

4e JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE

1, 2, 3 mars 1993 - Nantes

MANOEUVRABILITE DES SOUS-MARINS APPLICATION DE LA THEORIE DES BIFURCATIONS A L'ETUDE DES SURFACES D'EQUILIBRE DU SOUS-MARIN DEPESE

C. PAVAUT
IMFL - ONERA
INSTITUT de MECANIQUE des FLUIDES de LILLE
5, boulevard Paul Painlevé
59045 LILLE CEDEX

Résumé

Cet article présente le transfert d'un outil numérique développé à l'ONERA dans le cadre de la mécanique du vol des avions pour une application nouvelle : l'analyse du comportement du sous-marin.

La théorie des bifurcations est un ensemble de résultats mathématiques qui a pour objectif l'analyse et l'explication de certains phénomènes dans le comportement asymptotique d'un système différentiel non linéaire. Les bases de la théorie sont exposées en première partie.

La mise en place de cette méthode d'analyse nécessite une base de données expérimentales suffisamment riche pour la connaissance des efforts statiques et dynamiques et l'élaboration d'un modèle de simulation du comportement de l'engin considéré.

Les travaux numériques et expérimentaux relatifs à la manoeuvrabilité du sous-marin menés à l'ONERA-IMFL sont présentés. Ils ont permis d'élaborer différentes formulations des efforts hydrodynamiques puis des programmes de simulation.

La théorie des bifurcations, appliquée au sous-marin dans un cadre exploratoire, a permis de mettre en évidence l'existence de variations brusques du système et de cycles limites lorsque le sous-marin est dépesé. Ces résultats ont pu être corrélés avec des simulations de manoeuvres.

Summary

This paper deals with a new application of a numerical method developed in the field of fight aircraft manoeuvrability at high angles of attack for analysing submarine behaviour.

The bifurcation theory is a methodology devoted to the analysis and the understanding of the asymptotic behaviour of non linear differential systems. First a few aspects of this theory are described.

Experimental tests are required to determine static hydrodynamic forces and dynamic stability parameters and to build a numerical model of manoeuvring simulation.

In a second part, numerical and experimental works undertaken at ONERA-IMFL in this field are presented.

Bifurcation theory has been applied to submarine behaviour analysis. The method shows the existence of jump from an equilibrium state to another one and limit cycles when the submarine mass is decreased. The results have been illustrated by numerical simulations.

A. INTRODUCTION A LA THEORIE DES BIFURCATIONS

1. CONTEXTE

Les évolutions dans la conception des avions de combat ont poussé les aérodynamiciens à développer des nouvelles méthodes d'analyse du comportement dynamique des engins. L'intérêt croissant porté au domaine de vol aux grands angles a entraîné une progression dans les techniques expérimentales ainsi que dans les méthodes analytiques grâce notamment à l'évolution des outils numériques.

Les méthodes classiques d'étude du comportement du système par linéarisation des équations ont en effet rapidement montré leurs limites pour l'analyse des manoeuvres aux grands angles et l'analyse des stabilités.

La théorie des bifurcations a permis de répondre à ce besoin d'outils nouveaux pour l'étude des systèmes non linéaires en mécanique du vol.

A sein de l'ONERA, un code de calcul, appliquant la théorie des bifurcations a été développé par M. GUICHETEAU : il s'agit du code ASDOBI.

Il a été appliqué à l'analyse du comportement asymptotique des avions de combat, notamment pour la caractérisation des mouvements oscillatoires et la prédiction des phénomènes de vrille ou de perte de contrôle de l'engin.

Les nombreuses applications aéronautiques ont permis de mettre en évidence, depuis la prédiction du comportement jusqu'aux essais en vol, l'intérêt de la méthode développée à l'ONERA. Cette méthode peut être appliquée à d'autres systèmes non linéaires, notamment au sous-marin.

Les travaux relatifs à la manoeuvrabilité des sous-marins menés à l'IMFL sont orientés aujourd'hui vers l'analyse du comportement du sous-marin dépesé. En effet, lors de manoeuvres particulières, en cas de voie d'eau ou d'avarie des barres arrière par exemple, le sous-marin opère une remontée d'urgence en vidant ses ballasts. On a pu observer lors de telles manoeuvres des comportements fortement instables présentant des angles de gîte et d'assiette élevés. L'objectif de la présente application est d'aboutir à une meilleure connaissance du comportement du sous-marin dans des conditions extrêmes.

2. POSITION DU PROBLEME

Le code ASDOBI permet de caractériser le comportement asymptotique d'un système différentiel non linéaire ordinaire dépendant de paramètres et s'écrivant sous la forme $\dot{X} = F(X, U)$ où :

- X représente le vecteur des variables d'état servant à décrire le système,
- U représente le vecteur des paramètres de commande (braquages des gouvernes, propulsion...)
- F est l'ensemble des fonctions non linéaires continues et dérivables.

Les états d'équilibre sont obtenus par recherche numérique des solutions $X(U)$ de l'équation $F(X, U) = 0$ lorsque le vecteur U varie, ou lorsqu'une commande du vecteur U varie.

Dans un problème linéaire, la résolution de $F(X, U) = 0$ fournit une réponse unique pour un vecteur U fixé. Dans le cas d'un système de fonctions non linéaires, il peut exister des états d'équilibre multiples à iso-commande. La théorie des bifurcations met en évidence ces réponses multiples.

La nature des états d'équilibre est caractérisée à partir du calcul des valeurs propres du Jacobien du système : $J = \partial F / \partial X$.

3. EXEMPLE NUMERIQUE

On reprend ici un exemple classique traité dans la littérature [1] qui permet d'illustrer certains aspects de la théorie.

Considérons l'équation différentielle scalaire de la forme : $\dot{x} = -(x^3 + C_1 x + C_2)$
 x représente la variable d'état,
 C_1, C_2 sont les paramètres de contrôle.

