de commande des batteurs est généré par la méthode dite de "la phase aléatoire". Cette méthode est fondée sur la division du spectre en bandes de fréquence de largeur constante Δf . A chaque bande on fait correspondre un signal harmonique ayant une moyenne quadratique égale à la surface de la bande et dont la phase est choisie aléatoirement. Le signal final est calculé par l'expression 1.4. Il est la somme des différents signaux harmoniques ainsi constitués. Il est pseudo-aléatoire avec une période de répétition égale à $1/\Delta f$.

$$\zeta(t) = \sum_{i=1}^L c_i \cdot \cos(2\pi \cdot f_i \cdot t + A_i) \quad ; \quad c_i = \sqrt{2 \cdot S(f_i) \cdot \Delta f} \quad 1.4$$

avec,

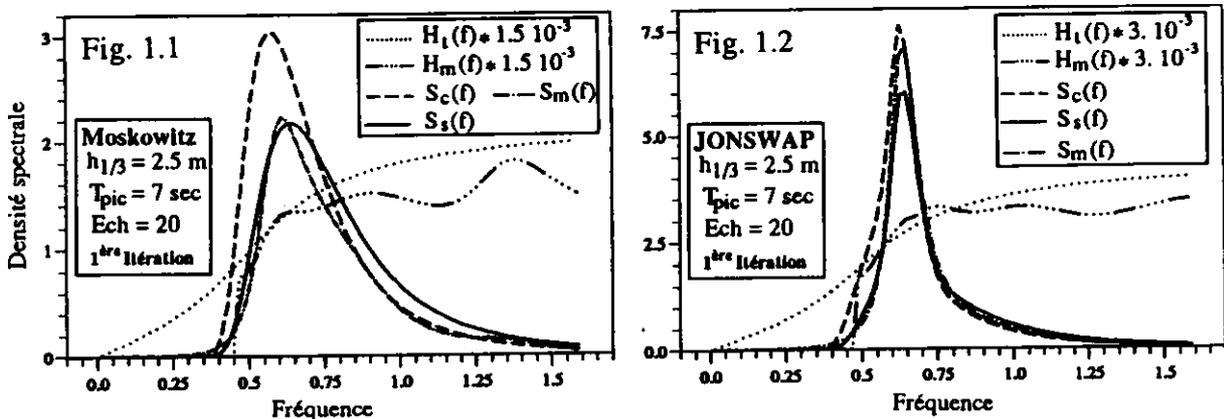
- L : nombre de composantes du signal. (en général nous avons pris $L = 50$)
 S(f) : spectre d'énergie donné ; f_i : fréquence de la composantes $i = i \Delta f$
 A_i : phase aléatoire, uniformément distribuée dans l'intervalle $[0, 2\pi]$.

L'analyse spectrale de la houle obtenue en bassin a été réalisée à l'aide d'une méthode originale qui est fondée sur un lissage de la fonction d'autocorrélation expérimentale par une somme d'exponentielles complexes. Cette méthode est décrite dans la partie 2 de cet article.

1.2. ANALYSE DES RÉSULTATS DE LA PREMIÈRE ITÉRATION DU PROCESSUS DE
GÉNÉRATION DE LA HOULE.

Nous donnons l'exemple de deux applications réalisées en vue de générer un spectre du type JONSWAP et un spectre du type Moskowitz à l'échelle 1/20 ayant chacun une période de pic et une hauteur significative identiques.

Sur les figures 1.1 et 1.2 on peut voir les résultats obtenus en utilisant la fonction de transfert théorique du batteur pour générer le signal de commande.



Ces résultats permettent de faire plusieurs remarques sur les fonctions de transfert mesurées.

D'abord la technique utilisée pour déterminer la fonction de transfert est inévitablement imprécise aux basses et hautes fréquences, là où l'énergie du spectre est très faible.

Au voisinage du pic du spectre de houle la fonction de transfert mesurée fluctue autour de la fonction de transfert théorique et cela de façon plus ou moins prononcée suivant les cas. On constate que la fonction de transfert n'est pas unique et varie d'un spectre généré à l'autre, alors qu'ils ont même fréquence de pic et la même hauteur significative.

Enfin on constate que les spectres de houle obtenus ont de la puissance à des fréquences plus basses que la plus basse des fréquences du spectre de commande.

Avant de poursuivre les itérations pour améliorer la concordance du spectre mesuré avec le spectre souhaité, nous nous sommes assuré que les particularités des fonctions de transfert ne sont pas provoquées par des réflexions dues à une insuffisance des amortisseurs de houle.

Pour cela, nous avons utilisé la méthode proposée par Mansard et Funke [4] qui permet de séparer les spectres incident et réfléchi à partir du spectre mesuré en bassin. Nous l'avons mise en œuvre en utilisant nos programmes d'analyse spectrale et interspectrale [Partie 2].

Après avoir testé la méthode en bassin sur un spectre JONSWAP nous avons constaté que le spectre incident est très proche du spectre mesuré. Les ondulations constatées sur la fonction de transfert expérimentale du batteur ne sont donc pas dues à la réflexion de la houle.

Pour tenter d'expliquer la différence entre les fonctions de transfert mesurée et théorique il faut rappeler que cette dernière se calcule fréquence par fréquence par une méthode linéarisée.

La condition de surface libre est linéarisée et affichée sur la surface libre au repos, les conditions aux limites sur le batteur sont affichées sur la position moyenne verticale.

Si on génère par le batteur des houles à une fréquence donnée, le modèle convient pour peu que les amplitudes ne soient pas trop grandes. En revanche, lorsqu'on veut générer plusieurs fréquences différentes en même temps, l'hypothèse de superposition linéaire ne tient pas compte des couplages entre les composantes.

A notre avis ces couplages suffisent à expliquer pourquoi la fonction de transfert mesurée est fluctuante et pourquoi elle dépend du spectre que l'on veut générer. Les phases entre composantes doivent probablement avoir aussi une influence sur le phénomène.

On peut aussi penser que les couplages génèrent des basses fréquences.

Le problème que nous venons de soulever pourrait faire l'objet d'une étude en lui même mais ce n'est pas notre propos dans la mesure où le procédé itératif que nous avons adopté permet de tenir compte directement de la fonction de transfert mesurée pour apporter progressivement les corrections nécessaires au signal de commande du batteur.

1.3. RECONDITIONNEMENT DE LA FONCTION DE TRANSFERT MESURÉE POUR L'AMÉLIORATIONS DE LA GÉNÉRATION DES SIGNAUX DE COMMANDE DU BATTEUR

Comme nous l'avons déjà mentionné, le calcul de la fonction de transfert est imprécis en dehors de l'intervalle de fréquence où la puissance du spectre est significative. Cela peut poser des problèmes pour la reconstitution du spectre de houle aux basses et hautes fréquences de l'intervalle de définition. Pour pallier cet inconvénient nous remplaçons la fonction de transfert expérimentale calculée à la première étape par un segment de droite passant par zéro pour les basses fréquences et par un raccordement à la fonction de transfert théorique à l'aide de splines cubiques pour les hautes fréquences. Le principe de reconditionnement de la fonction de transfert mesurée est détaillé dans [5].

Par ailleurs, sur les spectres mesurés en bassin nous obtenons quasiment systématiquement de la puissance à des fréquences plus basses que la plus basse des fréquences de commande. Ce fait est à notre avis dû à des couplages entre composantes de fréquences plus élevées.

Pour tenter de diminuer la puissance des spectres mesurés dans cette plage, nous annulons le spectre de commande sur quelques pas de fréquence au delà de la plus basse fréquence du spectre souhaité. Cette solution pratique, sans justification sérieuse, améliore un peu la partie basse du spectre sans régler le problème.

1.4. HOULES GÉNÉRÉES EN UTILISANT LES FONCTIONS DE TRANSFERT EXPÉRIMENTALES

Nous donnons en exemple des essais réalisés avec les mêmes spectres qu'en 1.2. Les résultats de la première itération ont été montrés sur les figures 1.1 et 1.2. Pour les itérations suivantes, on introduit dans le programme de génération, la fonction de transfert mesurée et reconditionnée au lieu de la fonction de transfert théorique. Pour chaque spectre nous avons réalisé trois itérations en utilisant les fonctions de transfert expérimentales.

