

4e JOURNEES DE L'HYDRODYNAMIQUE

1, 2, 3 mars 1993 - Nantes

**SIMULATION NUMERIQUE D'ÉCOULEMENTS
AUTOUR DE CORPS IMMERGÉS
AVEC SURFACE LIBRE NON-LINEARISÉE**

C. DE JOUETTE - H. VIVIAND
Principia Recherche Développement
B.P. 107 - 06902 Sophia Antipolis Cedex

S. WORNOM
Diodore Système
B.P. 23 - 06901 Sophia Antipolis Cedex

Résumé

On présente une méthode générale de calcul d'écoulements instationnaires de fluide parfait incompressible avec surface libre non linéarisée, en présence de corps immergés. Les équations d'Euler sont résolues dans un maillage mobile qui suit le mouvement de la surface libre. Après discrétisation en temps par un schéma implicite du second ordre, les équations sont transformées en un système pseudo-instationnaire hyperbolique par rapport à une variable de type pseudo-temps.

La méthode de résolution numérique est une adaptation à ce système de la méthode de volumes finis centrés, avec viscosité artificielle, développée à l'origine par Jameson et al pour les écoulements compressibles. La résolution en pseudo-temps est basée sur le schéma de Runge-Kutta à cinq étapes, avec incrément local du pseudo-temps et un opérateur implicite de lissage des résidus.

Le traitement numérique aux frontières, en particulier à la surface libre, utilise les relations de compatibilité du système pseudo-instationnaire.

On présente les premiers résultats obtenus pour le ballonnement d'un liquide dans une cuve, sans obstacle, puis en présence d'une plaque immergée.

Summary

A general method is presented for the computation of inviscid incompressible unsteady flows about immersed bodies and with a non-linearized free surface. The Euler equations are solved in a free surface-fitted moving grid. The equations are first discretized in time using an implicit second-order temporal scheme, then they are transformed into a pseudo-unsteady system which is hyperbolic with respect to a pseudo-time variable.

The numerical solution method is an adaptation to this system of the finite-volume method with centered scheme and artificial viscosity originally developed by Jameson et al for compressible flows. Resolution in pseudo-time is achieved by means of the five-stage Runge-Kutta scheme, with local pseudo-time stepping and implicit residual smoothing.

The numerical treatment at boundaries, in particular at the free surface, is based on the use of the compatibility relations of the pseudo-unsteady system.

First results obtained for the sloshing of a liquid in a tank, without obstacle, then with an immersed plate, are presented.

I. Introduction

Les problèmes industriels d'écoulements à surface libre sont résolus couramment en théorie potentielle linéaire par des méthodes de singularités [1]. Ces méthodes peuvent aussi être étendues au traitement non-linéaire exact de la surface libre [2]. L'hypothèse d'écoulements potentiels est cependant restrictive, surtout si l'on s'intéresse aux efforts sur des corps flottants ou immergés tels que les atténuateurs de houle [21]. La prise en compte des décollements, des zones à écoulement rotationnel et des effets visqueux en général, amène à la résolution des équations de Navier-Stokes. Notons cependant que la résolution des équations d'Euler constitue une première étape intéressante qui permet de modéliser des écoulements rotationnels présentant de grandes structures tourbillonnaires, les décollements étant forcés par des conditions de type Kutta-Joukowski.

PRINCIPIA a entrepris le développement d'une méthode de volumes finis pour le calcul des écoulements de fluide incompressible, parfait ou visqueux. Cette méthode est basée sur une nouvelle approche de type pseudo-compressibilité [3]. Son extension au cas instationnaire avec surface libre a été discutée en [4]. Une présentation plus détaillée de la méthode, pour le cas des équations d'Euler, est donnée ici, et l'on montre les premiers résultats obtenus pour le ballonnement d'un liquide dans une cuve.

II. Description du problème continu

On considère des écoulements bidimensionnels instationnaires d'un fluide parfait incompressible pesant en présence d'une surface libre et d'obstacles complètement immergés. Deux situations peuvent être traitées: soit le cas d'une cuve ayant un mouvement de corps rigide quelconque donné, soit le cas d'une houle en fluide illimité. Le domaine de calcul D est donc limité par les surfaces suivantes: la surface libre SL (à calculer); un fond imperméable F ; deux frontières verticales AB, CD . Ces dernières peuvent être des parois solides (cas de la cuve) ou des frontières ouvertes (non matérielles, cas de la houle); les surfaces SC des corps solides immergés.