Les points d'équilibre stables correspondent aux minima de la fonction potentielle :

$$\phi = \frac{x^4}{4} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x$$

On étudie le cas $C_1 = -3$ et l'évolution du système pour différentes valeurs de C_2 (Fig. 1).

Pour $|C_2| > 2$, la fonction ϕ admet un seul minimum,
 Pour $|C_2| < 2$, la fonction ϕ admet deux minima et un maximum.

Supposons que C_2 varie lentement de -3 à +3 de sorte que x puisse atteindre un état d'équilibre pour chaque valeur de C_2 .

Lorsque $|C_2| = +2$, le maximum de ϕ disparaît. Une petite variation autour de $C_2 = 2$ entraîne un saut de x_1 vers x_2 (x_2 correspond à l'équilibre stable).

Si on fait varier C_2 de +2 vers -2, le système restera au point x_2 stable jusque $C_2 = -2$ où le système effectuera un saut de x_2 vers x_1 .

Ceci met en évidence un effet d'hystérésis et la dépendance de la présence de l'équilibre avec l'historique de la variation de C_2 .

L'ensemble des points d'équilibre est représenté par une surface (M) dans l'espace (x, C_1, C_2) . La projection de la surface (M) sur le plan (C_1, C_2) fournit la courbe (C) (Fig. 2)

La frontière séparant les domaines où le nombre de points d'équilibre diffère est appelée la surface de bifurcation. L'équation de la surface de bifurcation s'obtient en éliminant x entre les deux équations :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = x^3 + C_1 x + C_2 = 0 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 3x^2 + C_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{27} C_1^3 + \frac{1}{4} C_2^2 = 0$$

Pour $C_1 < 0$: il apparaît un saut de x_1 vers x_2 qui est appelé "bifurcation" (Fig.3),
 Pour $C_1 > 0$: il n'existe pas de bifurcation.

B. LE SOUS-MARIN à l'ONERA-IMFL

L'Institut de Mécanique des Fluides de Lille travaille depuis plusieurs années sur les problèmes de manoeuvrabilité du sous-marin. Les travaux dans ce domaine ont pour objectif la prédiction des évolutions des corps submersibles et l'évaluation des caractéristiques manoeuvrantes en fonction de l'architecture de l'engin.

Les travaux présentés dans ce chapitre ont été effectués avec le soutien de la DRET.

1. 'MECANIQUE DU VOL' DU SOUS-MARIN

L'écriture des équations de la mécanique du sous-marin nécessite la connaissance du torseur des efforts extérieurs. Le système des équations différentielles ordinaires qui régissent le mouvement du sous-marin s'obtient en écrivant l'égalité entre le torseur des efforts extérieurs et le torseur dynamique.

Les équations de la dynamique sont exprimées au centre de volume qui est fixe. Le centre de gravité n'est pas un point fixe, il est fonction de la répartition des masses et en particulier du contenu des ballasts.

Les efforts extérieurs se décomposent en :

- efforts d'inertie,
- efforts hydrostatiques,
- efforts de propulsion,
- efforts de perturbation (courant, houle),
- efforts hydrodynamiques.

Les termes d'inertie et hydrostatiques sont couramment établis. Les caractéristiques de la propulsion sont fournies sous forme d'abaques de la poussée et du couple. Les perturbations sont négligées ici, on se place dans le cas du sous-marin profondément immergé, les interactions de la houle et du fond ne sont pas prises en compte.

Le torseur hydrodynamique comporte trois termes :

- un terme dynamique lié aux accélérations, il s'agit des masses et inerties ajoutées, ce terme est déterminé analytiquement ;
- un terme d'amortissement lié aux vitesses de rotation, il est déterminé expérimentalement ou par le calcul;
- un terme statique qui est déterminé expérimentalement en soufflerie.

2. DETERMINATION EXPERIMENTALE DES EFFORTS HYDRODYNAMIQUES EN REGIME PERMANENT

2.1. Maquette et dispositif expérimental

Fabriquées à l'IMFL, les maquettes à l'échelle 1/40ème mesurent deux mètres de long environ, pèsent entre 10 et 30 Kg, sont conçues à l'aide d'un logiciel de CAO et sont composées de bois, mousse, résine...

Le support de la maquette est un mât cylindrique de section circulaire fixé sur la face inférieure de la maquette. Le montage permet de déplacer la maquette en incidence et en dérapage et de faire l'acquisition des mesures des efforts pour un grand nombre de configurations.

2.2. Les moyens d'essais

A l'IMFL, deux installations d'essais permettent d'accéder aux efforts statiques mesurés à l'aide d'une balance dynamométrique intégrée dans la maquette du sous-marin.

La plus couramment utilisée pour les activités navales est la soufflerie subsonique incompressible. Il s'agit d'une soufflerie de type Eiffel à hall de retour, de 2.40 m de diamètre. Elle permet d'atteindre une vitesse

de circulation d'air variant en continu jusqu'à 70 m/s. La maquette peut être équipée de trois balances de mesure des efforts (dans le fuseau, dans le massif et dans la partie arrière). Le domaine d'angles observables est limité à 20° en incidence et en dérapage pour des raisons de limitations de déplacement et d'encombrement (Fig. 4 et 6). Avec une maquette à l'échelle 1/40ème et une circulation d'air de 40m/s, on obtient un nombre de Reynolds équivalent à celui correspondant à des essais en bassin, soit environ 100 fois plus faible qu'au réel.

La soufflerie verticale de l'IMFL permet d'accéder à des angles plus élevés de l'incidence. Avec quatre mètres de diamètre et une vitesse allant jusqu'à 40 m/s, cette soufflerie est destinée habituellement à l'étude de la vrille des avions. La maquette du sous-marin est fixée sur la balance rotative de l'installation (Fig. 5 et 7).

