

4e JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE

1, 2, 3 mars 1993 - Nantes

RESOLUTION DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES AUTOUR D'UNE CARENE PERCANT LA SURFACE LIBRE

B. ALESSANDRINI, G. DELHOMMEAU

*Division Hydrodynamique Navale, Laboratoire de Mécanique des Fluides, URA 1217 CNRS
Ecole Centrale de Nantes, 1, rue de la Noë, 44072 Nantes Cedex 03*

Résumé

Le problème abordé ici est celui du calcul numérique de l'écoulement autour d'un navire progressant à vitesse constante dans une mer initialement calme. Le fluide est supposé Newtonien et incompressible et l'on résout les équations de Navier-Stokes moyennées par une méthode de différences finies. La turbulence est prise en compte par une modélisation algébrique de type Baldwin-Lomax. Nous écrivons les conditions de surface libre complètes et proposons une méthode pour lever l'incompatibilité avec les conditions d'adhérence. Les résultats numériques, obtenus sur une carène de Wigley, sont comparés à des résultats expérimentaux déjà publiés.

Summary

We present here a numerical method for solving free surface flow around a ship with forward speed in calm water. The fluid is supposed to be newtonian and we solve the Reynolds averaged Navier-Stokes equations (RANSE) by finite difference method. Modelisation of turbulence is achieved by the algebraic model proposed by Baldwin and Lomax. The fully non-linear free surface conditions are satisfied in the model and we propose a method to avoid the incompatibility between free surface conditions and no-slip condition at the waterline. Numerical results are obtained for the Wigley hull and are compared to experimental results.

1. INTRODUCTION

Classiquement, l'étude numérique de l'écoulement d'un fluide, supposé incompressible, autour d'une carène de navire, peut être abordé selon deux approches distinctes. Soit on fait l'hypothèse du fluide parfait irrotationnel et on résout le problème par la méthode des singularités, en tenant compte des effets de surface libre, linéaire ou non-linéaire, soit on tient compte du caractère visqueux du fluide mais on ne résout les équations de Navier-Stokes, complètes ou approchées (équations parabolisées, équations de couche limite) que pour le double modèle, c'est à dire sans condition de surface libre.

Dans le premier cas, la solution du problème, régie uniquement par le nombre de Froude, permet de calculer le champ de vagues créé par la carène en déplacement, et finalement sa résistance de vagues. Les décollements sur l'arrière du corps, les profils de vitesses dans la couche limite, les résistances de frottement et de forme sont inaccessibles par cette théorie et sont l'apanage de la deuxième méthode. L'écoulement visqueux alors calculé ne dépend que du nombre de Reynolds et ne permet pas d'accéder au champ de vagues ni bien sur à la résistance de vagues.

La mise en oeuvre de deux codes de calcul, basés sur chacune de ces deux théories, permet d'obtenir, en faisant l'hypothèse difficilement contrôlable d'un découplage des efforts d'inertie et de viscosité, l'ensemble de la résistance à l'avancement du navire.

Le succès de cette technique est dû en grande partie au fait que pour des échelles de grandeurs réalistes et pour des navires aux formes simples, le problème de la résistance de vagues est peu couplé avec le problème visqueux. En d'autres termes, on peut considérer, en première approximation, que la résistance de vagues est essentiellement fonction du nombre de Froude et que le frottement ne dépend pratiquement que du nombre de Reynolds.

Cependant, cette approximation est prise en défaut dès que les effets visqueux se manifestent à proximité de la surface libre (épaississement de la couche limite sur l'arrière, décollement...). On constate alors une forte dépendance du champ de vagues avec le nombre de Reynolds et des profils de vitesses avec le nombre de Froude.

Les équations de couche limite peuvent constituer une alternative séduisante au problème puisqu'elles couplent naturellement un calcul de type visqueux avec la solution en fluide parfait. Nous avons montré que l'adjonction des conditions de surface libre linéarisées dans le calcul du champ de pression reste consistant avec les hypothèses de couche limite. Un couplage faible par l'intermédiaire des vitesses de transpiration peut alors être réalisé. Cela permet, dans une certaine mesure, de tenir compte des effets de couche limite dans le calcul fluide parfait. Malheureusement la convergence du processus reste délicate, particulièrement pour les faibles nombres de Reynolds. De plus on se heurte toujours aux problèmes inhérents à la formulation et au couplage faible: impossibilité de calculer des écoulements décollés, indétermination des résultats concernant les grandeurs locales pour des géométries concaves.

Nous présentons dans cet article une méthode numérique, fondée sur la résolution des équations de Navier-Stokes complètes, permettant de calculer des écoulements à surface libre, tridimensionnels, incompressibles et turbulents autour d'une carène de navire.

L'écriture des équations en coordonnées cartésiennes (Tummac) pose des problèmes pour la prise en compte des conditions d'adhérence sur le corps ainsi que des conditions aux limites sur la surface libre. Ce type de discrétisation n'autorise pas une finesse de maillage suffisamment élevée pour pouvoir décrire convenablement un profil de couche limite aux forts nombres de Reynolds. De plus l'intégration des efforts sur la représentation de la carène discrétisée est très imprécise. Nous utiliserons donc les équations de Navier-Stokes écrites dans un repère curviligne tel que la carène et la surface libre représentent, à chaque instant, des surfaces de coordonnées. Les équations sont résolues sous forme instationnaire par une méthode à pas de temps, l'évolution de la surface libre impose de travailler dans un repère curviligne adaptatif.

Les inconnues indépendantes sont: les trois composantes cartésiennes physiques de la vitesse et la pression. Nous utiliserons donc la transformation partielle des équations.

La fermeture des équations est assurée par un modèle de turbulence de type Baldwin-Lomax utilisé sans fonction de paroi. Cette approche permet de tester les performances réelles du modèle mais nécessitent un maillage très fin près des parois et un préconditionnement des systèmes linéaires.

Les conditions de surface libre complètes du problème sont écrites sur la position réelle de la frontière. La condition cinématique est utilisée pour réactualiser la position de la surface libre à la fin de chaque itération. La condition dynamique normale est écrite comme une condition de Dirichlet pour la pression, les conditions dynamiques tangentielles sont interprétées sous forme de conditions de Neumann pour les vitesses. Malheureusement ces conditions sont mathématiquement incompatibles avec les conditions imposées sur le corps: la condition d'adhérence inhibe la montée de la surface libre le long de la carène et induit des contraintes beaucoup trop importantes. Deux solutions sont alors envisageables, soit une relaxation des conditions d'adhérence, soit l'annulation des contraintes d'origine visqueuse au voisinage de l'intersection de la carène avec la surface libre.

Après avoir présenté les équations qui régissent l'écoulement, nous proposons une méthode générale de résolution numérique concernant les problèmes de maillage et de remaillage, la discrétisation des équations de quantité de mouvement et de continuité, le couplage vitesses-pression, la résolution des systèmes linéaires et le

préconditionnement, les conditions de surface libre. Nous terminerons enfin par une présentation des résultats obtenus pour une carène de Wigley.

2. EQUATIONS

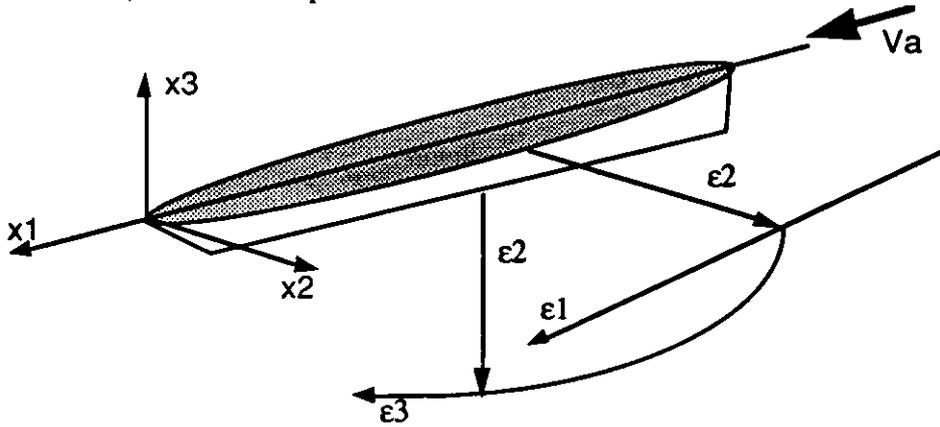
2.1. Forme primitive des équations

Les équations de Navier-Stokes sont écrites dans un repère orthogonal supposé galiléen, (x^1, x^2, x^3) . Les inconnues sont les composantes cartésiennes physiques de la vitesse moyenne, (u^1, u^2, u^3) , ainsi que la pression moyenne, P . Les forces gravitationnelles, indispensables à un calcul avec surface libre, sont prises en compte par l'intermédiaire du changement de variable: $p = P + \rho g x^3$. Nous utiliserons une loi de fermeture newtonienne pour les contraintes de Reynolds faisant intervenir la viscosité turbulente ν_t , ainsi que l'énergie cinétique de la turbulence k . Le fluide est supposé incompressible.

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t} + u^j \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^\alpha} + \nu \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x^j{}^2} + \frac{\partial}{\partial x^j} (\overline{u'^\alpha u'^j}) \quad , \quad \frac{\partial u^j}{\partial x^j} = 0 \quad , \quad \overline{u'^i u'^j} = \frac{2k}{3} \delta_{ij} - \nu_t \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right)$$

2.2. Espace de calcul

Le domaine physique, dans lequel l'écoulement est calculé, est limité par le plan d'entrée amont, le plan de sortie aval, la carène, son plan de symétrie et la surface libre. La simplification des conditions aux limites sur la carène et sur la surface libre passe par l'utilisation de coordonnées curvilignes $(\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3)$ transformant le domaine physique en un domaine de calcul parallélépipédique dans lequel la surface libre et la carène sont des plans. Les directions $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ et ε^3 sont explicitées ci-dessous.