Les résultats sont résumés sur les figures 1.3 à 1.10. Les figures 1.6 et 1.10 présentent la fonction de transfert théorique et les fonctions de transfert expérimentales obtenues à l'issue de chaque itération.

Dans le cas du spectre de Moskowitz le meilleur accord entre spectre mesuré et spectre souhaité ainsi qu'entre leurs moments respectifs est obtenu à la troisième itération. Néanmoins il subsiste entre eux des écarts au voisinage de la fréquence de pic. La réduction de ces écarts à la quatrième itération est suivie d'une dégradation de la précision en dehors de la gamme de fréquence où le spectre présente le plus d'énergie.

Dans le cas du spectre JONSWAP l'accord entre spectre mesuré et spectre souhaité au voisinage de la fréquence de pic s'améliore au fur et à mesure que le processus itératif se poursuit. Cette amélioration se paye par une dégradation de la précision sur le moment m_4 de la quatrième itération. Une dégradation principalement due aux ondulations du spectre mesuré autour du spectre souhaité dans l'intervalle de fréquence compris entre 0.8 et 1.5 Hz.

En ce qui concerne la technique proposée pour l'atténuation des spectres mesurés dans la zone des basses fréquences, les résultats obtenus ne sont pas toujours concluants. On peut constater sur la figure 1.4 que la coupure des basses fréquences du spectre de commande a permis d'atteindre l'objectif souhaité. En revanche dans les autres cas, il subsiste toujours un peu de puissance aux basses fréquences.

Il faut cependant remarquer que les oscillations à basse fréquence sont celles qui s'atténuent le plus lentement dans le bassin et qu'elles sont les plus difficiles à absorber par les plages amortisseuses. Pour vraiment apprécier la valeur de la procédure il faudrait attendre entre chaque essai un temps incompatible avec les impératifs d'exploitation.

On constate que durant la procédure de génération, les fonctions de transfert expérimentales successives sont très proches les unes des autres dans un intervalle de fréquence où la puissance du spectre est significative (figures 1.6 et 1.10). Cet intervalle est compris entre 0.5 hertz et environ 1.1 hertz. Pour les fréquences supérieures à 1.1 hertz les écarts entre les fonctions de transfert deviennent grands, mais d'après la formule 1.2, cela n'a pas de conséquences sur le spectre de commande dans la mesure où le spectre souhaité est très faible dans cette zone.

1.5. DESCRIPTION DES OPÉRATIONS PRATIQUES DE GÉNÉRATION DE LA HOULE ALÉATOIRE EN BASSIN.

Ce paragraphe est consacré à présenter l'organisation et les principales caractéristiques des différents modules de la procédure pratique de génération d'un état de mer de spectre donné.

Dans le but de rendre pratique l'utilisation du logiciel, une récapitulation des paramètres à la fin de chaque étape du calcul du signal de commande permet à l'utilisateur de revenir sur le choix de certains paramètres, voire tous les paramètres.

L'exécution du logiciel de génération est pilotée par un certain nombre de fichiers de commande.

Le premier intérêt de cette disposition est de simplifier l'utilisation de la procédure en rendant automatique la plupart des opérations. L'intervention de l'utilisateur est très réduite.

Le deuxième intérêt est la préparation des fichiers nécessaires au déroulement de la procédure, puis la gestion et le stockage des fichiers qui en résultent.

Les fichiers intermédiaires inutiles sont éliminés à la fin de chaque exécution afin d'optimiser la place mémoire sur le disque dur du micro-ordinateur.

La procédure de génération de houle aléatoire en bassin comporte cinq étapes présentées sous forme d'organigramme sur la figure 1.11.

1.6. CONCLUSION

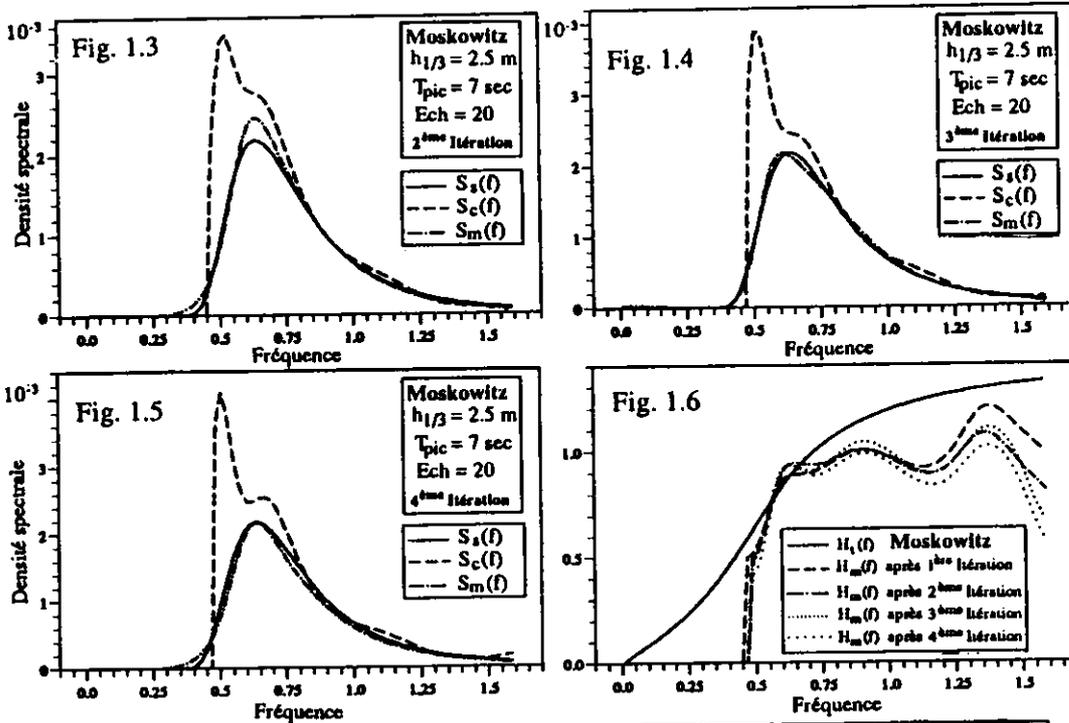
Si la génération des vagues résultait d'un processus linéaire, la fonction de transfert devrait être identifiée dès la première expérience. Le fait que cette fonction se modifie progressivement montre le caractère légèrement non linéaire du processus.

Notre méthode évite un travail fastidieux d'étalonnage du batteur où doit intervenir non seulement la fréquence et l'amplitude mais aussi la profondeur d'eau et la zone de mesure à cause de l'atténuation des vagues de haute fréquence avec la distance du batteur.

Bien que nécessitant la répétition du même essai à plusieurs reprises (2 à 3 fois), la génération par itérations successives permet de reproduire de façon satisfaisante un spectre de houle dans le bassin.

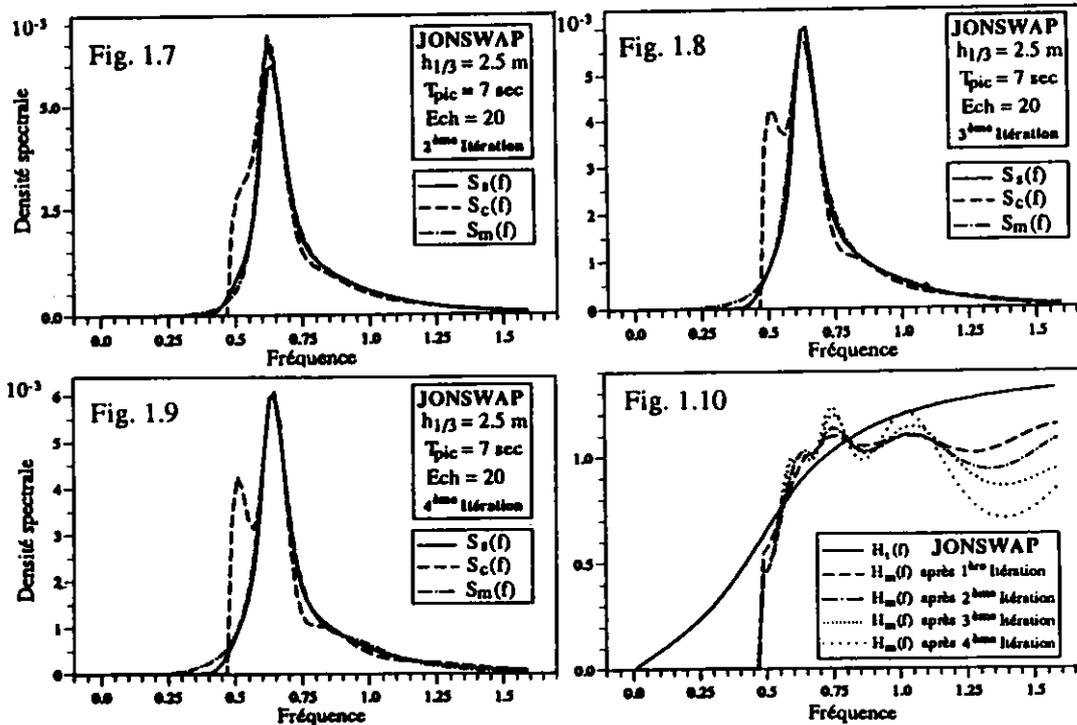
Les progrès viendront maintenant d'une compréhension plus fine des phénomènes liés à la génération de la houle en bassin et particulièrement de la génération des basses fréquences.