2.3. Essais

Les essais en soufflerie ont permis notamment de caractériser l'écoulement sur la coque de la maquette du sous-marin enduite de bouillie pariétale, de faire des mesures de champs de vitesses proches de la coque, derrière le massif, près de l'appareil à gouverner et de l'hélice. Des essais en présence d'un propulseur motorisé ont été effectués afin de reconnaître l'influence de l'hélice sur la stabilité du corps et sur les efficacités des gouvernes [8].

Les balances dynamométriques fixées à l'intérieur de la maquette fournissent les valeurs des torseurs statiques en fonction des attitudes du sous-marin et pour différentes configurations. La modélisation des efforts, en fonction des angles d'attaque et de dérive et des braquages de gouvernes, est établie [5].

Ces bases de données sont exploitées d'une part, pour l'analyse de l'évolution des efforts s'exerçant sur le sous-marin en fonction de son architecture et d'autre part, pour être intégrées dans un programme de simulation du comportement de l'engin [6].

3. SIMULATION NUMERIQUE DU COMPORTEMENT DU SOUS-MARIN

La simulation de manoeuvres permet d'analyser le domaine de navigation et les caractéristiques manoeuvrantes du sous-marin.

Les évolutions des variables d'état en fonction du temps du sous-marin sont issues de l'intégration des équations de la mécanique par une méthode de Runge Kutta.

Le système d'équations à intégrer comprend les six équations de la mécanique plus les trois relations entre les dérivées des angles d'Euler, Ψ , θ , φ et les composantes du vecteur rotation instantanée (p , q , r) dans le repère lié au sous-marin, et enfin les trois équations reliant les dérivées $\dot{x}_o, \dot{y}_o, \dot{z}_o$ aux angles d'Euler et aux composantes de la vitesse.

3.1. Définition du repère et notations

NOTATIONS

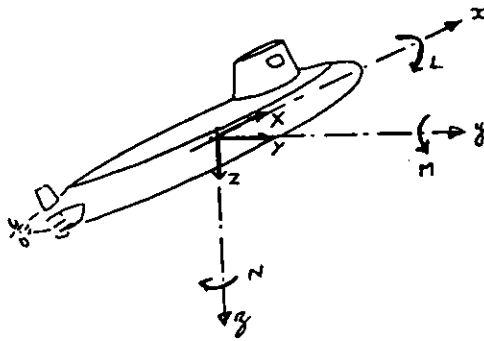
L	longueur de référence
S	surface de référence (section transversale)
ρ	masse volumique de l'eau 1026 kg/m ³
W	volume d'eau déplacée par le sous-marin
C	centre de volume (= de carène) du sous-marin
G	centre de gravité du sous-marin
Z_G	distance métacentrique ou module de stabilité $CG = Z_G > 0$ dans le trièdre $T(c, x, y, z)$
M	masse du sous-marin dans l'air
$\mu = \frac{M}{\rho W}$	coefficient de flottabilité
V	vecteur de vitesse du centre de volume C
u, v, w	projection de la vitesse V sur (c, x, y, z) avec $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$

- p, q, r composantes du vecteur vitesse angulaire Ω autour de C_x, C_y, C_z
- φ angle de gîte (> 0 tribord)
- Θ angle d'assiette (> 0 à monter)
- Ψ angle de cap
- α angle des safrans de direction
- β_1 angles des safrans arrière de plongée
- β_2 angles des safrans avant de plongée
- X, Y, Z composantes des forces hydrodynamiques suivant C_x, C_y, C_z
- L, M, N moments des forces hydrodynamiques autour de C_x, C_y, C_z
- $C_x (C_y, C_z) = \frac{X (Y, Z)}{\frac{1}{2} \rho S V^2}$ coefficients adimensionnels de force
- $C_L (C_M, C_N) = \frac{L (M, N)}{\frac{1}{2} \rho S L V^2}$ coefficients adimensionnels de moment

CONVENTIONS DE SIGNES

repère lié au sous-marin
(x, y, z)

Torseur des efforts
forces X Y Z
moments L M N



braquages des barres
- de direction

- de plongée



à virer
à tribord



à plonger

C. APPLICATION DE LA THEORIE DES BIFURCATIONS A LA RECHERCHE DES SURFACES D'EQUILIBRE DU SOUS-MARIN

1. POSITION DU PROBLEME

Le logiciel ASDOBI s'applique à un système d'équations différentielles non linéaires qui se présente sous la forme :

$$\dot{X} = F(X, U)$$

Ce code de calcul a eu de nombreuses applications aéronautiques, il est appliqué au cas du sous-marin dans un cadre exploratoire. Dans le cas traité dans cet article, le vecteur X comporte les variables d'état suivantes:

$$X = (u, v, w, p, q, r, \theta, \varphi)$$

le vecteur U contient les paramètres de commande suivants : $U = (\alpha, \beta_1, dm, a)$

qui représente respectivement le braquage de la barre de direction, le braquage de la barre de plongée, la variation relative de la masse globale du sous-marin et le rappel statique, distance verticale entre le centre de volume et le centre de gravité.

Le code de calcul permet à l'aide d'un algorithme de continuation de rechercher numériquement les états d'équilibre du système lorsqu'un paramètre du vecteur U varie. La nature des équilibres est définie à partir des valeurs propres du jacobien du système. L'équilibre est stable lorsque les valeurs propres sont à partie réelle négative. L'équilibre est instable divergent lorsque une, ou plusieurs, valeur propre est à partie réelle positive. On rencontre un mode oscillatoire lorsqu'il existe au moins deux valeurs propres imaginaires conjuguées à partie réelle positive.

2. RESULTATS

L'évolution de la forme et de la nature des surfaces d'équilibre est assez sensible au braquage de direction α , à la variation de masse, mais l'est beaucoup moins au braquage de plongée β_1 , et à la valeur du rappel statique.