La transformation partielle consiste à réécrire les équations de Navier-Stokes pour les variables (u^i) et p dépendant des coordonnées (ε^i) . La transformation totale, qui utilise les composantes contravariantes de la vitesse, et nécessite le calcul et le stockage des coefficients de Christoffel, ne sera pas utilisée.

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t} = \nu g^{ij} \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial \varepsilon^i \partial \varepsilon^j} + \left(\frac{1}{J} b_j^i (u^i - v_g^i) - \nu f^i \right) \frac{\partial u^\alpha}{\partial \varepsilon^j} - \frac{1}{\rho J} b_\alpha^k \frac{\partial p}{\partial \varepsilon^k} + \frac{1}{J} b_j^k \frac{\partial}{\partial \varepsilon^k} (\overline{u'^\alpha u'^j}) \quad , \quad \frac{1}{J} b_j^j \frac{\partial u^j}{\partial \varepsilon^j} = 0$$

$$\overline{u'^i u'^j} = \frac{2k}{3} \delta_{ij} - \frac{\nu_t}{J} \left(b_j^k \frac{\partial u^i}{\partial \varepsilon^k} + b_i^k \frac{\partial u^j}{\partial \varepsilon^k} \right)$$

L'originalité d'un calcul avec condition de surface libre est qu'il s'effectue dans un espace physique évoluant avec le temps alors que l'espace de calcul reste fixe. La métrique utile à la transformation est constituée du jacobien J , du repère covariant a_i , des vecteurs surfaces orientées b_j , du tenseur métrique contravariant g^{ij} , des paramètres de contrôle de grille f^i et des vitesses de déformation de l'espace physique ν_g^i . Tous ces paramètres évoluent avec le temps conjointement à la surface libre.

$$a_{ij} = \frac{\partial x^j}{\partial \varepsilon^i} \quad , \quad J = \det(a_{ij}) \quad , \quad b^i = a_i \wedge a_k \quad (i, j, k) \text{ cyclique} \quad , \quad g^{ij} = \frac{1}{J^2} b_j^k b_k^i \quad , \quad f^k = \frac{1}{J} \frac{\partial (J g^{jk})}{\partial \varepsilon^i} \quad , \quad \nu_g^i = \frac{\partial x^i}{\partial t}$$

2.3. Le modèle de turbulence

Le modèle de turbulence, indispensable dès que l'on veut traiter des nombres de Reynolds réalistes pour un navire, vient préciser le calcul de la viscosité turbulente et de l'énergie cinétique de la turbulence introduits par la relation de fermeture newtonienne. Le modèle retenu est de type Baldwin-Lomax. Il s'agit d'un modèle algébrique reliant les contraintes de Reynolds au champ de vitesse moyen. Ce modèle est utilisé conjointement à une fonction d'amortissement de paroi de Van-Driest, mais sans loi de paroi. Les effets de surface libre ne sont pas modélisés, cependant si la correction de Degani-Schiff se révèle suffisante pour le double modèle, la condition de surface libre induit de grosses irrégularités dans le calcul de la frontière entre la zone interne et la zone externe et donc dans le calcul de la viscosité turbulente et de l'énergie cinétique turbulente. Nous avons remédié à ce problème en limitant la recherche de cette frontière à la couche limite et non plus à l'ensemble du profil qui s'étend de la carène au bord extérieur du domaine de calcul.

2.4. Les conditions de surface libre

Les conditions de surface libre se décomposent en une condition cinématique et trois conditions dynamiques.

La condition cinématique traduit le fait que les particules fluides ne quittent pas la surface libre, c'est à dire, si h représente l'élévation de surface libre: $Dh/Dt = u^3$, soit en coordonnées cartésiennes:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u^1 \frac{\partial h}{\partial x} + u^2 \frac{\partial h}{\partial y} = u^3$$

Les conditions dynamiques traduisent la continuité des contraintes sur la surface libre. Alors qu'en fluide parfait seule la continuité des contraintes normales, qui se traduit par la continuité des pressions, peut être prise en compte, en fluide visqueux on vérifie la continuité de la composante normale et des composantes tangentielles à la surface libre.

Le tenseur des contraintes s'exprime de la façon suivante:

$$\sigma_{ij} = \left(-\frac{2}{3}\rho k - P \right) \delta_{ij} + \rho \nu_e \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right)$$

La $i^{\text{ème}}$ composante de la contrainte sur la surface libre s'écrit donc:

$$T_i = \left(\left(-\frac{2}{3}\rho k - p + \rho g x^3 \right) \delta_{ij} + \rho \nu_e \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right) \right) b_j^3$$

On obtient alors la composante normale de la contrainte sur la surface libre:

$$T_n = \left(\left(-\frac{2}{3}\rho k - p + \rho g x^3 \right) \delta_{ij} + \rho \nu_e \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right) \right) \frac{b_j^3 b_i^3}{|b^3|}$$

La condition dynamique normale s'écrit donc en coordonnées cartésiennes:

$$\left(\left(-\frac{2}{3}\rho k - p + \rho g x^3 \right) \delta_{ij} + \rho \nu_e \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right) \right) \frac{b_j^3 b_i^3}{|b^3|} = \frac{\gamma}{r_1 + r_2}$$

γ représente le coefficient de tension superficielle et r_1 et r_2 sont les deux rayons de courbures principaux de la surface libre.

Compte tenu du fait que $a_\alpha \cdot b^3 = 0$ (pour $\alpha = 1$ ou 2) sur la surface libre, l'annulation des composantes tangentielles de la contrainte nous donne en coordonnées cartésiennes:

$$T_{t_\alpha} = 0 \iff \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \right) b_j^3 a_{\alpha i} = 0$$

La transformation partielle, permettant de passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées curvilignes de l'espace de calcul est appliquée aux équations ci-dessus. La condition cinématique, la condition dynamique normale et les conditions dynamiques tangentielles s'écrivent respectivement:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{J} b_j^i (u^i - v_{\epsilon}^i) \frac{\partial h}{\partial \epsilon^j} \right) \cdot u^3 = 0$$

$$p = \rho g h - \frac{2}{3} \rho k + \frac{2 \rho v_{\epsilon}}{J |b|^2} b_i^3 b_j^3 b_k^3 \frac{\partial u^i}{\partial \epsilon^k} + \frac{\gamma}{(r_1 + r_2) |b|^4}$$

$$(b_j^k b_i^3 a_{ci} + b_j^k b_i^3 a_{cj}) \frac{\partial u^i}{\partial \epsilon^k} = 0$$

3. RESOLUTION NUMERIQUE

3.1. Maillages

La convergence vers l'état stationnaire est réalisée grâce à des itérations sur l'opérateur non-linéaire. A la fin de chacune de ces itérations une nouvelle surface libre est calculée et un nouveau maillage, adapté à l'espace physique, doit être généré. Les algorithmes de maillages, même algébriques, restent relativement coûteux en temps CPU dès l'instant où il s'agit de les mettre en oeuvre à chaque itération. Nous proposons un schéma de maillage et de remaillage, numériquement plus rapide.

Un premier maillage, monobloc structuré, est calculé par une méthode d'interpolation transfinie. Il s'appuie sur les faces amont et aval ainsi que sur la carène, préalablement discrétisée jusqu'à une cote supposée non atteinte par la surface libre. Ce maillage est orthogonalisé, dans la mesure du possible, par adjonction de conditions sur les dérivées, aux frontières du domaine. Des fonctions de contrôle permettent d'adapter la concentration du maillage le long de la carène de façon à capturer au mieux la couche limite (concentration plus forte sur l'avant que sur l'arrière du navire). Enfin, un lissage est effectué, dans le but d'atténuer la propagation de la discontinuité de pente entre la carène et le plan de symétrie, le long des lignes de maillage.

Ce maillage va servir de base à tous les remaillages successifs: l'opération consiste en fait à couper le maillage initial par la surface libre tout en conservant le caractère structuré du bloc considéré ainsi que le nombre de mailles dans chacune des trois directions ($\epsilon^1, \epsilon^2, \epsilon^3$). Pour ce faire on considère indépendamment chaque ligne de maillage aboutissant à la surface libre (ligne en ϵ^3) sur laquelle on répartit les points en fonction de la nouvelle hauteur de surface libre. On conserve sur cette nouvelle ligne le même rapport d'abscisses curvilignes de façon à conserver l'étalement initial du maillage.

L'avantage de cette méthode est, sans aucun doute, la rapidité de calcul, la contrepartie étant une perte éventuelle de l'orthogonalité, puisque celle-ci n'est plus contrôlée.

Les inconnues de vitesses ainsi que celle de pression sont localisées aux noeuds du maillage (disposition collocative centrée aux noeuds).

3.2. Discrétisation des équations

3.2.1. Equation de continuité

La discrétisation de l'équation de continuité fait intervenir neuf dérivées du premier ordre sur les vitesses (chaque composante de vitesse dans les trois directions du maillage). Une maille classique à sept points utilisant des schémas de différences finies centrés pour chaque dérivée peut être envisagée. Cette méthode, qui à l'avantage de ne pas nécessiter d'interpolation pour une disposition collocative centrée aux noeuds, pose le problème du découplage pair-impair. Pour cette raison nous avons préféré utiliser des différences finies décentrées utilisant une maille plus petite à quatre points; en outre, cette technique utilisée de pair avec une discrétisation du gradient de pression décentrée dans les trois directions opposées, fournit naturellement une discrétisation de l'équation de pression à treize points offrant un meilleur conditionnement de la matrice que les différences finies centrées pour la divergence et le gradient.