L'écoulement est régi par le système des équations d'Euler instationnaires pour un fluide incompressible:

$$(II.1) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{U} &= 0 \\ \partial(\rho \vec{U})/\partial t + \operatorname{div}(\rho \vec{U} \otimes \vec{U} + p\vec{I}) &= \rho \vec{g} + \rho \vec{f}_i \end{aligned}$$

où ρ est la masse volumique (constante), \vec{U} le vecteur vitesse, p la pression, \vec{I} le tenseur unité, \vec{g} l'accélération de la pesanteur, et \vec{f}_i la force d'inertie massique (non nulle si le référentiel de calcul n'est pas Galiléen).

En coordonnées cartésiennes x, y telles que l'axe Oy soit vertical ascendant par rapport à la pesanteur, le système (II.1) s'écrit, sous forme matricielle:

$$(II.2) \quad \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = \rho S$$

avec

$$(II.3) \quad \hat{Q} = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ u \\ v \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ f_{i_x} \\ f_{i_y} - g \end{bmatrix}$$

et où u, v sont les composantes cartésiennes de la vitesse.

Les conditions aux limites du problème sont les suivantes:

- Sur les parois (corps SC , fond F , parois de la cuve AB et CD), on applique la condition de glissement:

$$(II.4) \quad \vec{U} \cdot \vec{n} = \vec{W} \cdot \vec{n}$$

où \vec{W} est la vitesse matérielle de la paroi et \vec{n} sa normale unitaire.

- Sur la surface libre SL,

a) condition cinématique: La surface libre est une surface matérielle sur laquelle la condition de glissement s'écrit comme (II.4), mais avec une vitesse normale de déplacement $\vec{W} \cdot \vec{n}$ qui est une inconnue du problème.

b) condition dynamique: L'effet de la tension superficielle étant négligé, la pression en un point quelconque de la surface libre, et à tout instant, est égale à la pression atmosphérique p_a :

$$(II.5) \quad p = p_a$$

Sur les frontières ouvertes AB et CD, dans le cas d'un problème de houle, on donne une houle incidente régulière, qui serait celle observée en l'absence des corps immergés. Cette houle est supposée se propager de AB (appelée frontière amont) vers CD (appelée frontière aval). On applique sur ces frontières ouvertes une ou plusieurs conditions aux limites de type Orlanski [5] pour certaines variables. La condition d'Orlanski appliquée à une variable ϕ traduit l'hypothèse qu'au voisinage proche de la frontière, cette variable est convectée avec une certaine vitesse (inconnue) vers l'extérieur du domaine, c'est-à-dire qu'elle obéit à une équation de transport de la forme:

$$(II.6) \quad \partial\phi/\partial t + C_\phi \vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\phi = 0$$

où \vec{n} est la normale unitaire sortante, et C_ϕ est la vitesse de transport qui doit être positive. La vitesse C_ϕ est inconnue et est calculée en appliquant (II.6) en un point intérieur du domaine de calcul et proche de la frontière où ϕ est connu. Puis (II.6) est appliquée au point sur la frontière pour déterminer ϕ en ce point.

III. Equations en coordonnées curvilignes et discrétisation temporelle

Pour le traitement non-linéaire de la surface libre, on effectue une transformation de coordonnées permettant de se ramener à un domaine de calcul fixe dans le plan des coordonnées transformées ξ, η . Cette transformation générale de coordonnées est fonction du temps et s'écrit, du plan de calcul vers le plan physique:

$$(III.1) \quad \vec{r} = \vec{r}(\xi, \eta, t'), \quad \text{soit} \quad x = g_1(\xi, \eta, t'), \quad y = g_2(\xi, \eta, t'), \quad t = t'$$

où \vec{r} est le vecteur position dans l'espace physique.

Par hypothèse, cette transformation est telle que la surface libre SL est la ligne de coordonnée $\eta = \eta_L = Cte$. Par construction également, le fond F est la ligne $\eta = 0$, et les frontières latérales AB et CD sont des lignes $\xi = Cte$. Les surfaces des corps immergés SC sont constituées de portions de lignes de maillages $\xi = Cte$, ou $\eta = Cte$.