Nous nous intéressons maintenant à la généralisation de nos méthodes pour la génération et l'analyse des états de mer directionnels.



	moments du spectre souhaité	moments du spectre mesuré (1ère itération)	moments du spectre mesuré (2ème itération)	moments du spectre mesuré (3ème itération)	moments du spectre mesuré (4ème itération)
m_0	$9.41 \cdot 10^{-4}$	$7.79 \cdot 10^{-4}$	$7.79 \cdot 10^{-4}$	$9.49 \cdot 10^{-4}$	$8.69 \cdot 10^{-4}$
m_2	$6.34 \cdot 10^{-4}$	$4.97 \cdot 10^{-4}$	$4.97 \cdot 10^{-4}$	$6.50 \cdot 10^{-4}$	$5.81 \cdot 10^{-4}$
m_4	$5.94 \cdot 10^{-4}$	$4.44 \cdot 10^{-4}$	$5.64 \cdot 10^{-4}$	$6.14 \cdot 10^{-4}$	$5.36 \cdot 10^{-4}$

Génération de houle aléatoire (Spectre de Moskowitz $T_{pic} = 7$ s ; $h_{1/3} = 2.5$ m)



	moments du spectre souhaité	moments du spectre mesuré (1ère itération)	moments du spectre mesuré (2ème itération)	moments du spectre mesuré (3ème itération)	moments du spectre mesuré (4ème itération)
m_0	$12.36 \cdot 10^{-4}$	$12.85 \cdot 10^{-4}$	$12.39 \cdot 10^{-4}$	$12.82 \cdot 10^{-4}$	$12.83 \cdot 10^{-4}$
m_2	$7.26 \cdot 10^{-4}$	$7.13 \cdot 10^{-4}$	$7.34 \cdot 10^{-4}$	$7.41 \cdot 10^{-4}$	$7.30 \cdot 10^{-4}$
m_4	$5.87 \cdot 10^{-4}$	$5.22 \cdot 10^{-4}$	$5.77 \cdot 10^{-4}$	$5.83 \cdot 10^{-4}$	$5.58 \cdot 10^{-4}$

Génération de houle aléatoire (Spectre de JONSWAP $T_{pic} = 7$ s ; $h_{1/3} = 2.5$ m)

ORGANIGRAMME GENERAL DE LA PROCEDURE DE GENERATION

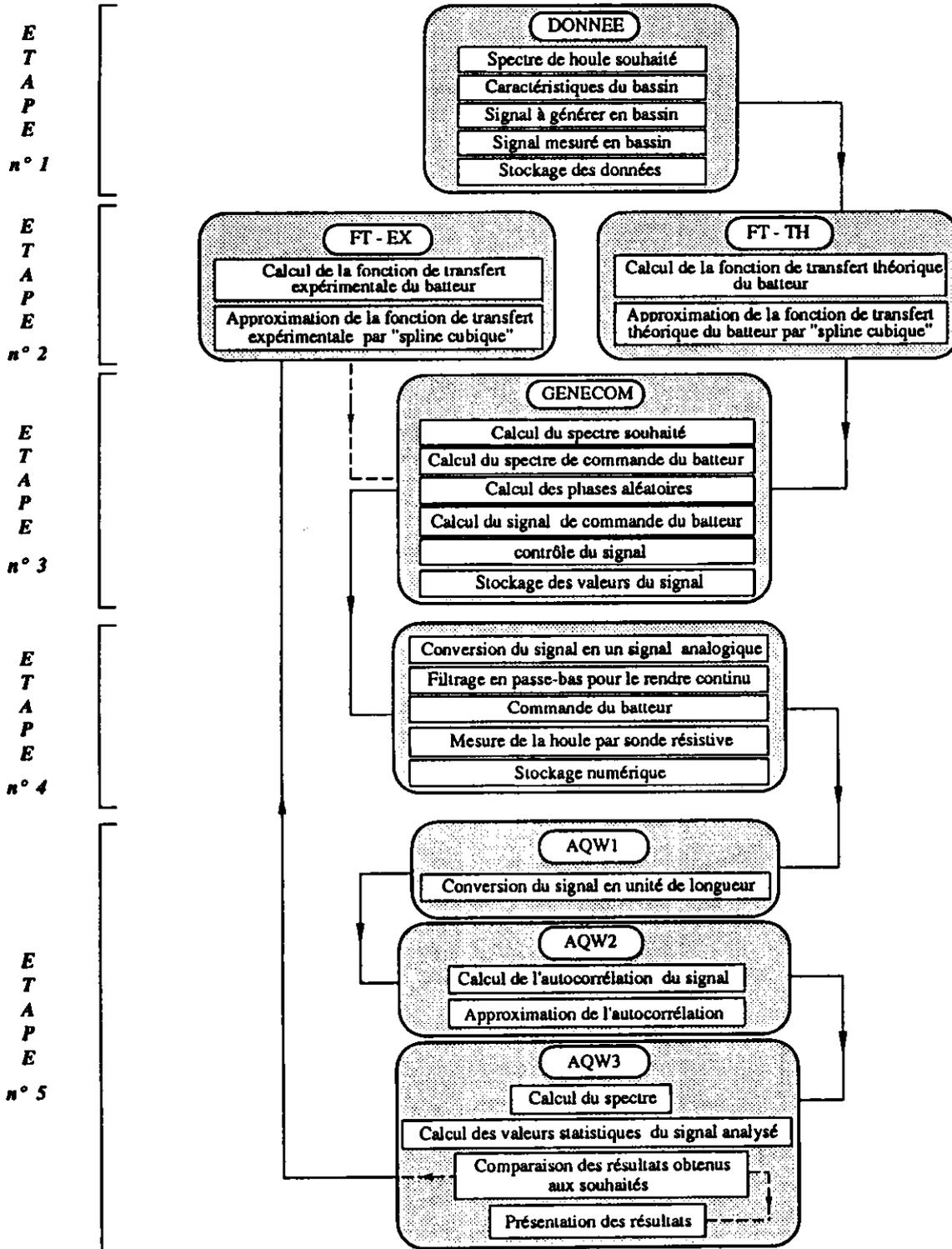


Figure 1.11

PARTIE 2

BASES D'UNE NOUVELLE METHODE D'ANALYSE SPECTRALE
A PARTIR DE LA FONCTION D'AUTOCORRELATION

2.1. INTRODUCTION

Les signaux de houle que nous sommes amenés à traiter ont des fréquences basses (de l'ordre du hertz) et une moyenne nulle. A cause des réflexions, la houle se dégrade rapidement dans les bassins et les séquences pendant lesquelles on peut considérer le signal comme stationnaire sont relativement courtes. Il est donc nécessaire de disposer d'une technique d'analyse spectrale fiable et adaptée à la spécificité de ces signaux.

Les spectres d'énergie obtenus par FFT présentent de nombreux pics. On peut certes pallier cet inconvénient en faisant une moyenne des spectres de plusieurs échantillons successifs, mais du fait de la dégradation relativement rapide des vagues dans un bassin, cette solution n'est pas adaptée.