3.2.2. Equations de quantité de mouvement

Moyennant le changement de variable $\epsilon^{i*} = \epsilon^i / (g_{ii})^{0.5}$, l'équation de transport peut se mettre sous la forme linéarisée suivante:

$$\Phi_{\epsilon^1 \epsilon^1} + \Phi_{\epsilon^2 \epsilon^2} + \Phi_{\epsilon^3 \epsilon^3} = 2A\Phi_{\epsilon^3} + 2B\Phi_{\epsilon^2} + 2C\Phi_{\epsilon^1} + D\Phi_t + S_{\Phi}$$

Φ représente l'une quelconque des composantes de vitesses, les termes de convection A, B, C, et les termes sources S_{Φ} sont explicités au pas de temps précédent. La discrétisation ne porte donc que sur les dérivées du premier et deuxième ordre en ϵ^{i*} . Afin de limiter le phénomène de diffusion numérique mais aussi pour obtenir des coefficients continus avec les vitesses de convection, des schémas de discrétisation plus élaborés qu'un schéma de différences finies décentré amont ont été testés.

Le schéma finite analytic bidimensionnel associé à un schéma uniexponentiel dans la troisième direction repose sur le découplage suivant de l'équation de transport:

$$\begin{aligned} \Phi_e^{\tau} e^{\tau} + \Phi_e^{3\tau} e^{3\tau} - 2B\Phi_e^{2\tau} - 2A\Phi_e^{3\tau} &= g \\ -\Phi_e^{1\tau} e^{1\tau} - 2C\Phi_e^{1\tau} + D\Phi_e + S_\Phi &= g \end{aligned}$$

La discrétisation de la première équation est réalisée par la méthode finite-analytic de Chen et Chen: on utilise une maille bidimensionnelle à neuf points et on suppose que les conditions aux limites sur les quatre bords de la maille sont données par quatre fonctions sous la forme de combinaisons linéaires d'une exponentielle et d'une fonction affine. La solution analytique, sous l'hypothèse de g constant sur la maille, s'écrit alors:

$$\Phi_p = \sum_{i=1}^8 C_i \Phi_i - C_r g$$

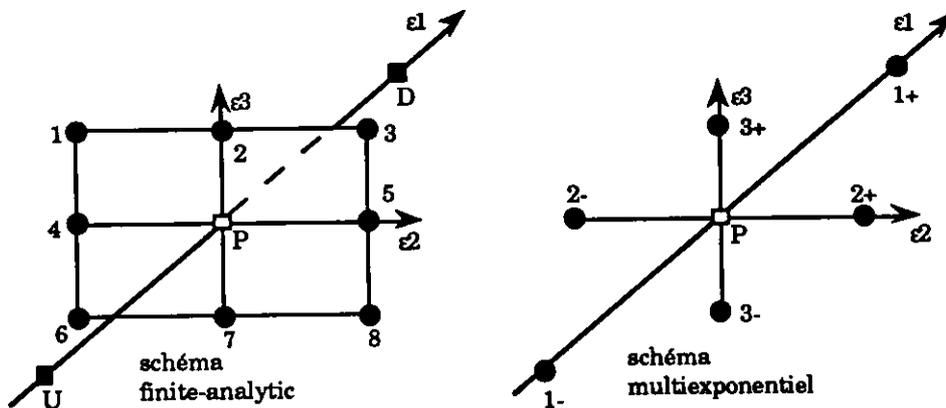
En supposant S_Φ constant sur la maille de discrétisation on peut résoudre la deuxième équation comme une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants en $\Phi_e^{1\tau}$. Sur une maille monodimensionnelle classique à trois points on a :

$$(C_u + C_d) \Phi_p - C_u \Phi_u - C_d \Phi_d = g - S_\Phi - D\Phi_e$$

Le regroupement de ces deux équations, moyennant une discrétisation décentrée des termes instationnaires, nous fournit la discrétisation de l'équation de quantité de mouvement sur une maille spatiale à onze points et une maille temporelle à deux points.

$$\left(1 + C_p (C_u + C_d) + C_p \frac{D}{\tau}\right) \Phi_p = \sum_{i=1}^8 C_i \Phi_i + C_p \left(C_u \Phi_u + C_d \Phi_d + \frac{D}{\tau} \Phi_p^{n-1} - S_\Phi\right)$$

Cette technique de discrétisation réclame cependant un calcul relativement coûteux des coefficients du schéma finite analytic faisant intervenir une série infinie dont la convergence numérique est parfois difficile à obtenir et les développements asymptotiques imparfaitement maîtrisés. Il convient également de remarquer le caractère dissymétrique de la discrétisation qui fait apparaître une direction de maillage privilégiée.



Le schéma multiexponentiel repose sur une décomposition symétrique, par dimension d'espace de calcul, de l'équation aux dérivées partielles. L'opérateur multidimensionnel est représenté par un ensemble d'opérateurs différentiels. Dans chaque direction on résout une équation différentielle linéaire et on obtient:

$$-\Phi_e^{\tau} e^{\tau} + 2A_i \Phi_e^{\tau} + g_i = 0 \implies \Phi_e^{\tau} e^{\tau} - 2A_i \Phi_e^{\tau} = \frac{1}{C_{pi}} (-\Phi_p + C_i \Phi_i + C_i^+ \Phi_i^+)$$

La discrétisation générale s'écrit alors:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{1}{C_{pi}} (-\Phi_p + C_i \Phi_i + C_i^+ \Phi_i^+) = S_\Phi + D \frac{\Phi_p^n - \Phi_p^{n-1}}{\tau}$$

Les coefficients ainsi obtenus, tout comme pour le schéma finite-analytic, sont tous positifs et assureront un bon conditionnement de la matrice des vitesses. Les avantages de ce schéma à sept points sont la simplicité et la rapidité de calcul des coefficients dont le stockage ne nécessite qu'un faible encombrement mémoire. Cependant ce schéma apporte trop de diffusion numérique pour les grands nombres de Reynolds de maille.

Pour remédier à ce défaut on peut combiner le schéma multiexponentiel avec un schéma de différences finies décentrées amont. On passe d'un type de discrétisation à l'autre, de façon continue, pour un nombre de Reynolds de maille situé aux alentours de deux.

3.3 . Couplage vitesses-pression

A chaque pas de temps nous sommes en présence de deux systèmes linéaires à résoudre simultanément. Le système linéaire dérivant des équations de quantité de mouvement et le système linéaire traduisant la conservation de la masse:

$$(E - A)U + GP = f \quad (s1) \quad , \quad DU = g \quad (s2)$$

U et P représentent les inconnues de vitesses et de pressions aux noeuds du maillage; la matrice des vitesses est scindée en une matrice purement diagonale E et une matrice à diagonale nulle -A; G et D contiennent les coefficients de discrétisation des opérateurs gradient et divergence; les termes sources ainsi que les conditions aux limites sont pris en compte dans les matrices f et g.

Si le champ de pression était connu a priori, la résolution du système (s1) permettrait de déterminer le champ de vitesses. Malheureusement le champ de pression est inconnu et l'équation pour le déterminer indépendamment du champ de vitesses s'obtient par combinaisons linéaires des systèmes (s1) et (s2):

$$D(E - A)^{-1}(f - GP) = g$$

Le problème réside dans la quasi impossibilité à l'heure actuelle de résoudre numériquement le système. En effet, il faudrait, pour ce faire, inverser (E - A) par une méthode directe de manière à calculer $D(E - A)^{-1}G$. L'inversion de cette dernière matrice relève de l'utopie puisqu'elle est pleine et que même son stockage poserait des difficultés pour les maillages envisagés (environ 10^5 points).

Le principe adopté par l'algorithme de résolution itératif SIMPLER est basée sur l'utilisation de E^{-1} comme inverse approchée de (E - A). L'équation de pression devient alors:

$$(DE^{-1}G)P = DE^{-1}(AU + f) - g$$

L'algorithme employé pour résoudre l'équation de quantité de mouvement et l'équation de pression est le suivant:

- (1) Calcul du champ de vitesses purement advectif: $U^* = E^{-1}(AU^{k-1} + f)$
- (2) Calcul du champ de pression de l'étape précédente: $P^{k-1} = (DE^{-1}G)^{-1}(DU^* - g)$
- (3) Résolution de l'équation de quantité de mouvement: $U^{**} = (E - A)^{-1}(f - GP^{k-1})$

Le champ de vitesses U^{**} n'étant pas à divergence nulle, celui-ci est corrigé par les deux étapes suivantes:

- (4) Calcul de la correction de pression: $P' = (DE^{-1}G)^{-1}(DU^{**} - g)$
- (5) Calcul du nouveau champ de vitesses à divergence nulle: $U^k = U^{**} - E^{-1}GP'$

3.3. Résolution des systèmes linéaires

La résolution de l'algorithme SIMPLER impose l'inversion de trois systèmes linéaires, un sur les vitesses de matrice E - A (étape (3)) et deux sur la pression et la correction de pression de matrice $DE^{-1}G$ (étape (2) et (4)). Ces matrices sont très creuses et l'utilisation d'un maillage structuré permet de repérer a priori la position des valeurs non nulles. On a donc choisi une méthode itérative pour résoudre les systèmes.

L'inversion du système dont les inconnues sont les vitesses ne pose, en principe, pas de problème. En effet les schémas analytiques (exponentiels, finite-analytic) tout comme les différences finies décentrées amont fournissent des coefficients positifs qui assurent la dominance diagonale de la matrice E - A.