Nous nous limiterons dans cet article à la présentation des résultats obtenus en fonction du braquage α pour différentes valeurs de la masse. La figure 8 illustre l'évolution des variables d'état asymptotiques en fonction de α . Le rappel statique est conservé à sa valeur initiale. La barre de plongée est braquée à remonter pour se rapprocher d'une manoeuvre de remontée d'urgence.

Pour le sous-marin parfaitement pesé $\Delta_m = 0$, il existe deux états d'équilibre : un équilibre stable présentant une gîte faible proche de zéro, et un équilibre instable à gîte voisine de 180 degrés (sous-marin retourné). L'état d'équilibre stable est caractérisé par une incidence positive qui croît avec le braquage α et un angle d'assiette qui diminue lorsque α augmente.

L'évolution des surfaces d'équilibre en fonction de la dépesée est illustrée par la figure 8. Une faible diminution de la masse globale, 1 %, entraîne l'apparition de nouveaux états d'équilibre.

Dans le domaine des angles de barres compris entre -5 et +5 degrés, on observe trois états d'équilibre stables, dont un est caractérisé par une assiette élevée (50 degrés). Cet état correspond à une remontée du sous-marin suivant une forte pente, assiette élevée et incidence faible. Les deux autres positions d'équilibre stable sont caractérisées par des valeurs des variables d'état proches en longitudinal et des valeurs opposées en latéral, notamment un angle de gîte faible, ± 7 degrés, invariant avec le braquage α .

Lorsqu'on augmente la dépesée, le domaine d'existence des états d'équilibre ne se limite plus aux faibles valeurs du braquage α mais s'est étendu, ce phénomène est accompagné d'une augmentation de l'angle de gîte et du dérapage. Pour $\Delta_m = 5$ %, la gîte atteint ± 27 degrés indépendamment de α .

3. ILLUSTRATION D'UNE BIFURCATION ET SIMULATION

Un point de retournement est un point de bifurcation particulier illustré par un repli de la surface d'équilibre.

L'interprétation des surfaces d'équilibre permet d'analyser et de prédire le comportement du système au passage de ces points particuliers. Les phénomènes mis en évidence par cette théorie sont dits "catastrophiques" car ils prédisent l'entrée du système dans un mode oscillatoire (cycle limite, vrille, perte de contrôle) ou une brusque variation de l'état du système comme l'illustre l'exemple ci-après.

La figure 9 retrace l'évolution de la variable v , dérive horizontale, en fonction du braquage α .

Les simulations visent à mettre en évidence le saut depuis un équilibre à dérapage positif vers un équilibre à dérapage négatif.

On suppose que le système est en A ($\alpha = -15$). En faisant varier le braquage α vers les valeurs positives, le système se déplace sur la surface d'équilibre vers le point B, en conservant un dérapage positif, même lorsque α devient positif. Toute manoeuvre avec $\alpha < 7$ degrés ne modifie pas l'état du système, il faut imposer un braquage α plus élevé : on observe alors un "saut", le système passe brusquement de B à C.

La simulation permet de retracer l'historique de ce phénomène. On applique deux lois en créneau sur les commandes des gouvernes de direction :

1ère loi :	$\alpha = -15$	de	$t = 0$ à 100 sec.
	$\alpha = +15$	de	$t = 100$ à 200 sec.
	$\alpha = -15$	de	$t = 200$ à 300 sec.

2ème loi :	$\alpha = -15$	de	$t = 0$ à 100 sec.
	$\alpha = +5$	de	$t = 100$ à 200 sec.
	$\alpha = -15$	de	$t = 200$ à 300 sec.

La figure représente la réponse de la dérive horizontale v en fonction du temps.

La première simulation permet d'illustrer le saut de B en C. En effet, la dérive v effectue un saut de la valeur $+1$ à la valeur -1 . Dans le second cas, v est resté constant malgré le changement de braquage car entre -15 et $+5$ degrés, le système s'est déplacé sur la même surface d'équilibre. Notons que les commandes varient lentement de façon à permettre au système d'atteindre l'équilibre.

4. ILLUSTRATION D'UN CYCLE LIMITE ET SIMULATION

Un point de bifurcation de Hopf correspond au passage d'un état d'équilibre stable à un état d'équilibre oscillatoire ou cycle limite.

Avec une dépesée de 5 % de la masse globale et un rappel statique diminué par rapport à la valeur nominale, on note l'existence d'un point de bifurcation à $\alpha = +15$ degrés (Fig. 10).

La simulation du comportement du système dans les conditions décrites ci-dessus avec une loi de commande faisant varier la barre de plongée de -20 à $+10$ degrés permet de mettre en évidence le mode oscillatoire. (Fig. 10).

5. CONCLUSION

Le logiciel de calcul ASDOBI a été développé par M. GUICHETEAU à l'ONERA pour l'analyse du comportement asymptotique des avions de combat aux grandes incidences. Il s'appuie sur l'application de la théorie des bifurcations à l'analyse d'un système différentiel non linéaire dépendant de paramètres et s'écrivant sous la forme $\dot{X} = F(X, U)$.

La méthode est appliquée à l'étude du comportement du sous-marin dans un cadre exploratoire, et plus particulièrement lorsque ce dernier est dépesé.

En effet, il a été observé lors des manoeuvres de remontée d'urgence du sous-marin des phénomènes

fortement instables présentant des angles de gîte et d'assiette élevés et de brusques variations des variables d'état.

La théorie des bifurcations permet de rechercher numériquement l'ensemble des états d'équilibre du système lorsque des commandes choisies varient. L'évolution des courbes d'équilibre a été observée en fonction de la diminution de la masse du sous-marin.