Par ailleurs l'irrégularité du spectre FFT est un inconvénient quand on veut comparer directement le spectre des vagues mesurées dans un bassin avec le spectre à partir duquel on a généré le signal de commande des batteurs de houle.

Le calcul des fonctions de transfert est également plus précis lorsqu'on dispose d'une forme lissée pour les spectres d'excitation et de réponse. Par exemple, mouvement du batteur et houle obtenue, houle et mouvement d'un navire, etc...

Ces différentes constatations, nous ont amené à rechercher une méthode d'analyse qui permet d'obtenir un spectre lissé à partir d'un seul échantillon.

2.2. PRINCIPE DE LA METHODE

La méthode est fondée sur la constatation simple suivante :

Si une fonction peut être approximée par une somme d'exponentielles complexes, sa transformée de Fourier, si elle existe, s'exprime analytiquement en fonction des coefficients des composantes de l'approximation.

Cette propriété a été exploitée par Prony [3] pour calculer la transformée de Fourier d'un signal. Nous avons préféré l'utiliser pour le calcul de la densité spectrale de puissance à partir de la fonction d'autocorrélation. La raison de ce choix est que la fonction d'autocorrélation tend rapidement vers zéro ce qui limite l'intervalle d'approximation.

La densité spectrale $S(\omega)$ et l'autocorrélation $R(\tau)$ forment un couple de transformées de Fourier et sont donc en relation de la façon suivante :

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega) \cdot \exp(i\omega\tau) d\omega \quad ; \quad S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) \cdot \exp(-i\omega\tau) d\tau \quad 2.1$$

La fonction autocorrélation $R(\tau)$ est une fonction réelle et paire, qui a son maximum en $\tau = 0$.

La densité spectrale de moyenne quadratique $S(\omega)$ que nous appellerons aussi en abrégé spectre de puissance ou simplement spectre est une fonction réelle, positive et paire.

L'estimation numérique du spectre sera faite à partir de l'approximation de $R(\tau)$ par une somme d'exponentielles complexes.

Utilisons la propriété de parité de $R(\tau)$ pour écrire,

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} R(\tau) \cdot \exp(i\omega\tau) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} R(\tau) \cdot \exp(-i\omega\tau) d\tau \quad 2.2$$

Notons $\tilde{R}(\tau)$ l'approximation de $R(\tau)$ pour τ positif ou nul. Elle a la forme suivante:

$$\tilde{R}(\tau) = \sum_{i=1}^M a_i \cdot e^{\lambda_i \cdot \tau} \quad 2.3$$

où a_i et λ_i sont complexes. M est le nombre d'exponentielles.

Pour obtenir pratiquement la fonction d'autocorrélation sous la forme 2.3 nous utilisons la méthode d'approximation et les algorithmes mis au point par Daubisse [1] et [2].

L'approximation $\tilde{S}(\omega)$ de $S(\omega)$ compte tenu de (2.3) s'écrit :

$$2\pi \tilde{S}(\omega) = \sum_k^M \frac{a_k}{\lambda_k + i\omega} \exp(\lambda_k + i\omega)\tau \Big|_0^{\infty} + \sum_k^M \frac{a_k}{\lambda_k - i\omega} \exp(\lambda_k - i\omega)\tau \Big|_0^{\infty} \quad 2.4$$

La fonction d'autocorrélation étant amortie la partie réelle des λ_i ne peut pas être positive.

La relation (2.4) devient :

$$\tilde{S}(\omega) = -\frac{1}{\pi} \sum_k^M \left(\frac{a_k \lambda_k}{\lambda_k^2 + \omega^2} \right) \quad 2.5$$

La densité spectrale unilatérale réalisable physiquement $\tilde{\Phi}(\omega)$ est donc donnée par :

$$\tilde{\Phi}(\omega) = 2 \tilde{S}(\omega) = -\frac{2}{\pi} \sum_k^M \left(\frac{a_k \lambda_k}{\lambda_k^2 + \omega^2} \right) \quad 2.6$$

On voit donc que la méthode d'analyse va comporter plusieurs étapes :

- le calcul de la fonction d'autocorrélation du signal à partir d'une séquence échantillonnée.
- le calcul de l'approximation par exponentielles complexes de l'autocorrélation.
- le calcul du spectre par l'expression (2.6).

La méthode permet aussi des prolongements intéressants pour le calcul des moments du spectre et des grandeurs statistiques.

2.3. APTITUDE DE LA MÉTHODE DES EXPONENTIELLES AU CALCUL DES TRANSFORMÉES DE FOURIER

Plutôt que de tester directement la méthode sur des signaux, nous avons préféré contrôler d'abord son aptitude au calcul des transformées de Fourier. Pour cela nous avons choisi deux spectres typiques, couramment rencontrés en océanologie, et nous avons calculé leur transformée de Fourier inverse par la méthode d'approximation par exponentielles, pour obtenir les fonctions d'autocorrélation théoriques associées. Ces fonctions d'autocorrélation sont ensuite à leur tour approximées par exponentielles pour revenir aux densités spectrales. On compare alors le résultat obtenu avec le spectre de départ.

Un autre test consiste à traiter, par la méthode proposée, des signaux générés à partir d'un spectre donné. Les méthodes pour construire de tels signaux sont décrites dans [5]. L'autocorrélation discrète du signal est calculée, comparée à l'autocorrélation obtenue directement à partir du spectre. Elle est ensuite approximée par exponentielles afin de calculer le spectre. Celui-ci est comparé au spectre de départ pour évaluer les écarts.

2.3.1. CALCUL DE L'AUTOCORRÉLATION ASSOCIÉE À UN SPECTRE DONNÉ.

En utilisant la parité de $S(\omega)$, nous pouvons écrire l'autocorrélation sous la forme suivante :

$$R(\tau) = \int_0^{+\infty} S(\omega) \exp(-i\omega\tau) d\omega + \int_0^{+\infty} S(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega \quad 2.7$$

Plutôt que d'utiliser l'approximation de $S(\omega)$ pour ω positif nous préférons utiliser l'approximation de $\Phi(\omega)$ la densité spectrale unilatérale physiquement réalisable.

$$\Phi(\omega) = 2 S(\omega) \text{ pour } \omega > 0 \quad \text{et} \quad \Phi(\omega) = 0 \text{ pour } \omega < 0 \quad 2.8$$

Supposons que $\Phi(\omega)$ peut également se mettre sous la forme d'une série d'exponentielles :

$$\Phi(\omega) = \sum_k^{M'} b_k \exp(\mu_k \omega) \quad 2.9$$

On trouve une expression similaire à celle de (2.5) :

$$\text{soit} \quad R(\tau) = -\sum_k^{M'} \frac{b_k \mu_k}{\mu_k^2 + \tau^2} \quad 2.10$$

Les spectres utilisés en bassin sont pour la plupart issus du spectre de Moskowitz, et parfois du spectre JONSWAP. La bande de fréquence de définition des spectres correspond aux vagues pouvant être générées dans le bassin du laboratoire, soit environ de 0.3 Hz à 2.5 Hz. Le maximum des spectres se situe aux alentours de 0.8 Hz.

Comme application nous choisirons donc des spectres dont on trouvera les caractéristiques sur les figures (2.3) et (2.4).

La meilleure approximation des spectres a été obtenue pour un nombre d'exponentielles égal à 32 pour le spectre de Moskowitz et 56 pour le spectre JONSWAP.

Les fonctions d'autocorrélation déduites des spectres lissés au moyen de l'expression (2.10) sont visibles sur les figures (2.3) et (2.4).