Les systèmes étudiés n'étant en général pas symétriques, nous ne pouvons pas employer un simple algorithme de gradient conjugué. La méthode de l'équation normale qui consiste à symétriser la matrice du système en la multipliant à gauche par sa transposée lève la difficulté, d'autant plus que la nouvelle matrice ainsi générée est nécessairement symétrique et positive, ce qui assure théoriquement la convergence de l'algorithme. Malheureusement le nombre de conditionnement du nouveau système devient le carré de celui du système initial

et la convergence du processus s'en trouve ralenti. Nous utiliserons donc pour inverser la matrice une méthode du double gradient conjugué pour laquelle le système transformé quoique deux fois plus important conserve le conditionnement du système initial. La rapidité de la résolution s'en trouve considérablement améliorée. Bien que la convergence de cet algorithme ne soit pas mathématiquement démontrée (la nouvelle matrice du système n'est pas nécessairement positive) nous n'avons pas rencontré en pratique de matrice des vitesses pour laquelle le double gradient conjugué utilisé diverge.

Le système linéaire sur la pression et la correction de pression pose beaucoup plus de problème. En effet, non seulement rien n'assure la dominance diagonale de la matrice, comme pour le calcul des vitesses, mais encore la finesse du maillage nécessaire à une bonne description des profils de vitesses dans la couche limite sans utiliser de fonction de paroi, augmente considérablement le nombre de conditionnement du système.

Le paradoxe réside dans le fait que dans la couche limite les vitesses varient très rapidement et sont faciles à calculer, alors que la pression qui elle ne varie que faiblement est difficile à appréhender.

La condition de surface libre ne simplifie pas le problème, puisque contrairement aux calculs en configuration de double modèle, le nombre de conditionnement du système croît de façon significative au cours des itérations, c'est à dire durant la montée de la surface libre.

Le nombre d'itérations nécessaires à une méthode de double gradient conjugué pour inverser le système devient rapidement énorme. Dans certains cas on constate même une divergence de l'algorithme de résolution. Un préconditionnement de la matrice $DE^{-1}G$ devient alors indispensable, non seulement pour diminuer de façon sensible le temps CPU mais aussi, tout simplement pour permettre à la méthode itérative utilisée de converger. Le préconditionnement consiste à multiplier à gauche le système $Ax = b$ par une matrice M^{-1} de telle sorte que le nombre de conditionnement de la nouvelle matrice $M^{-1}A$ soit très inférieur au nombre de conditionnement de A . Le nouveau système à résoudre devient : $M^{-1}Ax = M^{-1}b$.

La méthode du double gradient conjugué préconditionné par une matrice M consiste à effectuer les opérations suivantes jusqu'à ce que $r_{j\max}/r_0 < \epsilon$.

$$\begin{aligned} r_0 &= b - Ax_0, \quad \bar{r}_0 = b - A^t x_0, \quad p_0 = z_0 = M^{-1} r_0, \quad \bar{p}_0 = \bar{z}_0 = M^{-t} r_0 \\ &\text{pour } j = 1 \text{ à } j_{\max} \\ \alpha_j &= \langle \bar{r}_j, z_j \rangle / \langle \bar{p}_j, A p_j \rangle, \quad x_{j+1} = x_j + \alpha_j p_j \\ r_{j+1} &= r_j - \alpha_j A p_j, \quad \bar{r}_{j+1} = \bar{r}_j - \alpha_j A^t \bar{p}_j \\ z_{j+1} &= M^{-1} r_{j+1}, \quad \bar{z}_{j+1} = M^{-t} \bar{r}_{j+1} \\ \beta_j &= \langle \bar{r}_{j+1}, z_{j+1} \rangle / \langle \bar{r}_j, z_j \rangle, \quad p_{j+1} = \beta_j p_j + z_{j+1}, \quad \bar{p}_{j+1} = \beta_j \bar{p}_j + \bar{z}_{j+1} \end{aligned}$$

Il est évident que si $M = I_d$ (matrice identité), il n'y a pas de préconditionnement et que $M = A$ est le préconditionnement théorique le plus intéressant mais dans ce cas la question du calcul de $M^{-1} = A^{-1}$ subsiste. Le problème consiste en fait en la détermination d'une matrice M "approchant A " et facilement inversible. Pour ce faire, nous écrivons M sous la forme d'une décomposition LU incomplète. Nous imposons de plus, à la structure de M de copier celle de A . La décomposition s'écrit:

$$M = LU, \quad L = (I + \Delta) \Delta^{-1}, \quad U = (u + \Delta)$$

Avec l et u matrice triangulaire inférieure et triangulaire supérieure stricte de A et Δ matrice diagonale telle que $\text{diag}(M) = \text{diag}(LU) = (2 - \sigma) \text{diag}(A)$ définie par récurrence de la façon suivante:

$$\Delta_i = \sigma A_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{A_{ij} A_{ji}}{\Delta_j}$$

La matrice $M = LU$ est facilement inversible par la méthode classique du double balayage: $Mx = y \iff Lz = y$ et $Ux = z$. L'inconvénient de cette méthode récurrente est qu'elle n'est pas vectorisable sous cette forme. Divers algorithmes, tel que celui utilisant une décomposition en série de Neumann, permettent de vectoriser l'inversion des systèmes triangulaires. Ceux-ci doivent cependant être utilisés en fonction des performances en calcul vectoriel de l'ordinateur considéré.

3.4 Discrétisation des conditions de surface libre

3.4.1 Condition cinématique

En tenant compte du fait que h , la hauteur de surface libre, ne dépend que des variables t , ϵ^1 et ϵ^2 , la condition cinématique peut se mettre sous la forme suivante:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + A^1 \frac{\partial h}{\partial \varepsilon^1} + A^2 \frac{\partial h}{\partial \varepsilon^2} - u^3 = 0$$

$$A^1 = \frac{1}{J} b_1^1 (u^1 - v_g^1) + \frac{1}{J} b_2^1 (u^2 - v_g^2) + \frac{1}{J} b_3^1 (u^3 - v_g^3) , \quad A^2 = \frac{1}{J} b_1^2 (u^1 - v_g^1) + \frac{1}{J} b_2^2 (u^2 - v_g^2) + \frac{1}{J} b_3^2 (u^3 - v_g^3)$$

Cette condition permet de réactualiser la position de la surface libre à la fin de chaque itération en temps. Après discrétisation de l'équation, on obtient la nouvelle élévation de surface libre, en résolvant un système linéaire. Afin de nous affranchir de la résolution de ce système et donc de gagner en temps de calcul, nous utiliserons une discrétisation décentrée des termes des dérivées spatiales. Cette méthode nous donne l'élévation de surface libre sous la forme d'une relation de récurrence explicite. Les dérivées en $\partial h / \partial \varepsilon^1$ sont discrétisées à l'aide du schéma à quatre points de Dawson de façon à limiter l'amortissement numérique excessif introduit par une discrétisation à deux points.

L'équation cinématique de surface libre discrétisée s'écrit:

$$\frac{h_{ij}^k - h_{ij}^{k-1}}{\tau} + A^1 \sum_{l=0}^3 C_l h_{i+1,j}^k + A^2 (h_{i,j+1}^k - h_{ij}^k) - u^3 = 0$$

C'est à dire:

$$h_{ij}^k = \frac{h_{ij}^{k-1} + \tau u^3 - \tau A^1 \sum_{l=1}^3 C_l h_{i+1,j}^k - \tau A^2 h_{i,j+1}^k}{1 + \tau A^1 C_0 - \tau A^2}$$

Les termes C_l sont les coefficients du schéma de Dawson à pas constant. L'indice k fait référence au temps et les indices i, j représentent, respectivement, les directions ε^1 et ε^2 . Cette relation nécessite, pour pouvoir être utilisée, des conditions initiales à $t = 0$ et des conditions aux limites sur les bords $\varepsilon^1 = \varepsilon^1_{\min}$ et $\varepsilon^2 = \varepsilon^2_{\max}$. Celles-ci s'écrivent:

$$h_{ij}^0 = 0 , \quad h_{1j}^k = 0 , \quad h_{i,j_{\max}}^k = 0 \quad \text{pour tout } (i, j)$$

Il nous paraît important de souligner les difficultés numériques rencontrées au voisinage de l'intersection de la surface libre et de la carène. En effet, sur la carène, $u^1 = u^2 = u^3 = 0$ et les composantes contravariantes de la vitesse de déformation du maillage dans les directions 1 et 2 sont nulles ce qui assure la nullité de A^1 et A^2 . La seule solution pour empêcher la condition cinématique de surface libre de dégénérer en $\partial h / \partial t = 0$ (auquel cas la surface libre ne monte pas le long de la carène) est que $\partial h / \partial \varepsilon^2 \rightarrow \infty$ sur la carène de telle sorte que $A^2 \partial h / \partial \varepsilon^2$ tende vers une valeur finie non nulle. Cette singularité mathématique étant difficile à manipuler numériquement, on calculera l'élévation de surface libre sur la carène par $\partial h / \partial \varepsilon^2 = 0$.

3.4.2. Conditions dynamiques

La condition dynamique normale est prise en compte sous la forme d'une condition de Dirichlet en pression, tous les termes du second membre étant explicités au pas de temps précédent. Les dérivées premières des vitesses sont exprimées à l'aide de schémas de différences finies centrés dans les directions ε^1 et ε^2 et décentrés dans la direction ε^3 .

Le terme de tension superficielle est généralement introduit dans les calculs pour régulariser numériquement la surface libre. Cependant, la finesse du maillage à la paroi utilisé dans cette étude, rend très instable le calcul des rayons de courbures et induit de grosses irrégularités sur la pression et une divergence du code.

D'autre part, la prise en compte des contraintes visqueuses normales à la paroi, qui peuvent être très importantes dans la couche limite, est néfaste à la convergence globale des itérations. Celles-ci sont donc relaxées continuellement dans la couche limite de telle sorte que la condition dynamique normale tende, sur la carène, vers la condition de fluide parfait ($Re \rightarrow +\infty$).