Les bifurcations et les cycles limites mis en évidence sont retrouvés en simulation de manoeuvre. La méthode permet de trouver rapidement l'ensemble des bifurcations et d'éviter ainsi un nombre considérable de simulations. Les premiers résultats attestent de l'intérêt de la méthode et de ses potentialités.

Rappelons que cette technique nécessite au préalable l'élaboration d'un bon modèle du comportement de l'engin valable dans un large domaine d'angles d'incidence et de dérapage.

Sur les bases établies dans cette première approche, l'étude pourra être poursuivie de façon à mieux cerner les limites de manoeuvres du sous-marin dépesé.

6. REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] "Global stability and control analysis of aircraft at high angles of attack".
R.K. MEHRA / W.C. KESSEL / J.V. CARROLL
Scientific Systems, Inc., Cambridge, Massachusetts
ONR CR 215-248-1 may 1977
- [2] "Bifurcation analysis of non linear aircraft dynamics"
J.V. CARROLL / R.K. MEHRA
AIAA 82-4254
- [3] "Application de la théorie des bifurcations à l'étude des pertes de contrôle sur avion de combat".
P. GUICHETEAU - ONERA
- [4] "Etude architecturale d'un futur SNA - Modification de la géométrie du massif et de l'appareil à gouverner"
C. PAVAUT - Rapport IMFL n° 90/32
- [5] "Etude architecturale d'un futur SNA - Efforts locaux par éléments géométriques"
C. PAVAUT - Rapport IMFL n° 89/21
- [6] "SNX Architecture - Etude de l'impact de modifications architecturales en simulation de manoeuvres".
C. PAVAUT - Rapport IMFL n° 91/05
- [7] "Manoeuvrabilité du sous-marin.
Simulation du mouvement d'un SNA d'après les efforts hydrodynamiques identifiés en soufflerie".
J.B. PAQUET - Rapport IMFL n° 86/25
- [8] "Manoeuvrabilité des sous-marins - Simulation des effets propulsifs".
C. PAVAUT - Rapport IMFL n° 89/40
- [9] "Architecture du sous-marin - Caractérisation en soufflerie d'une carène non axisymétrique"
C. PAVAUT - Rapport IMFL n° 92/45
- [10] "Visualisation aux grands angles de l'écoulement sur un sous-marin type SNA"
D. FARCY - Rapport IMFL n° 92/11

Figure 1 - Fonction $\phi = \frac{x^4}{4} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x$ pour $C_1 = -3$