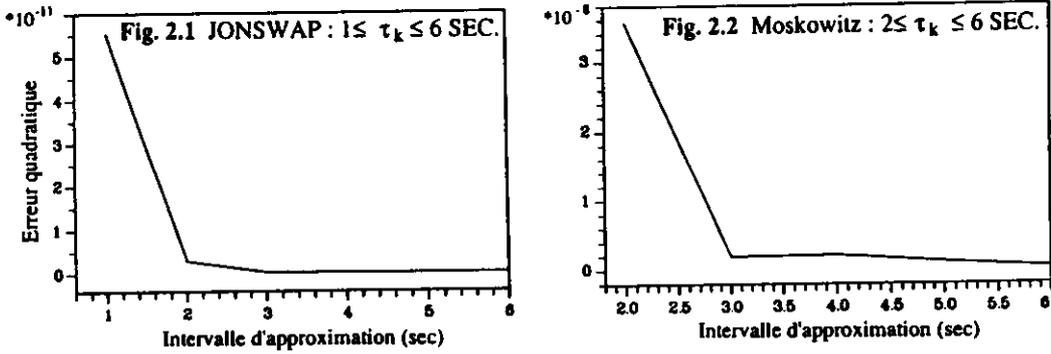
Bien qu'ayant des largeurs de bande voisines les deux spectres étudiés ont des fonctions d'autocorrélation associées différentes. Pour le spectre de Moskowitz, plus étalé, $R(\tau)$ est rapidement amortie, on voit sur la figure (2.3) qu'elle est quasiment nulle au delà de $\tau = 5$ s. Le spectre de JONSWAP, plus pointu, donne une fonction d'autocorrélation plus oscillante comme on peut le constater sur la figure (2.4).

2.3.2 RECONSTITUTION DES SPECTRES À PARTIR D'UNE FONCTION AUTOCORRÉLATION THÉORIQUE.

Une fois obtenues les fonctions d'autocorrélation, nous les utilisons pour reconstituer les spectres d'origine. La première question est de savoir sur quel intervalle il est nécessaire d'approximer $R(\tau)$ pour reconstituer le spectre par notre méthode.

Pour y répondre, nous comparons la qualité de la reconstitution du spectre en fonction de l'intervalle d'approximation τ_k en faisant varier celui-ci entre 1s et 6s. Les critères sont l'écart quadratique moyen et l'erreur relative sur la surface sous le spectre (le moment d'ordre zéro m_0) entre le spectre initial et le spectre reconstitué.

On constate sur les figures (2.1) et (2.2) que la qualité de la reconstitution est assez peu sensible à l'intervalle d'approximation et qu'elle est bonne entre 2s et 6s pour le spectre de Moskowitz et entre 3s et 6s pour le spectre de JONSWAP.



Erreur quadratique entre spectre souhaité et spectre calculé

Les figures (2.3) à (2.4) montrent les fonctions d'autocorrélation théoriques et leur approximation ainsi que les spectres initiaux et reconstitués.

Sur ces figures on remarque que l'approximation de la fonction d'autocorrélation reste correcte au delà de l'intervalle $(0, \tau_k)$, même s'il est réduit comme montré sur la figure 2.4.

C'est l'avantage de la méthode d'être fondée sur une approximation bien adaptée aux fonctions oscillantes amorties que sont les fonctions d'autocorrélation.

D'un point de vue pratique, on conçoit bien l'utilité de telles propriétés puisque cela permet de limiter le nombre de calculs de valeurs pour $R(\tau)$. Cet avantage sera exploité pleinement lorsque l'on utilisera les fonctions d'autocorrélation calculées à partir des signaux aléatoires, fonctions qui se dégradent lorsque τ augmente.

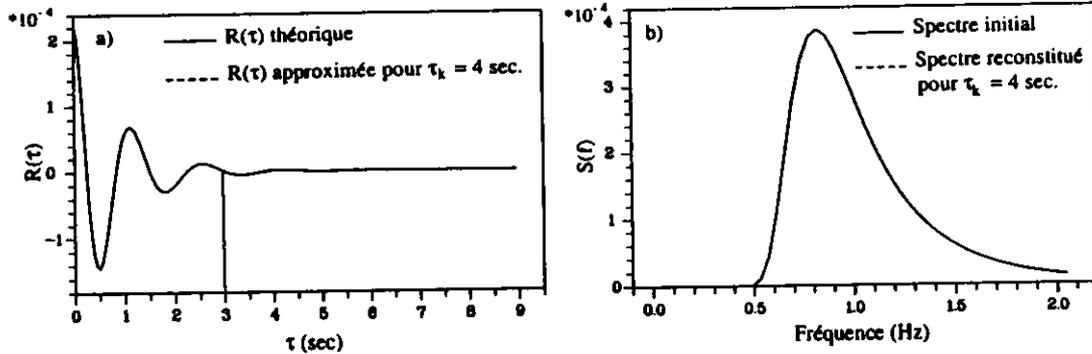


Fig. 2.3 Spectre de Moskowitz

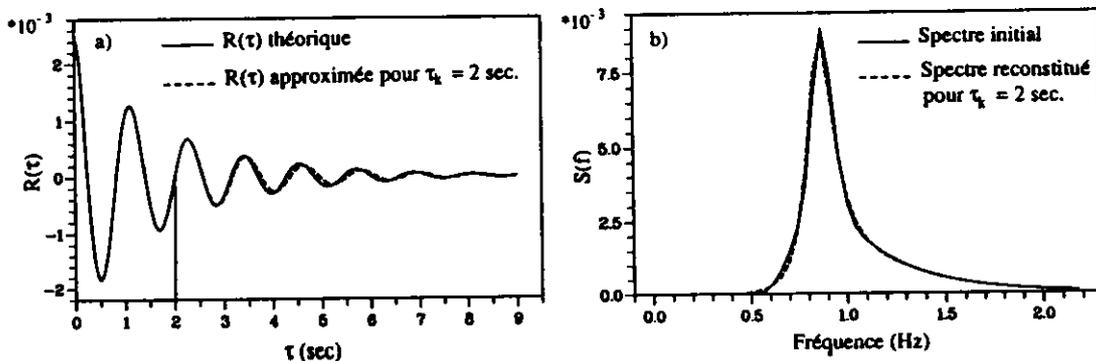


Fig. 2.4 Spectre JONSWAP

2.4 RECONSTITUTION DU SPECTRE À PARTIR DE LA FONCTION D'AUTOCORRÉLATION D'UN SIGNAL SIMULÉ.

Pour pouvoir contrôler la validité de la méthode, plutôt que d'utiliser un signal mesuré, nous avons préféré commencer par un signal simulé construit à partir de spectres donnés. Pour cela nous utilisons une méthode déterministe, dite méthode de la phase aléatoire, rappelée en 1.1. Le signal est une somme de composantes sinusoïdales déphasées aléatoirement :

Nous prendrons pour cette partie de l'exposé les mêmes spectres que précédemment.

Le signal obtenu est analysé pour reconstituer directement la fonction d'autocorrélation dont on déduit ensuite un spectre à comparer au spectre de départ.

2.4.1. CALCUL DE LA FONCTION D'AUTOCORRÉLATION

Si le phénomène aléatoire $x(t)$ objet de l'analyse est supposé ergodique, on a :

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^{(1)}(t) \cdot x^{(1)}(t+\tau) dt \quad 2.11$$

avec

$x^{(1)}(t)$: une réalisation considérée comme caractéristique du phénomène $x(t)$.
 T : intervalle d'intégration.

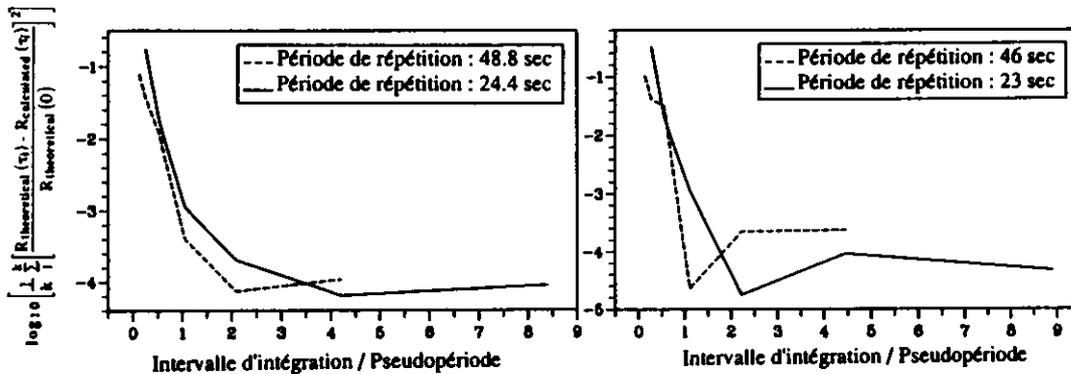
Dans la pratique, nous disposons d'un nombre N grand mais fini de valeurs du signal, prises à des intervalles de temps réguliers. Nous pouvons calculer par intégration numérique k valeurs approchées de la fonction d'autocorrélation en $\tau = j \Delta t$. On peut calculer par exemple avec la méthode d'intégration par trapèze de la façon suivante :

$$R(j) = \frac{1}{N} \left[\frac{x^{(1)}(0) x^{(1)}(j)}{2} + \frac{x^{(1)}(N-1-j) x^{(1)}(N-1)}{2} + \sum_{i=1}^{N-2-j} x^{(1)}(i) x^{(1)}(i+j) \right] \quad 2.12$$

où : $0 \leq j \leq k-1$; $k < N+1$ et $x^{(1)}(i) = x^{(1)}(i \Delta t)$

L'intervalle d'intégration a une longueur $N \Delta t$. Ce nombre diminue quand j augmente.