La dérivée en temps d'une grandeur ϕ prise à (ξ, η) fixés sera notée $(\partial\phi/\partial t')$ pour la distinguer de la dérivée $(\partial\phi/\partial t)$ qui est prise à x, y fixés. On a la relation:

$$(III.2) \quad \partial\phi/\partial t' = \partial\phi/\partial t + \vec{W} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\phi$$

où \vec{W} est la vitesse de déplacement d'un point de coordonnées ξ, η fixées:

$$(III.3) \quad \vec{W} = \partial\vec{r}/\partial t'$$

Le système (II.2) se transforme alors sous la forme suivante, qui reste conservative comme (II.2):

$$(III.4) \quad \frac{\partial}{\partial t'} \left(\frac{\hat{Q}}{J} \right) + \frac{\partial \bar{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \eta} = \rho \frac{S}{J}$$

où J est le Jacobien de la transformation: $J = \partial(\xi, \eta)/\partial(x, y)$, et où les flux transformés \bar{F}, \tilde{G} sont donnés par les expressions suivantes:

$$(III.5) \quad \bar{F} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho u(\xi_t + \bar{u}) + \xi_x p \\ \rho v(\xi_t + \bar{u}) + \xi_y p \end{bmatrix}, \quad \tilde{G} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho u(\eta_t + \bar{v}) + \eta_x p \\ \rho v(\eta_t + \bar{v}) + \eta_y p \end{bmatrix}$$

et \tilde{u}, \tilde{v} sont les composantes contravariantes de la vitesse:

$$(III.6) \quad \tilde{u} = u \xi_x + v \xi_y, \quad \tilde{v} = u \eta_x + v \eta_y$$

Le système (III.4) est discrétisé en temps, à ξ, η fixés, à l'aide d'un schéma retardé à trois niveaux, du second ordre, totalement implicite. A l'instant $t^{n+1} = (n+1)\Delta t$, et en notant $\phi^{n+1} = \phi(t^{n+1})$, le système discrétisé en temps s'écrit:

$$(III.7) \quad \frac{1}{2\Delta t} \left[3 \left(\frac{\hat{Q}}{J} \right)^{n+1} - 4 \left(\frac{\hat{Q}}{J} \right)^n + \left(\frac{\hat{Q}}{J} \right)^{n-1} \right] + \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \xi} \right)^{n+1} + \left(\frac{\partial \bar{G}}{\partial \eta} \right)^{n+1} = \rho \left(\frac{S}{J} \right)^{n+1}$$

IV. Méthode de pseudo-compressibilité

Pour résoudre le système (III.7) aux inconnues $u^{n+1}, v^{n+1}, p^{n+1}$, on utilise une méthode de pseudo-compressibilité qui est une extension au cas instationnaire [4] d'une méthode précédemment développée à PRINCIPIA pour le calcul des écoulements incompressibles stationnaires [3].

On introduit une variable d'itération τ appelée pseudo-temps, dont on fait dépendre les inconnues, et on ajoute à chaque équation du système (III.7) un terme de dérivée des inconnues par rapport à τ . On obtient ainsi un système d'équations pseudo-instationnaires où τ joue un rôle analogue à celui du temps physique dans les méthodes instationnaires. L'intégration de ce système pas à pas en τ conduit à la solution $u^{n+1}, v^{n+1}, p^{n+1}$, lorsque les dérivées en τ sont suffisamment petites. Cette approche, proposée il y a vingt cinq ans par Chorin [6] et par Yanenko [7] pour le cas des écoulements stationnaires, a été étendue aux écoulements instationnaires depuis quelques années (par ex., Réfs. [8] à [10]).

La méthode développée à PRINCIPIA repose sur une analyse générale des systèmes pseudo-instationnaires [11] et sur la recherche d'un système ayant une forme mathématique la plus proche possible de celle des équations d'Euler instationnaires en fluide compressible [3]. Pour cela, on exprime la pression en fonction d'une variable $\bar{\rho}$ dite pseudo-masse volumique, et jouant le rôle de la masse volumique d'un fluide compressible fictif:

$$(IV.1) \quad p^{n+1} = G(\bar{\rho})$$

Le système pseudo-instationnaire associé au système (III.7) qui est retenu utilise comme variable de base:

$$(IV.2) \quad \tilde{Q} = \bar{\rho} \begin{bmatrix} 1 \\ u^{n+1} \\ v^{n+1} \end{bmatrix}$$

et a la forme suivante:

$$(IV.3) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\tilde{Q}}{J} \right) + \frac{1}{2\Delta t} \left[3 \left(\frac{\hat{Q}}{J} \right)^{n+1} - 4 \left(\frac{\hat{Q}}{J} \right)^n + \left(\frac{\hat{Q}}{J} \right)^{n-1} \right] + \left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \xi} \right)^{n+1} + \left(\frac{\partial \bar{G}}{\partial \eta} \right)^{n+1} = \rho \left(\frac{S}{J} \right)^{n+1}$$

Dans ce qui suit, on omettra l'indice supérieur $n+1$ sur toutes les grandeurs au temps t^{n+1} .