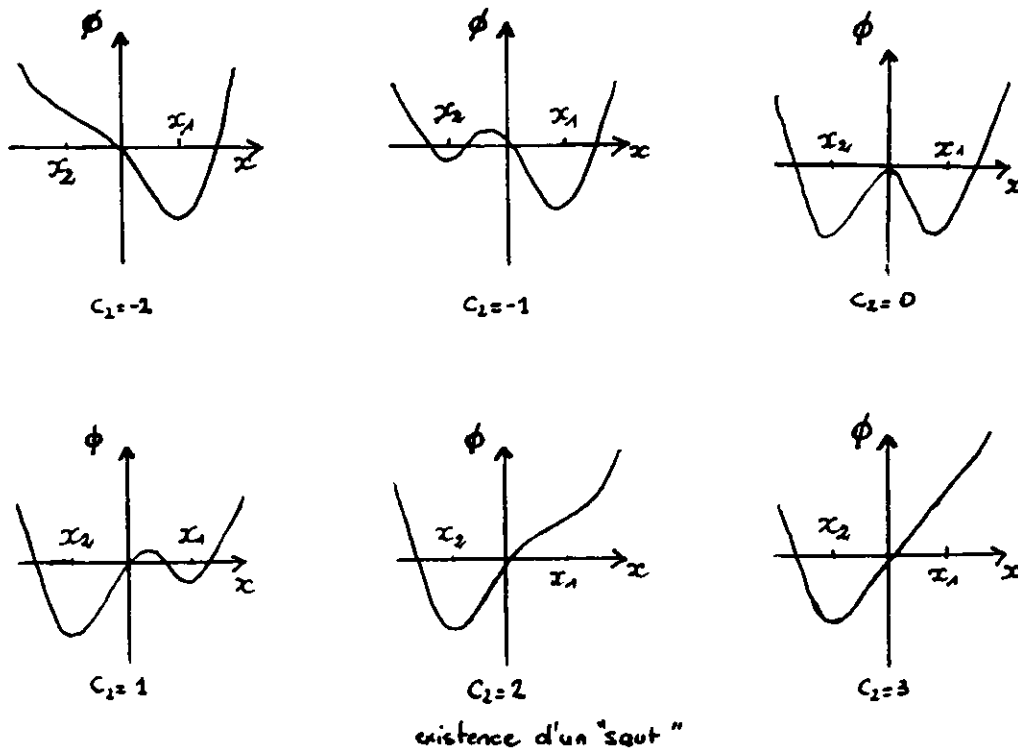


Figure 2

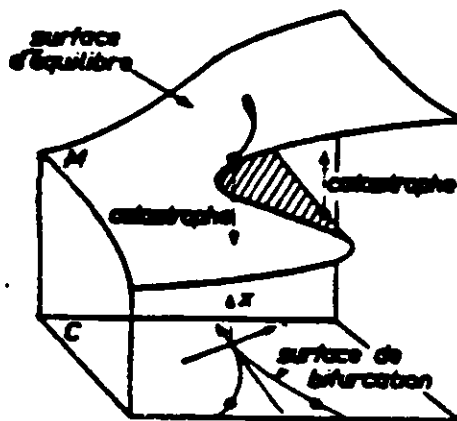
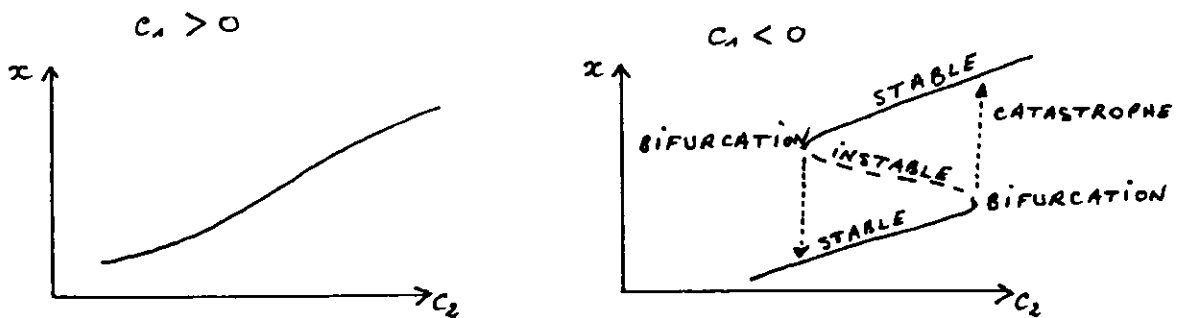


Figure 3



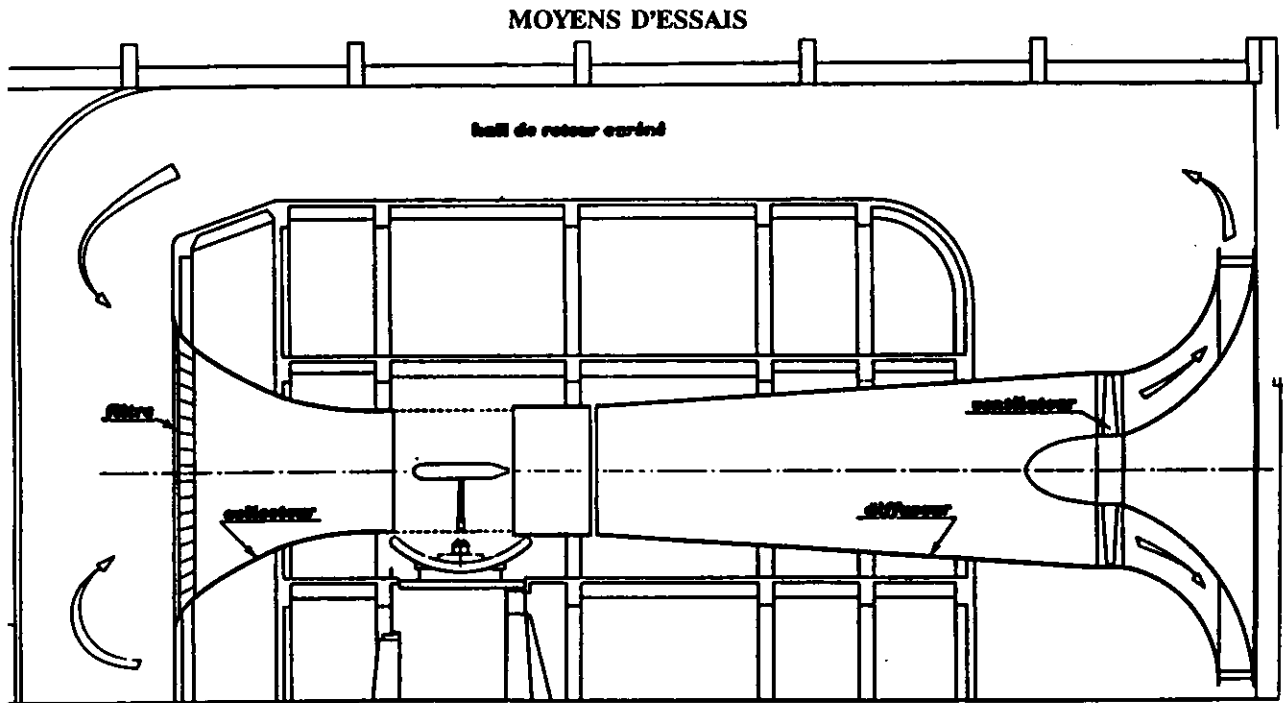


Figure 4 - Soufflerie subsonique incompressible (diamètre veine = 2,4 m)