Les figures (2.5) et (2.6) montrent l'écart rapporté à la moyenne quadratique m_0 ($m_0 = R(0)$) entre l'autocorrélation théorique et l'autocorrélation calculée à partir des signaux générés par la technique de la phase aléatoire, et cela pour différentes valeurs du rapport (intervalle d'intégration / pseudopériode).



Erreur quadratique entre $R(\tau)$ théorique et $R(\tau)$ calculée rapportée à $R^2(0)$

Fig. 2.5

Moskowitz : $0 \leq \tau_k \leq 4$ SEC.

Fig. 2.6

JONSWAP : $0 \leq \tau_k \leq 5$ SEC.

Une longueur d'intégration de 50 secondes semble convenir et assurer une bonne convergence de l'autocorrélation. On constate que la coïncidence est bonne jusqu'à des valeurs de τ de l'ordre de 4s pour le spectre de Moskowitz, avec un intervalle d'intégration égal à 50s (figure 2.7); et de 5s pour le spectre de JONSWAP, avec un intervalle d'intégration de 100s (figure 2.8). Au delà de ces valeurs l'autocorrélation devient oscillante et s'écarte de la valeur théorique.

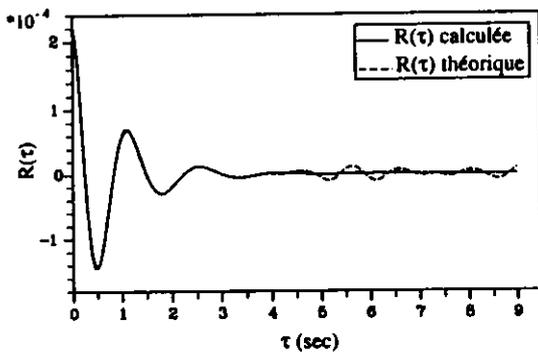


Fig. 2.7
égal à 51.2 sec (Moskowitz)

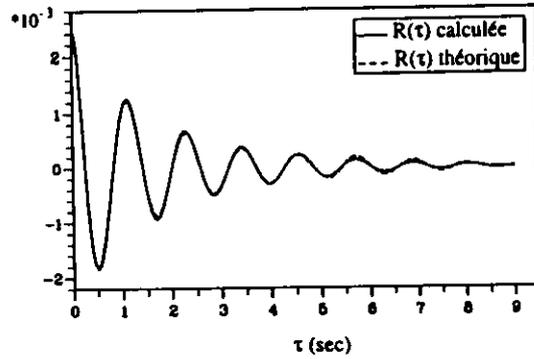


Fig. 2.8
égal à 102.4sec (JONSWAP)

Comparaison entre $R(\tau)$ théorique et $R(\tau)$ calculée
pour un intervalle d'intégration

2.4.2. RECONSTITUTION DU SPECTRE À PARTIR DE L'AUTOCORRÉLATION DISCRÈTE

On applique à l'autocorrélation du signal simulé la procédure déjà utilisée pour l'autocorrélation théorique en choisissant le temps de troncature d'après les conclusions du paragraphe 2.3.2.

Pour le spectre de Moskowitz, nous avons choisi $\tau_k = 3$ s. La figure 2.9a montre l'autocorrélation du signal et son approximation, et la figure 2.9b l'autocorrélation approximée du signal simulé et l'autocorrélation théorique obtenue directement à partir du spectre. On constate bien qu'en approximant avant les oscillations parasites, ces deux courbes sont très voisines, même en dehors de l'intervalle d'approximation.

La figure 2.9c montre le résultat final, à savoir le spectre initial et le spectre reconstitué.

Les figures 2.10a, 2.10b et 2.10c montrent la conséquence du choix d'un intervalle d'approximation de l'autocorrélation trop petit. En prenant $\tau_k = 1$ s on constate que l'information contenue dans la partie approximée est insuffisante pour que l'extrapolation de l'approximation soit valable en dehors de l'intervalle.

Les figures 2.11a, 2.11b et 2.11c montrent la conséquence du choix d'un intervalle d'approximation trop grand. Pour $\tau_k = 6$ s, on constate que l'approximation a des difficultés à suivre l'autocorrélation calculée du signal dans les oscillations parasites et qu'elle se rapproche moins bien de l'autocorrélation théorique. Le spectre reconstitué présente des irrégularités.

Une étude similaire a été menée avec la fonction d'autocorrélation d'un signal simulé à partir du spectre JONSWAP. Nous avons réalisé un test, en prenant la valeur de troncature τ_k obtenue d'après les conclusions du paragraphe 2.3.2., c'est à dire $\tau_k = 5$ s (voir figures 2.12a, 2.12b et 2.12c).

2.4.3. CONCLUSION SUR LES PERFORMANCES

En conclusion, nous pouvons dire que la méthode d'analyse spectrale proposée présente une certaine souplesse dans la mesure où ces résultats sont peu sensibles aux valeurs de τ_k dans l'intervalle de troncature déterminé grâce à l'étude menée au paragraphe 2.3.2.

Dans la pratique, si le spectre du signal analysé est connu d'avance, la valeur de la troncature τ_k est obtenue en comparant l'autocorrélation du signal mesuré à l'autocorrélation théorique obtenue par transformée de Fourier du spectre théorique.

Dans le cas où le spectre du signal mesuré est inconnu, il est nécessaire de visualiser l'autocorrélation afin de décider de sa troncature.

2.5. MISE EN ŒUVRE PRATIQUE DE LA MÉTHODE

La mise en œuvre pratique de la méthode commence par le choix d'un certain nombre de paramètres qui sont :

Δt	:	le pas de temps d'échantillonnage du signal
$N+k$:	le nombre de points d'échantillonnage du signal pour le calcul de $R(\tau)$.
k	:	le nombre de points de $R(\tau)$ pour l'approximation.
M	:	le nombre d'exponentielles pour l'approximation de $R(\tau)$.

Nous présentons sur les figures 2.13 à 2.16 les résultats obtenus sur quelques cas pratiques. Les résultats d'analyse par FFT qui servent de comparaison ont été obtenus avec une moyenne de spectre sur 2 ou 4 sous séquences de 512 points.

A - Choix du pas de temps d'échantillonnage du signal

La fréquence d'échantillonnage dépend du nombre de points que l'on choisit sur une période pour caractériser l'onde la plus courte, donc l'onde ayant la plus haute fréquence du spectre. Cette fréquence peut être fixée à dix fois la fréquence maximum du spectre de houle.

La fréquence maximum des spectres courants environ égale à 2.5 fois la fréquence de pic, doit être inférieure à une valeur limite dépendant des caractéristiques mécaniques et de l'asservissement du batteur.

B - Nombre de points d'échantillonnage du signal pour le calcul de $R(\tau)$.

Il est fonction de la longueur des séquences à analyser (cf. 2.4.1) et de leur fréquence d'échantillonnage.

C - Intervalle de définition de $R(\tau)$ et nombre de points pour l'approximation

Deux cas peuvent se présenter :

- La houle est générée à partir d'un spectre donné de caractéristiques connues. Dans ce cas la borne supérieure de l'intervalle d'approximation de $R(\tau)$ mesurée peut être facilement déterminée après avoir calculé l'autocorrélation théorique (cf. 2.3.1.).

- Dans le cas où le spectre du signal mesuré est inconnu, il est nécessaire de visualiser l'autocorrélation afin de choisir la valeur de τ_k . La meilleure valeur pour τ_k se situe dans une zone de minimum de fluctuations à environ une alternance avant ce minimum, voire plusieurs alternances dans le cas des spectres aigus.