Les conditions de surface libre dynamiques tangentielles sont introduites sous la forme de deux conditions de Neumann sur les vitesses u^1 et u^2 . Les équations s'écrivent, sous forme développée:

$$\frac{\partial u^1}{\partial \varepsilon^3} = F_{1,1} \frac{\partial u^1}{\partial \varepsilon^1} + F_{1,2} \frac{\partial u^1}{\partial \varepsilon^2} + F_{2,1} \frac{\partial u^2}{\partial \varepsilon^1} + F_{2,2} \frac{\partial u^2}{\partial \varepsilon^2} + F_{2,3} \frac{\partial u^2}{\partial \varepsilon^3} + F_{3,1} \frac{\partial u^3}{\partial \varepsilon^1} + F_{3,2} \frac{\partial u^3}{\partial \varepsilon^2} + F_{3,3} \frac{\partial u^3}{\partial \varepsilon^3}$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial \varepsilon^3} = G_{1,1} \frac{\partial u^1}{\partial \varepsilon^1} + G_{1,2} \frac{\partial u^1}{\partial \varepsilon^2} + G_{1,3} \frac{\partial u^1}{\partial \varepsilon^3} + G_{2,1} \frac{\partial u^2}{\partial \varepsilon^1} + G_{2,2} \frac{\partial u^2}{\partial \varepsilon^2} + G_{2,3} \frac{\partial u^2}{\partial \varepsilon^3} + G_{3,1} \frac{\partial u^3}{\partial \varepsilon^1} + G_{3,2} \frac{\partial u^3}{\partial \varepsilon^2} + G_{3,3} \frac{\partial u^3}{\partial \varepsilon^3}$$

$$\begin{aligned}
 K_{i,k} &= b_1^k b_1^3 a_{1i} + b_1^k b_i^3 a_{11} + b_2^k b_2^3 a_{1i} + b_2^k b_i^3 a_{12} + b_3^k b_3^3 a_{1i} + b_3^k b_i^3 a_{13} \\
 L_{i,k} &= b_1^k b_1^3 a_{2i} + b_1^k b_i^3 a_{21} + b_2^k b_2^3 a_{2i} + b_2^k b_i^3 a_{22} + b_3^k b_3^3 a_{2i} + b_3^k b_i^3 a_{23} \\
 F_{i,k} &= \frac{K_{i,k}}{K_{1,3}} \quad , \quad G_{i,k} = \frac{L_{i,k}}{L_{2,3}}
 \end{aligned}$$

On remarquera que $\partial u^1/\partial \varepsilon^3$ et $\partial u^2/\partial \varepsilon^3$ peuvent s'exprimer indépendamment à l'aide de l'une ou l'autre des deux relations ci-dessus, cependant, les tests effectués montrent une meilleure convergence du logiciel lorsque l'on exprime $\partial u^i/\partial \varepsilon^3$ à l'aide de la continuité de la contrainte tangentielle dans la direction ε^i .

Les maillages utilisés sont encore beaucoup trop grossiers pour voir apparaître une couche limite sous la surface libre, il faudrait pour ce faire étirer, le maillage dans la direction verticale de façon à obtenir une concentration de points similaire à celle utilisée au voisinage de la carène. Cela multiplierait de manière excessive le nombre de points et n'a pas été envisagé pour l'instant.

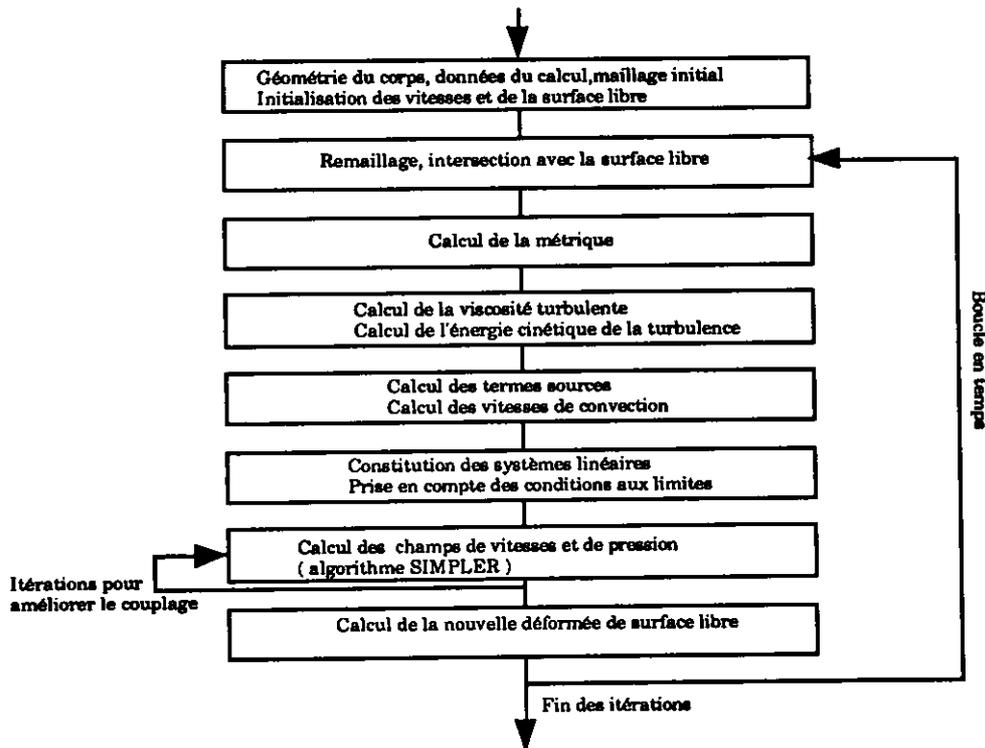
Une nouvelle difficulté liée à la prise en compte des conditions de surface libre et des conditions d'adhérence apparaît ici. En effet, d'après les conditions d'adhérence, on a sur le corps: $\partial u^i/\partial \varepsilon^3 = 0$ et $\partial u^i/\partial \varepsilon^1 = 0$ pour tout i . Cette relation réinjectée dans les conditions de surface libre dynamiques donne:

$$\frac{\partial u^1}{\partial \varepsilon^3} = F_{1,2} \frac{\partial u^1}{\partial \varepsilon^2} + F_{2,2} \frac{\partial u^2}{\partial \varepsilon^2} + F_{3,2} \frac{\partial u^3}{\partial \varepsilon^2} \quad , \quad \frac{\partial u^2}{\partial \varepsilon^3} = G_{1,2} \frac{\partial u^1}{\partial \varepsilon^2} + G_{2,2} \frac{\partial u^2}{\partial \varepsilon^2} + G_{3,2} \frac{\partial u^3}{\partial \varepsilon^2}$$

Les seconds membres de ces équations contiennent les dérivées des vitesses dans la direction ε^2 , normale à la carène. Leur prise en compte aboutit à une divergence inexorable du code. La solution numérique retenue consiste à annuler les dérivées des vitesses dans la direction ε^2 au voisinage de la carène sur une distance de l'ordre de l'épaisseur de couche limite.

3.5. Organisation du code

Le code de résolution, baptisé ELISA, fondé sur la théorie qui précède, est organisé selon l'organigramme ci-dessous:



4. RESULTATS

Les calculs présentés ont été effectués autour d'une carène de Wigley en modèle fixe sur une topologie de maillage en H comportant 41 points dans la direction ϵ^2 , 21 points dans la direction ϵ^3 et 91 points dans la direction ϵ^1 dont 15 points devant la carène, 26 points derrière et 50 le long de la carène, ce qui représente un total d'environ 80000 points dans le volume de calcul. Celui-ci s'étend sur une longueur de carène à l'avant, deux longueurs à l'arrière, une longueur sur le côté et une demi longueur sous la coque. Le premier point de calcul est situé à $s/L = 0,00005$.

La direction ϵ^1 est la direction principale de l'écoulement, la direction ϵ^2 est perpendiculaire à la surface de la carène et la direction ϵ^3 est parallèle aux couples de la carène, depuis la surface libre jusqu'au plan de symétrie ($\epsilon^2 = 0$ est la surface contenant la carène, $\epsilon^3 = 0$ est l'équation de la surface libre à chaque instant)

Une vue d'une partie du maillage sur l'avant du corps est représenté figure 1a. La fig 1b met en évidence la déformation du maillage à la fin du calcul.

Les méthodes d'accélération de la convergence par un pas de temps local donnent de bons résultats pour une configuration de type double modèle, cependant il n'en est pas de même pour un calcul avec surface libre. Les temps d'établissement de la couche limite d'une part et de la surface libre d'autre part sont très différents et l'utilisation d'un pas de temps local aboutit inévitablement à une divergence du processus. La solution consiste à utiliser un pas de temps uniforme et à effectuer les calculs jusqu'à la convergence de la surface libre, beaucoup plus lente à s'établir que la couche limite.

Nous avons utilisé un pas de temps adimensionnel constant: $\tau = \Delta t / l = 0,01$. Les itérations ont été effectuées jusqu'à $T=3$ soit 300 itérations en 25 heures CPU sur un Vax 9420 sans parallélisation. La vectorisation des algorithmes de résolution des systèmes linéaires a permis de gagner un facteur 2,5 sur le temps CPU total.

Afin de limiter le choc sur la surface libre lors de l'introduction brutale d'une carène dans l'écoulement, le calcul simule l'accélération du navire jusqu'à la vitesse choisie. La vitesse imposée à la carène est calculée de la façon suivante: $v/v_a = \min(1, aT)$ avec $a = 1$. L'accélération s'effectue donc de façon uniforme de $T=0$ à $T=1$. Le terme d'accélération d'entraînement lié au caractère non-galiléen du repère en translation rectiligne lié à la carène est pris en compte dans les termes sources S_ϕ . Cette méthode permet de s'affranchir des coefficients de sous relaxation sur les vitesses et l'élévation de surface libre. Le résultat de chaque itération correspond donc bien à un état instationnaire physique.