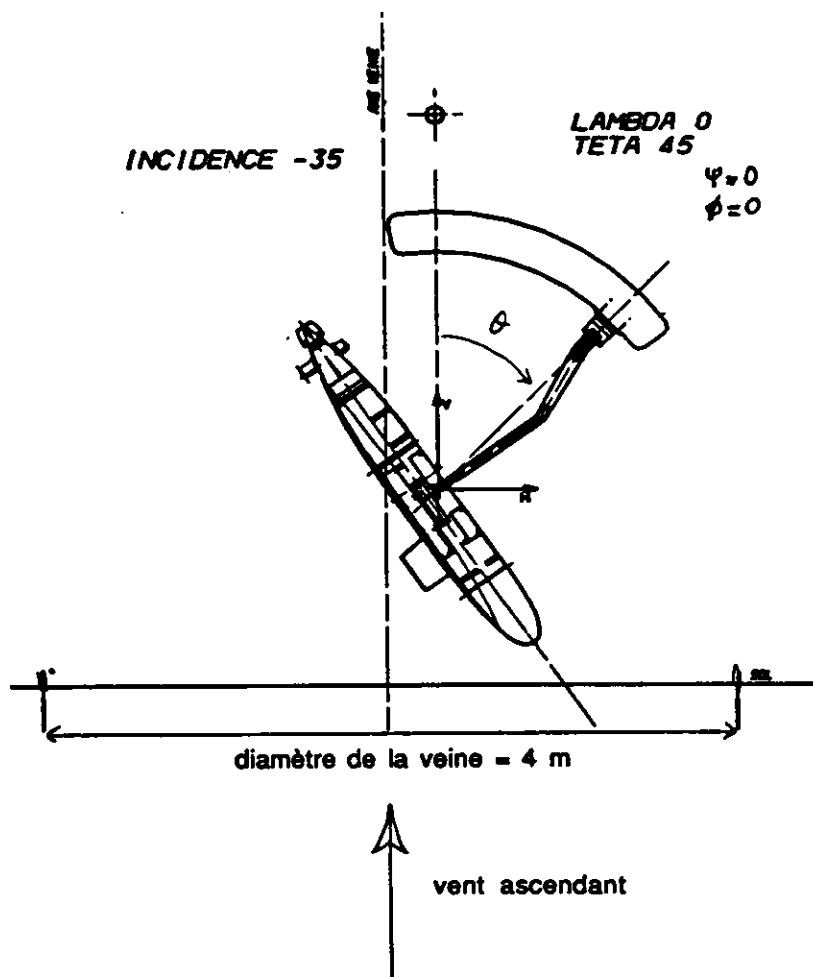


Figure 5 - Soufflerie Verticale

Figure 6 - Vue de la maquette dans la Soufflerie Horizontale

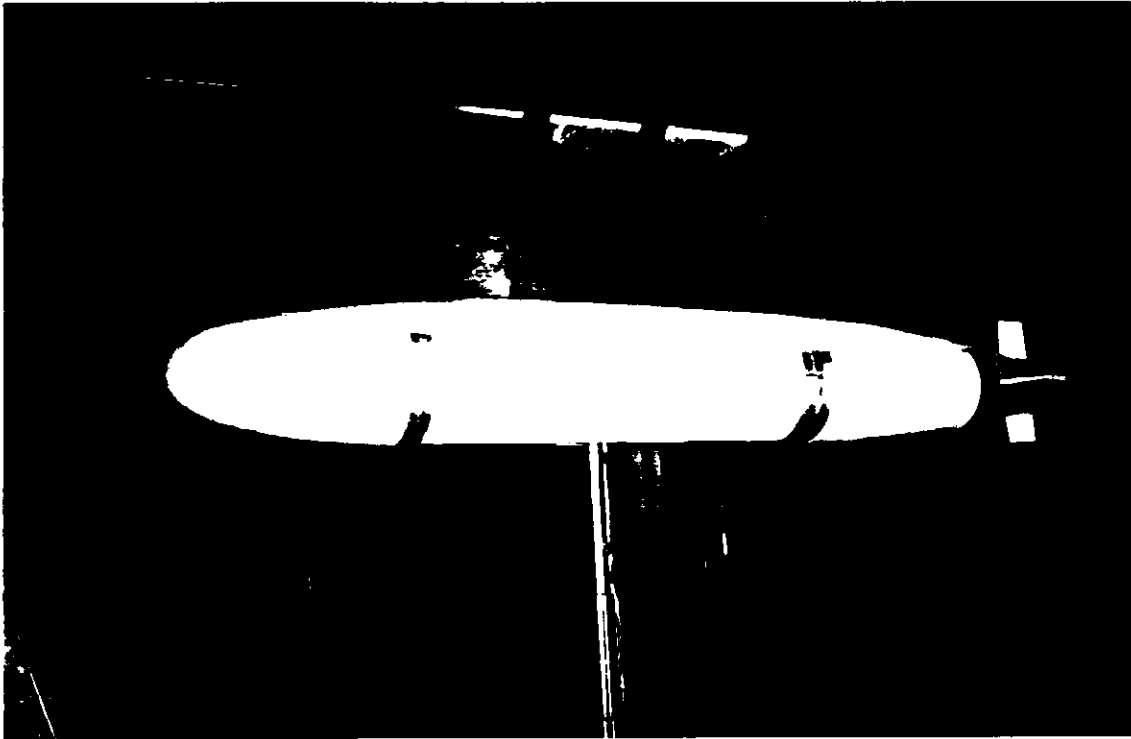
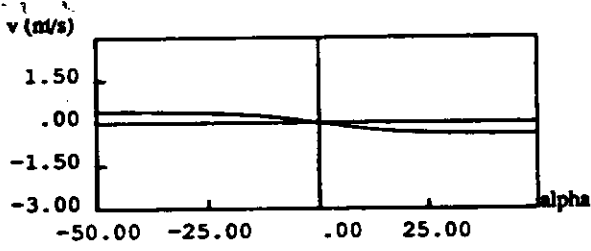


Figure 7 - Maquette dans la Soufflerie Verticale pour visualisation de l'écoulement aux grands angles

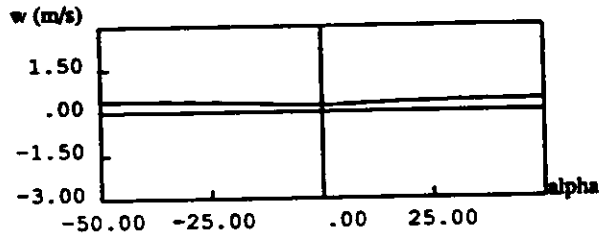


Figure 8 - ETATS D'EQUILIBRE

$\Delta_m = 0$ $\beta_1 = -8$
 dérivation horizontale

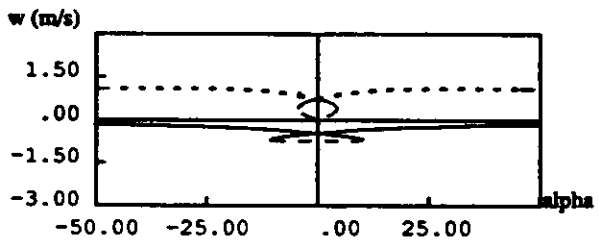
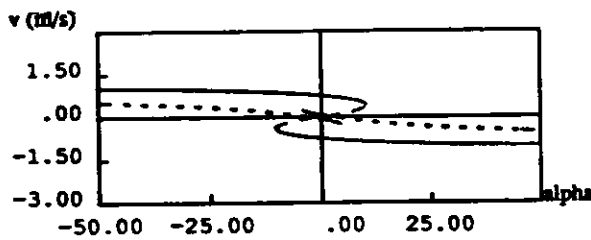