D - Choix du nombre d'exponentielles complexes pour l'approximation de $R(\tau)$

Le nombre M d'exponentielles nécessaires pour une bonne approximation de l'autocorrélation est déterminé par une procédure automatique qui permet d'augmenter M jusqu'à obtenir l'écart quadratique moyen minimum entre $R(\tau)$ calculée et l'approximation. En contrôle cet écart est indiqué à l'opérateur.

E - Procédure d'analyse et temps de calcul

La procédure d'analyse que nous proposons n'est pas aussi simple à mettre en œuvre que la FFT même si pour cette dernière il est aussi nécessaire de faire des choix préalables du temps d'échantillonnage, du nombre de points, des fenêtres et éventuellement de mettre en place une procédure de calcul de moyenne des spectres.

En utilisant un ordinateur PC AT (80286 + coprocesseur arithmétique), il faut environ 5 à 10 minutes suivant la nature du spectre pour obtenir le résultat optimisé de l'analyse d'un signal de houle ou de réponse de navire. Il ne s'agit pas uniquement du temps de calcul mais du temps de l'ensemble des manipulations, à savoir : contrôle du signal, choix de l'intervalle utile, analyse temporelle préalable, choix des paramètres, tracé et contrôle de l'autocorrélation, choix de l'intervalle d'approximation et du nombre d'exponentielles, tracé du spectre et calcul des moments, sortie des résultats.

Le temps d'analyse est largement diminué pour une série d'essais donnant des signaux différents mais de même nature statistique, car les paramètres sont alors quasiment les mêmes.

Le temps de calcul peut paraître long, mais d'un point de vue pratique, il est à comparer à l'intervalle de temps entre deux essais sur houle qui est d'environ 20 à 30 minutes, le temps que le plan d'eau se calme.

La longueur de la procédure d'analyse est largement compensée par la qualité du résultat obtenu et par la souplesse que la méthode apporte quant au nombre de points de mesure. N'étant pas astreint à choisir une puissance de deux pour le nombre de points, nous pouvons utiliser pleinement les séquences utiles de mesure.

2.6. CONCLUSION

Nous avons montré l'efficacité de notre méthode pour le calcul des transformées de Fourier de fonctions densité spectrale et autocorrélation telles que celles que l'on rencontre dans le domaine de la tenue à la mer. Nous avons aussi montré l'avantage qu'apporte la liberté du choix du nombre de points utilisés pour l'analyse.

On peut améliorer la procédure en augmentant simplement la rapidité de calcul par l'utilisation d'un ordinateur plus performant et en optimisant les programmes informatiques qui peuvent encore l'être. On peut aussi améliorer l'environnement des programmes et surtout les procédures de tracé de contrôle. Pour cela l'utilisation de système permettant le multifenêtrage serait probablement très pratique.

Une partie du temps gagné sera utilisée à la recherche par programme des paramètres optimaux de l'analyse.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DAUBISSE, J.C. 1984. Sur quelques méthodes numériques spécifiques à l'Hydrodynamique Navale. *Thèse de Doctorat d'Etat, Nantes.*
- [2] DAUBISSE, J.C. 1986. Some results about approximation of functions of one or two variables by sums of exponentials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 23,*
- [3] LACZOS, C. Applied Analysis. *Prentice Hall, 1961.*
- [4] MANSARD, E.P.D. and FUNKE, E.R. The measurement of incident and reflected spectra using a least squares method. *In Proceedings of Seventeenth International Conference on Coastal Engineering.*
- [5] DAOUD, B. 1991. Génération et analyse de la houle aléatoire en bassin. *Thèse de Doctorat, E.C.N, Nantes.*

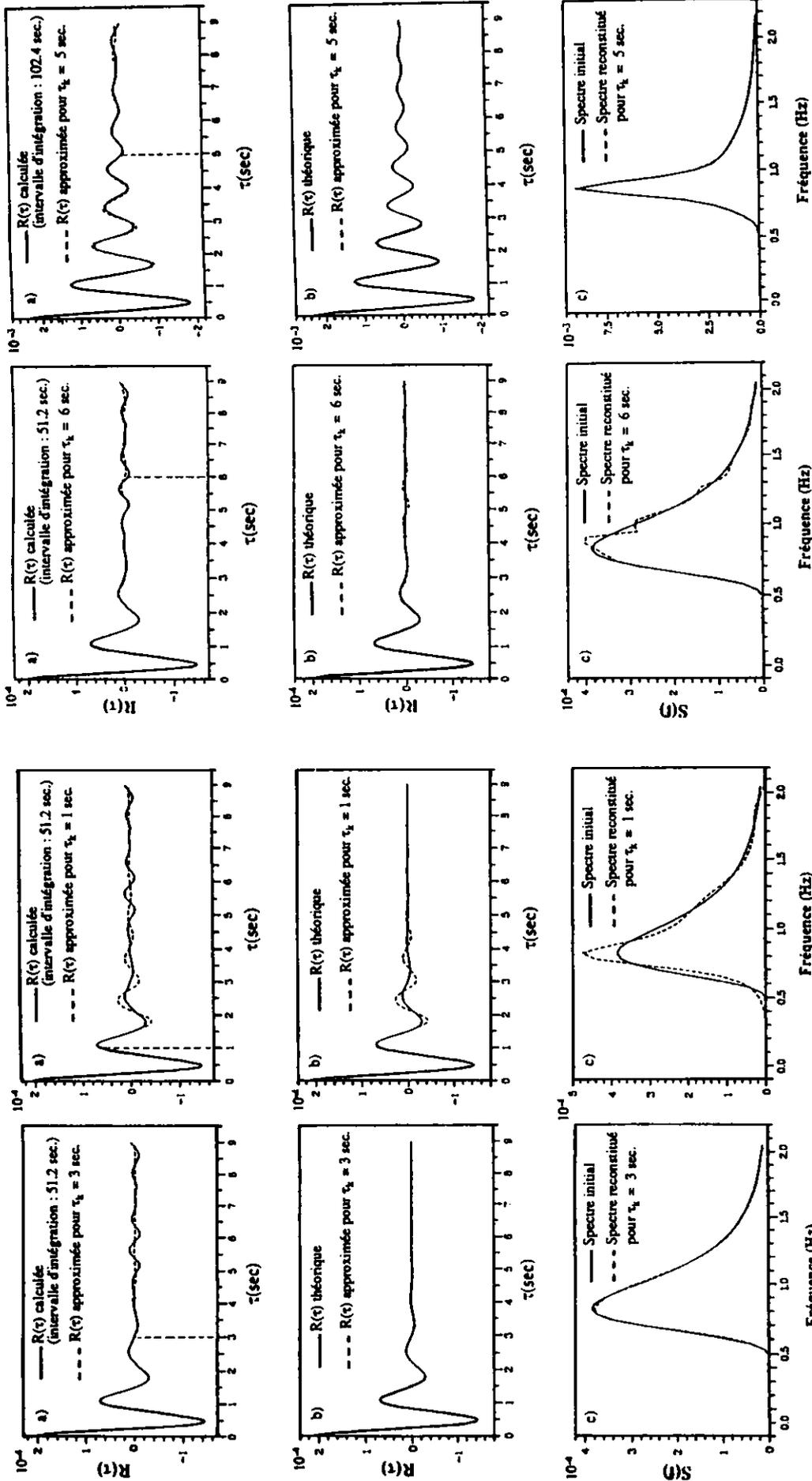


Fig. 2.9 Comparison des fonctions d'auto-corrélation et du spectre reconstitué avec le spectre souhaité pour $\tau_t = 3$ sec (Moskowitz).

Fig. 2.10 Comparison des fonctions d'auto-corrélation et du spectre reconstitué avec le spectre souhaité pour $\tau_t = 6$ sec (Moskowitz).

Fig. 2.11 Comparison des fonctions d'auto-corrélation et du spectre reconstitué avec le spectre souhaité pour $\tau_t = 5$ sec (JONSWAP).

Fig. 2.12 Comparison des fonctions d'auto-corrélation et du spectre reconstitué avec le spectre souhaité pour $\tau_t = 5$ sec (JONSWAP).