La figure 2 montre une convergence d'environ trois ordres sur les vitesses, la pression et l'élévation de la surface libre. Les restes sont calculés à chaque itération de la façon suivante:

$$r_v = \max ((v_j - v_{j-1})/U), r_p = \max ((p_j - p_{j-1})/\rho U^2), r_h = \max ((h_j - h_{j-1})/h_{\max})$$

La figure 3 montre les déformées de surface libre le long de la carène (comprise entre $x/l = -0,5$ et $x/l = +0,5$). L'accord avec les points expérimentaux est satisfaisant en dépit d'une atténuation significative de l'amplitude de la première crête et d'un léger amortissement numérique (visible surtout pour le nombre de Froude de 0,25) limitant l'amplitude des oscillations. Soulignons le fait que l'amplitude de la première crête n'est pas améliorée par l'utilisation d'un maillage plus fin. Les effets visqueux sont visibles essentiellement sur le pic arrière; en fluide parfait celui-ci a pratiquement la même amplitude que le pic sur l'avant alors qu'en fluide réel il est diminué d'environ 30%.

Afin de limiter des temps de calculs, déjà très élevés, nous avons arrêté les itérations à $T = 3$, ce qui est insuffisant pour obtenir de bons profils de vagues. En effet, aux faibles nombres de Froude, quand la longueur d'onde des oscillations sur la surface libre devient petite, la convergence du processus numérique est beaucoup plus lente. Ce phénomène a d'ailleurs été vérifié expérimentalement en bassin des carènes: pour une résistance donnée, la résistance à l'avancement est d'autant plus lente à s'établir que le nombre de Froude est faible. Les récents calculs effectués jusqu'à $T = 7$ confirme le fait qu'à $T = 3$ les résultats sont insuffisamment convergés.

Les figures 4 et 5 représentent les profils de vitesses obtenus dans les section $x/l = 0$ et $x/l = 0,45$. Les résultats pour $x/l = 0$ sont en bon accord avec les expériences et ce quelque soit la cote considérée. Par contre sur l'arrière de la carène les profils proches de la surface libre sont sensiblement éloignés des points expérimentaux. Le fait est que, si au voisinage de la surface libre et sur l'arrière du navire, les vitesses expérimentales en double modèle et avec surface libre sont très différentes, dans les calculs, l'adjonction de la condition de surface libre ne modifie pas de façon suffisante les profils de vitesses. Cette caractéristique se retrouve d'ailleurs dans les calculs effectués par Hino ou Stern mais aussi dans une approche de type couche-limite. Deux causes peuvent être à l'origine de ce phénomène:

- La présence de la surface libre induit de grosses modifications dans les caractéristiques de la turbulence qui ne sont pas modélisées ici; on observe expérimentalement et très localement sur la surface libre une décroissance importante de la longueur caractéristique et donc de la viscosité turbulente. Un modèle simplifié a été introduit dans les équations de Baldwin-Lomax: la longueur n'est plus calculée comme la distance à la paroi mais comme le minimum de la distance à la paroi et de la distance à la surface libre. Les tests effectués montre cependant que la viscosité turbulente n'est modifiée que sur une fine couche et que ceci ne suffit pas à expliquer la différence avec les expériences.

- La deuxième hypothèse, plus plausible, est liée à la prise en compte des conditions dynamiques de surface libre. En effet, la façon dont elles ont été programmées entraîne une incompatibilité avec les conditions

d'adhérence et elles sont relaxées dans la couche limite, là justement où leur influence est importante. Une prise en compte plus rigoureuse des conditions dynamiques de surface libre dans la couche-limite entraînerait peut être une amélioration des profils de vitesses.

5. CONCLUSION

L'étude présentée ici démontre la faisabilité d'un code de calcul résolvant les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles pour un écoulement incompressible et prenant en compte des conditions de surface libre. Les résultats obtenus sur la carène de Wigley progressant avec une vitesse constante dans une eau initialement calme sont satisfaisants, même sur un maillage qui n'est peut être pas suffisamment fin pour capter toutes les oscillations de la surface libre aux faibles nombres de Reynolds. Il est cependant à peu près certain qu'une carène un peu plus complexe, de type série 60, nécessitera un maillage plus fin pour obtenir des grandeurs convergées. Des calculs sur ce type de carène, présentant de fortes interactions entre la zone extérieure et la couche limite dans sa partie arrière, sont d'ailleurs envisagés.

Certains problèmes, très délicats, sont cependant loin d'être résolus. La modification de la turbulence au voisinage de la surface libre a été très peu abordé par les différents auteurs et l'obtention d'une solution de meilleure qualité, pour les profils de vitesses proches de la surface libre, passe certainement par une prise en compte précise des conditions dynamiques au sein de la couche limite.

Soulignons enfin que cette méthode peut fort bien être utilisée dans d'autres applications chères à l'hydrodynamique: les problèmes de tenue à la mer ou de manœuvrabilité, par exemple, ne semblent plus hors de portée des calculs en fluide réel.

6. REFERENCES

- [1] G. Delhommeau, "Les problèmes de diffraction-radiation et de résistance de vagues: étude théorique et résolution numérique par la méthode des singularités.", Thèse de Doctorat ès Sciences, LHN, ENSM, Nantes, (1987).
- [2] J.J. Maisonneuve, "Résolution du problème de la résistance de vagues par une méthode de singularités de Rankine.", Thèse de Doctorat, LHN, ENSM, Nantes, (1989).
- [3] F. Villeger, B. Alessandrini, "Interaction between free surface flow and boundary layer around a ship model.", *7th workshop on water waves and floating bodies*, Val de Reuil, (1992).
- [4] J. Piquet, M. Visonneau, "Computation of the flow past shiplike hull.", *Comput. fluids*, vol 19 (1991).
- [5] C.J. Chen, H.C. Chen, "Finite analytic numerical method for unsteady twodimensional Navier-Stokes equations.", *J. Comput. Phys.*, vol 53, (1984).
- [6] G. Deng, "Résolution des équations de Navier-Stokes tridimensionnelles. Application au calcul d'un raccord plaque plane-aile.", Thèse de Doctorat, GMN, LHN, ENSM, Nantes, (1989).
- [7] P. Queutey, "Résolution des équations de Navier-Stokes tridimensionnelles. Application au calcul sur des corps en incidence.", Thèse de Doctorat, GMN, LHN, ENSM, Nantes, (1989).
- [8] Y. Tahara, F. Stern, B. Rosen, "An interactive approach for calculating ship boundary layer and wakes for non zero Froude number.", *J. comput. phys.*, vol 98, (1992).
- [9] S. Chiba, K. Kuwahara, "A finite difference formulation for free surface flow problems using a conforming grid system.", *12th Int. Conf. on Num. Meth. in Fluid Dynamics*, Oxford, (1990)
- [10] A. Jennings, G.A. Malik, "The solution of sparse linear equations by conjugate gradient method.", *Int. Numer. Meth. Engng.*, vol 12, (1977).
- [11] V. Dussan, "On the spreading of liquids on solids surfaces: static and dynamic contact lines.", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol 11, (1979)
- [12] T. Hino, "Numerical simulation of a viscous flow with a free surface around a ship model.", *J. Soc. Naval Archit. Japan*, vol 161, (1987).
- [13] M. Zhu, H. Miyata, H. Kajitani, "Finite difference simulation of a viscous flow about a ship arbitrary configuration.", *Proc. 5th Intern. Conf. Numerical Ship Hydrodynamics*, Hiroshima, (1989).
- [14] L.E. Erikson, "Generation of boundary conforming grids around wing-bodies configuration using a transfinite interpolation.", *AIAA journal*, vol 20, (1982)
- [15] V.C. Patel, H.C. Chen, S. Ju, "Ship stern and wake flow: solution of the fully elliptic Reynolds averaged Navier-Stokes equations and comparisons with experiment.", *IIHR report*, no 323, (1988).
- [16] C.J. Chen, H.C. Chen, "The finite analytic method.", *IIHR report* no 232, (1982).
- [17] I. Celik, W. Rodi, M.S. Hossain, "Modelling of free surface proximity effects on turbulence". *Proc. Refined Modelling of Flows*, Paris, (1982)
- [18] F. Stern, "Effects of waves on the boundary layer of surface piercing body", *IIHR report* no 288 (1985)
- [19] B.S. Baldwin, H. Lomax, "Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows", *16 th AIAA meeting*, (1978)