dérivation verticale

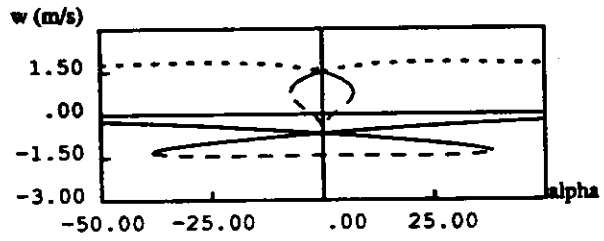
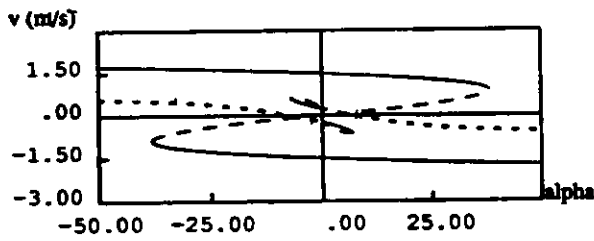


— équilibre stable - - - instable divergent - - - - oscillatoire

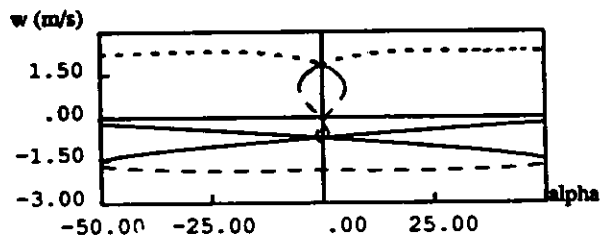
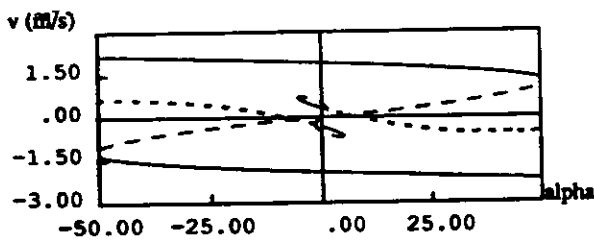
$\Delta_m = 1 \%$



$\Delta_m = 3 \%$

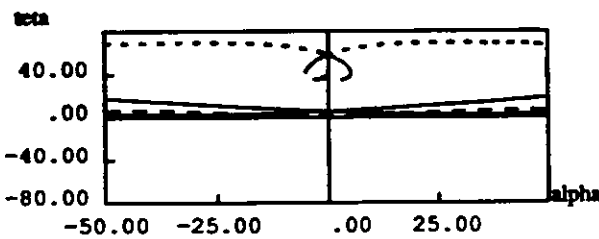


$\Delta_m = 5 \%$



$\Delta_m = 5 \%$

Assiette



Gîte

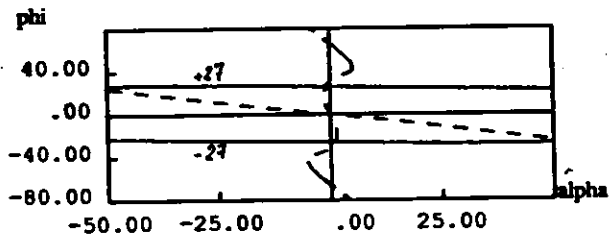


Figure 9 - EXEMPLE DE POINT DE BIFURCATION

$\Delta m = 1\%$ $B_1 = -10$

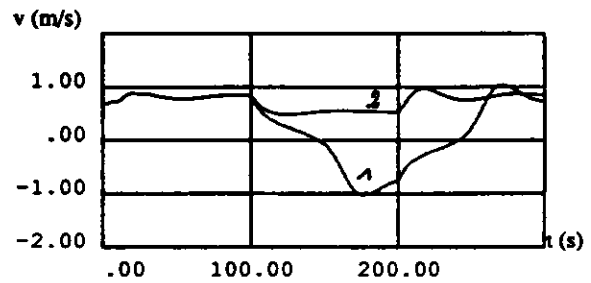
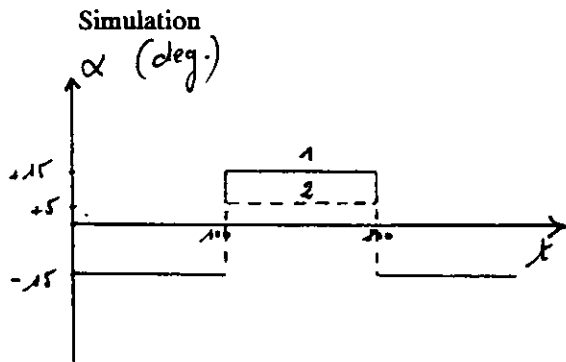
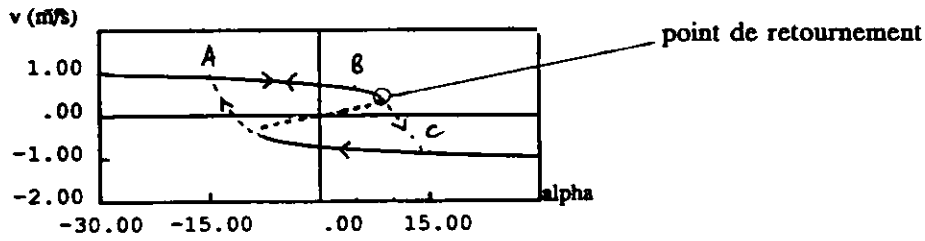


Figure 10 - POINT DE BIFURCATION DE HOPF