Specre JTTC
 $h_{1/3} = 0.06 \text{ m}$ $N = 2048$ $M = 12$
 $K = 61$ $\Delta t = 50 \text{ ms}$

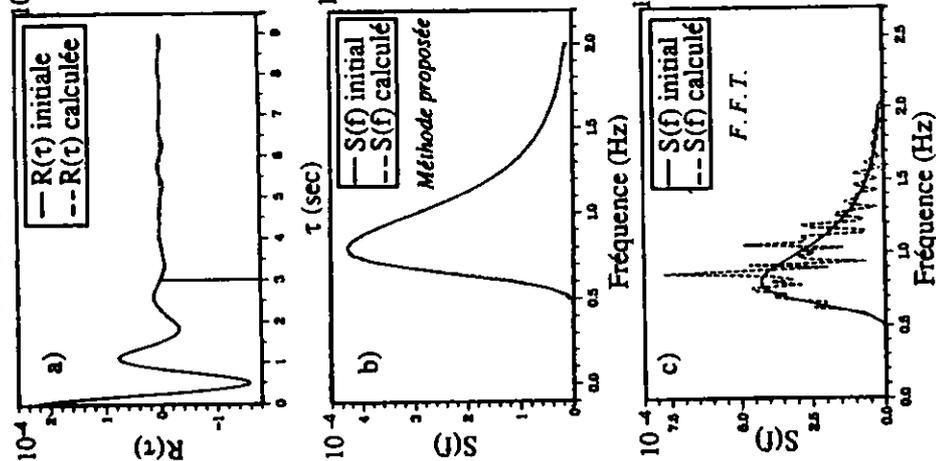


Fig. 2.13

	I	II	III
m_0	$3.563 \cdot 10^{-4}$	$3.528 \cdot 10^{-4}$	$3.519 \cdot 10^{-4}$
m_2	$3.455 \cdot 10^{-4}$	$3.420 \cdot 10^{-4}$	$3.547 \cdot 10^{-4}$
m_4	$4.631 \cdot 10^{-4}$	$4.570 \cdot 10^{-4}$	$4.915 \cdot 10^{-4}$

I : moments souhaités

Specre JONSWAP
 $T_0 = 1 \text{ sec}$ $N = 1024$ $M = 15$
 $K = 61$ $\Delta t = 50 \text{ ms}$

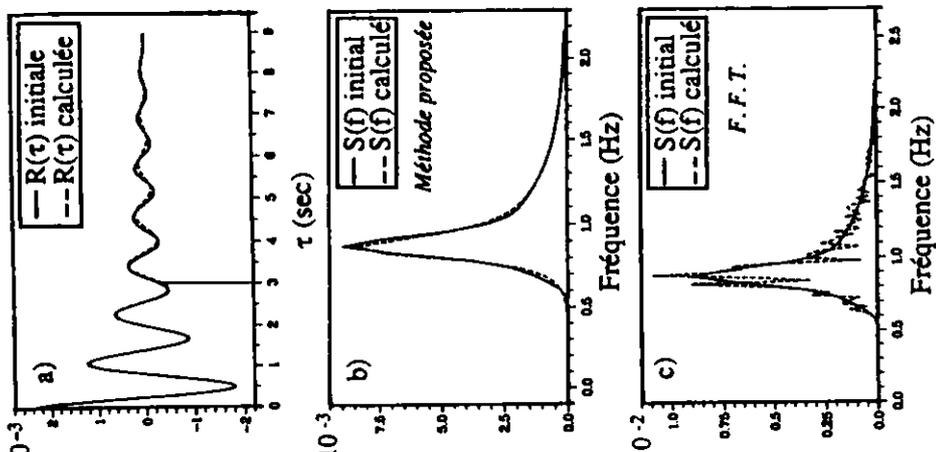


Fig. 2.14

	I	II	III
m_0	$4.033 \cdot 10^{-3}$	$4.109 \cdot 10^{-3}$	$4.046 \cdot 10^{-3}$
m_2	$1.025 \cdot 10^{-3}$	$1.040 \cdot 10^{-3}$	$1.076 \cdot 10^{-3}$
m_4	$3.619 \cdot 10^{-4}$	$3.663 \cdot 10^{-4}$	$4.150 \cdot 10^{-4}$

I : méthode proposée

III : F.F.T.

Specre "à 2 bosses"
 $N = 2048$ $M = 28$
 $K = 61$ $\Delta t = 50 \text{ ms}$

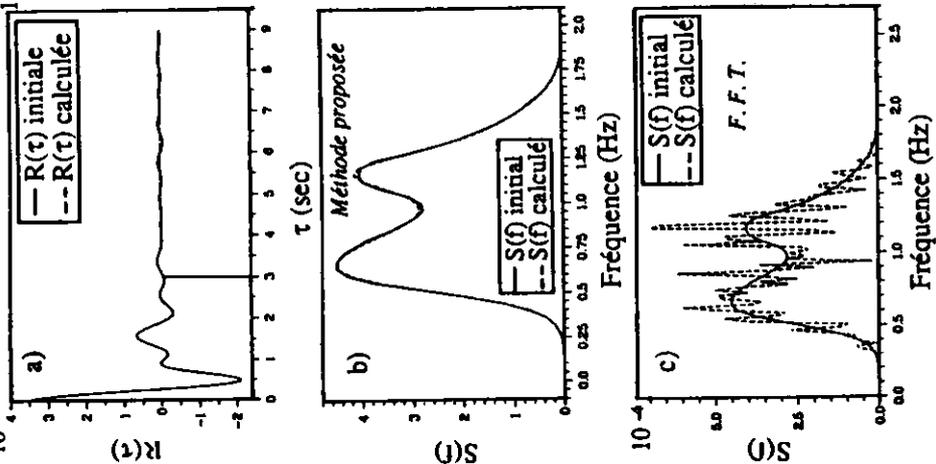


Fig. 2.15

	I	II	III
m_0	$2.323 \cdot 10^{-4}$	$2.317 \cdot 10^{-4}$	$2.311 \cdot 10^{-4}$
m_2	$2.461 \cdot 10^{-4}$	$2.457 \cdot 10^{-4}$	$2.538 \cdot 10^{-4}$
m_4	$3.619 \cdot 10^{-4}$	$3.606 \cdot 10^{-4}$	$3.871 \cdot 10^{-4}$

I : moments souhaités

II : méthode proposée

III : F.F.T.

Specre ITTC
 $h_{1/3} = 0.25 \text{ m}$ $N = 2048$ $M = 15$
 $K = 161$ $\Delta t = 100 \text{ ms}$

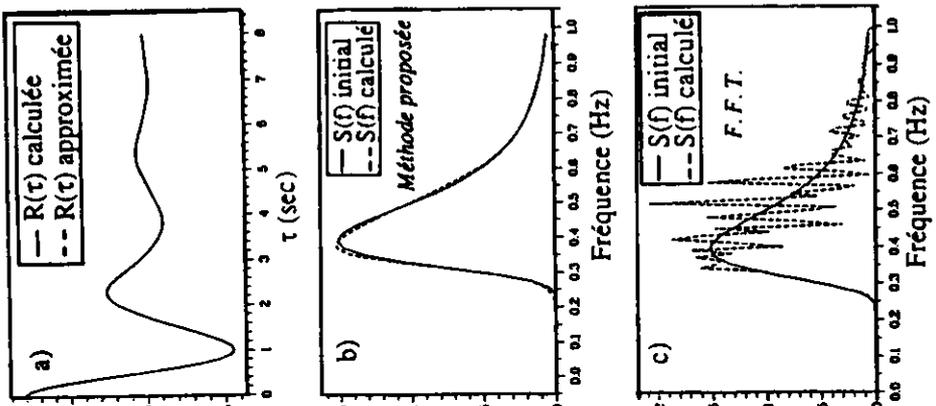


Fig. 2.16

	I	II	III
m_0	$2.464 \cdot 10^{-4}$	$2.429 \cdot 10^{-4}$	$2.425 \cdot 10^{-4}$
m_2	$2.655 \cdot 10^{-4}$	$2.637 \cdot 10^{-4}$	$2.661 \cdot 10^{-4}$
m_4	$3.944 \cdot 10^{-4}$	$3.922 \cdot 10^{-4}$	$3.912 \cdot 10^{-4}$

III : F.F.T.