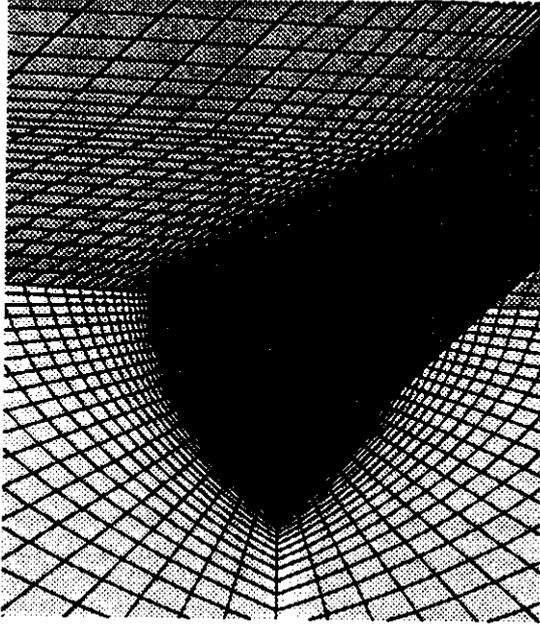


Figure 1a maillage initial

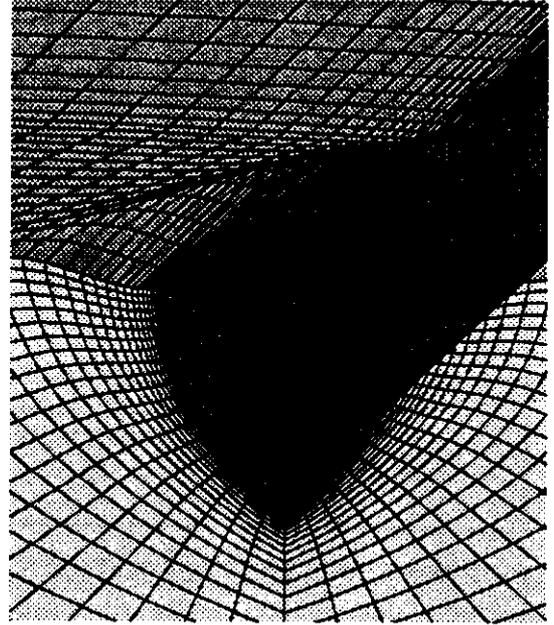
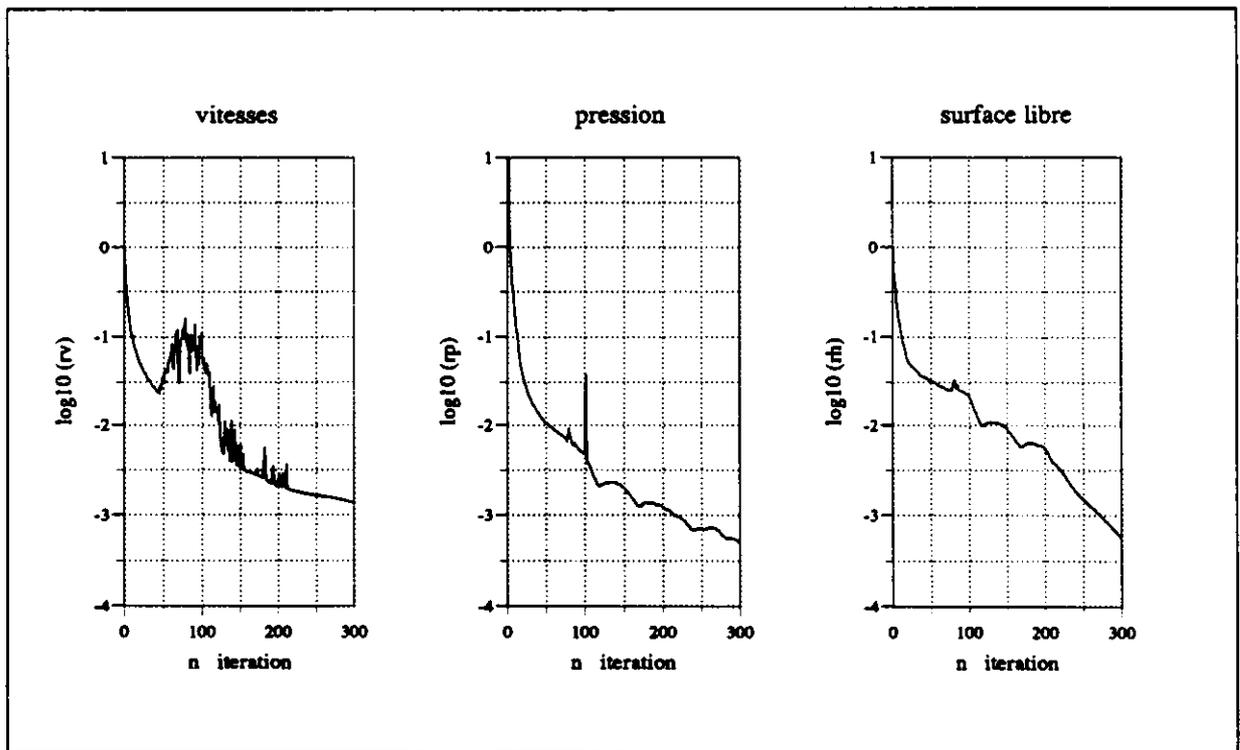


Figure 1b maillage final

Figure 2 convergence des vitesses, de la pression et de la surface libre ($F_n = 0,408$, $Re = 5,0.10^6$)

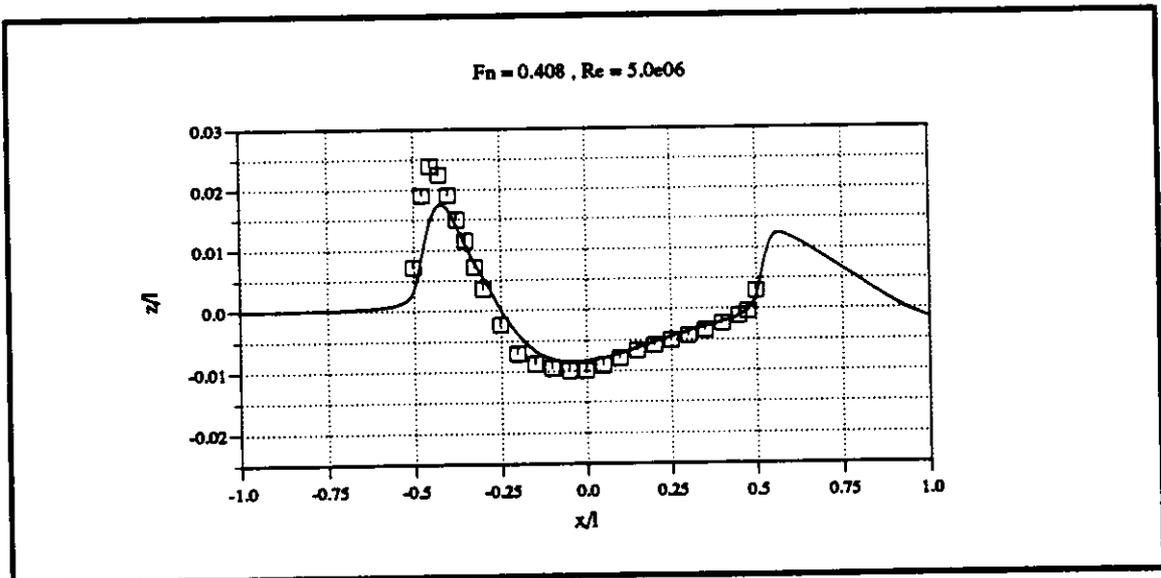
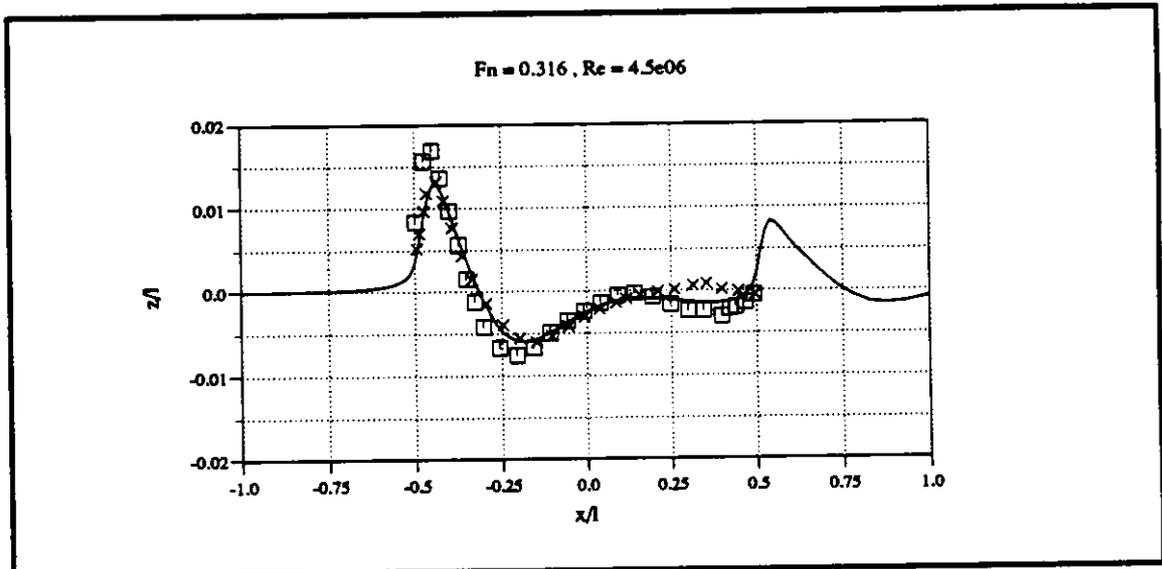
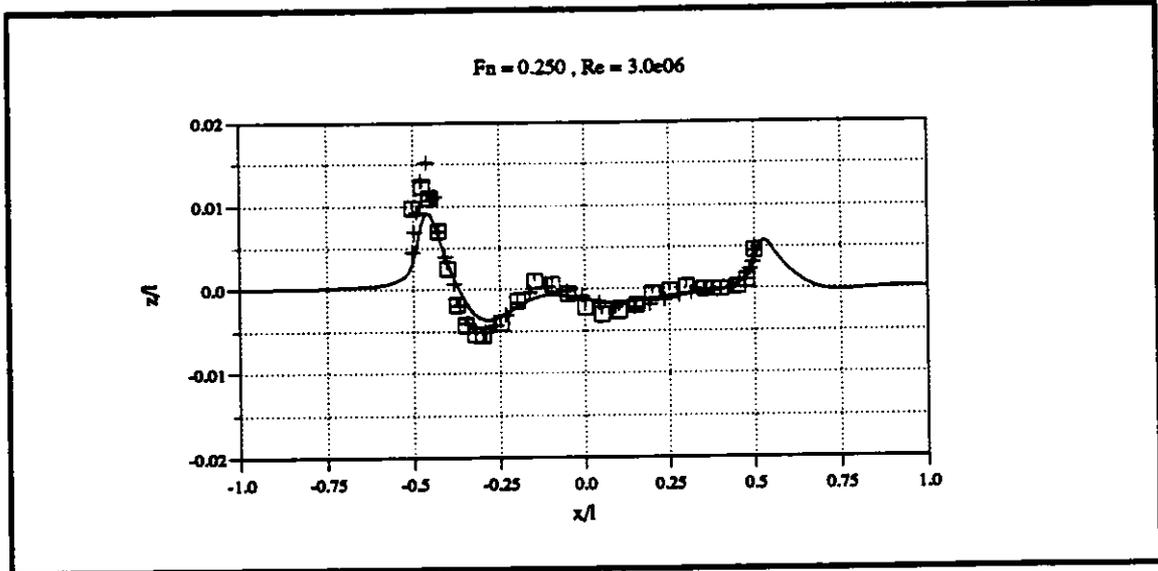


Figure 3 élévation de la surface libre le long de la carène de Wigley
 — calcul ELISA × calcul Stem + calcul Hino □ expériences

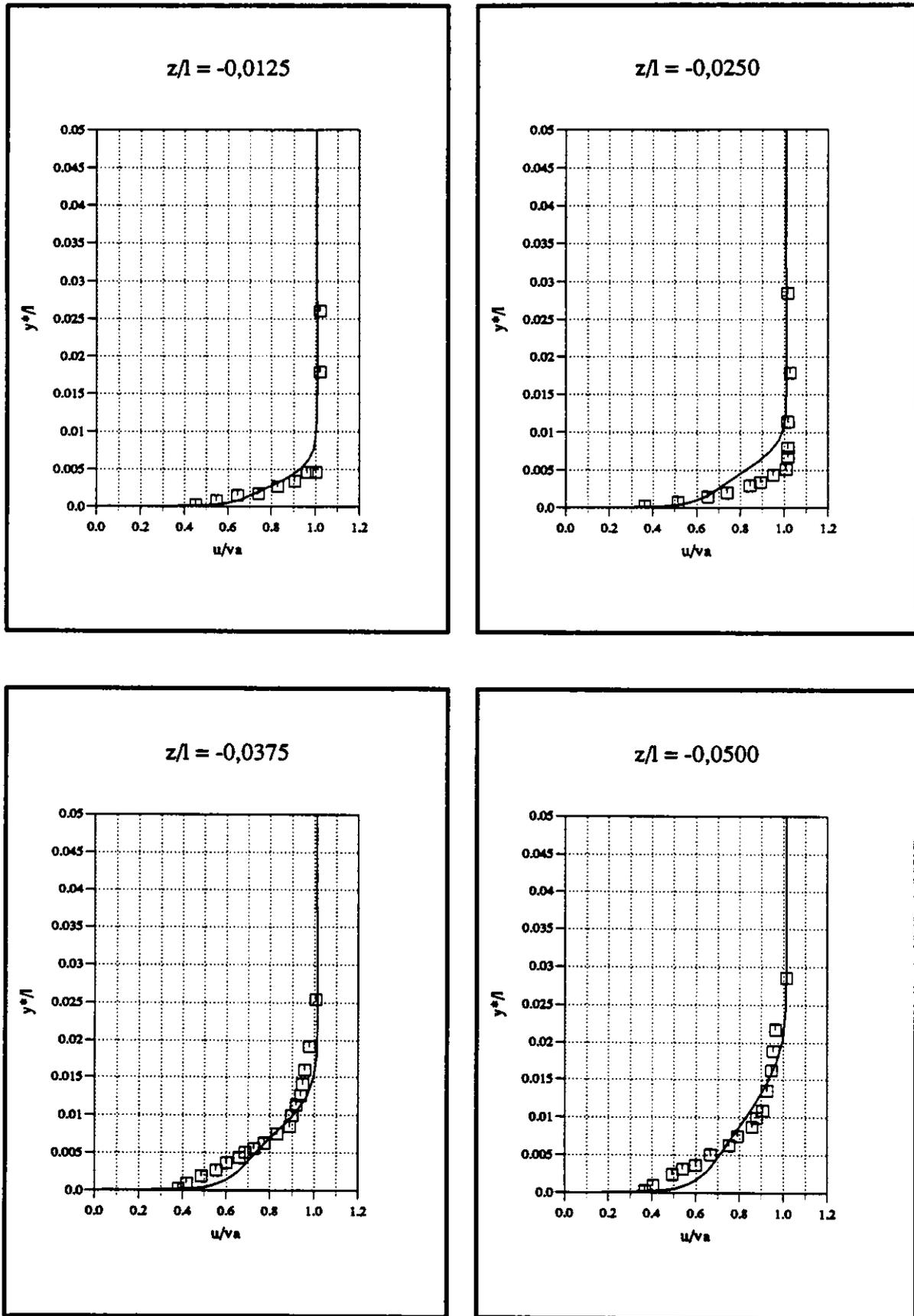


Figure 4 profils de vitesses longitudinales pour $x/l = 0$, $Re = 4,5 \cdot 10^6$ et $Fn = 0,316$
 — calcul ELISA □ expériences Ali

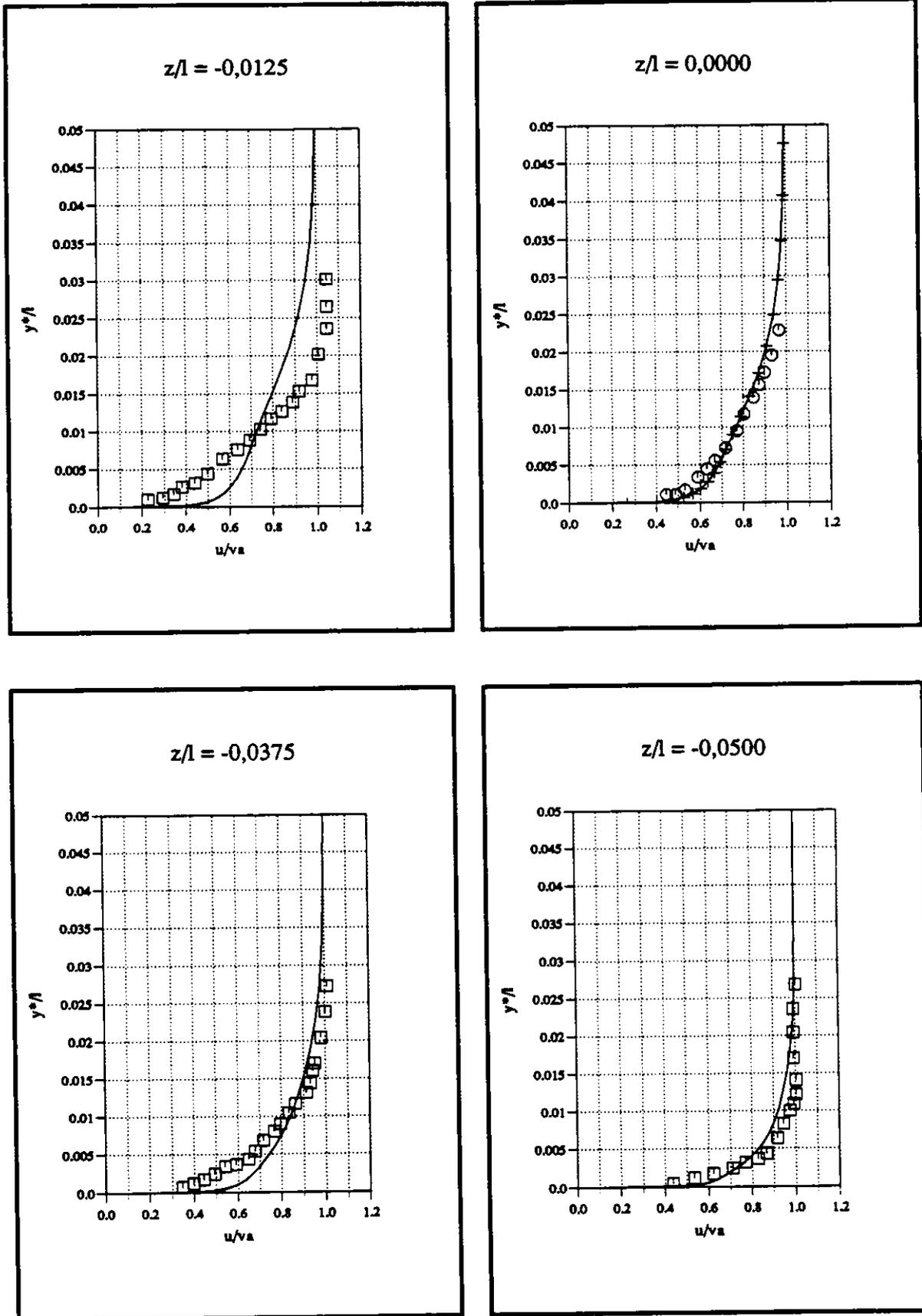


Figure 5 profils de vitesses longitudinales pour $x/l = 0,45$ et $Re = 4,5 \cdot 10^6$
 — calcul ELISA ($Fn = 0,316$) \square expériences Ali ($Fn = 0,316$)
 + calcul ELISA ($Fn = 0$) \circ expériences Sarda ($Fn = 0$, $z/l = 0$)