Comme en fluide compressible, on impose au système (IV.3) d'être hyperbolique par rapport à τ . On montre [11], [3], que cette condition se traduit par les deux conditions suivantes:

$$(IV.4) \quad \bar{\rho} > 0$$

$$(IV.5) \quad G'(\bar{\rho}) > 0$$

Le choix de la pseudo-loi d'état (IV.1) a fait l'objet d'une analyse théorique et d'essais numériques [3] qui ont conduit à la loi suivante:

$$(IV.6) \quad p = \rho U_0^2 L n \frac{\bar{p}}{\rho} + p_0$$

où U_0, p_0 sont des constantes données ayant les dimensions respectivement d'une vitesse et d'une pression. Des lois de forme plus générale $p = G(\bar{p}, U)$, où U est le module de la vitesse, ont aussi été étudiées dans [3]. Certaines peuvent conduire à une convergence plus rapide que la loi (IV.6) mais la condition d'hyperbolicité entraîne des limitations pour les variations de la vitesse et de la pression, ce qui rend l'utilisation de ces lois plus délicate d'un point de vue pratique.

V. Méthode de résolution numérique

Le système (IV.3) est résolu numériquement par la méthode de volumes finis développée initialement par Jameson et al [12] pour la résolution des équations d'Euler en fluide compressible, puis étendue aux fluides visqueux et améliorée par Swanson et Turkel [13], [14], Martinelli et Jameson [15]. Cette méthode est couramment utilisée pour résoudre des problèmes complexes d'aérodynamique transsonique (par ex., [16], [17]).

L'étroite analogie existant entre le système (IV.3) et les équations d'Euler en fluide compressible permet d'appliquer cette méthode sans modification sur le fond. Les deux principales adaptations qui ont été nécessaires portent d'une part sur le maillage mobile et d'autre part sur les expressions particulières des valeurs propres des matrices jacobiniennes. Nous nous limitons ici à rappeler les principales caractéristiques de cette méthode:

- Discrétisation centrée en espace, de type volumes finis;
- Grandeurs physiques de base définies aux centres des cellules;
- Termes de viscosité artificielle du second ordre et du quatrième ordre, contrôlés par deux coefficients;
- Intégration en pseudo-temps par un schéma de Runge-Kutta à cinq étapes;
- A chaque étape du schéma de Runge-Kutta, application d'un opérateur implicite de lissage des résidus;
- Utilisation en chaque cellule de la valeur locale maximum du pas en pseudo-temps qui résulte d'un critère de stabilité de type CFL.

Le schéma de Runge-Kutta a été adapté pour prendre en compte le terme source $[(3/2\Delta t)(\hat{Q}/J)]$ dans (IV.3) de façon implicite en pseudo-temps, ce qui renforce notablement la stabilité.

VI. Traitement des frontières par les relations de compatibilité

VI.1 Principe général

Le système (IV.3) étant hyperbolique par rapport à τ , on utilise les relations de compatibilité pour le traitement numérique des frontières, selon une technique classique en fluide compressible [18], [19]. Pour une direction spatiale donnée par un vecteur unitaire \vec{v} , les relations de compatibilité s'obtiennent en multipliant à gauche le système d'équations par les vecteurs propres à gauche de la matrice caractéristique du système pour cette direction \vec{v} . Le choix des variables \bar{p}, u, v comme variables de base conduit à une forme assez simple des relations de compatibilité. Celles-ci sont ensuite discrétisées selon la technique de [19] qui conduit aux relations suivantes:

$$(VI.1) \quad \Gamma_0^{(k)}(\bar{p} - \bar{p}_*) + \vec{\Gamma}^{(k)} \cdot (\vec{U} - \vec{U}_*)$$

où \bar{p}_*, \vec{U}_* sont les valeurs fournies par le système complet des équations discrètes (donc sans tenir compte de conditions aux limites éventuelles), et où $\Gamma_0^{(k)}, \Gamma_x^{(k)}, \Gamma_y^{(k)}$, pour $k = 1, 2, 3$, sont les vecteurs propres correspondant au choix de \bar{p}, u, v comme variables de base. On donne ci-après les expressions des valeurs propres $\lambda^{(k)}$ et des relations de compatibilité $RC^{(k)}$ correspondantes.

$$(VI.2) \quad \lambda^{(1)} = (\rho/\bar{p})U'_v, \quad RC^{(1)}: (\vec{U} - \vec{U}_*) \cdot \vec{T} = 0$$

$$(VI.3) \quad \lambda^{(2)} = (1/2)(\rho/\bar{\rho}) \left[U'_v + \sqrt{(U'_v)^2 + 4\bar{\rho}G'(\bar{\rho})/\rho} \right]$$

$$RC^{(2)} : \left[\lambda^{(2)} - (\rho/\bar{\rho})U'_v \right] (\bar{\rho} - \bar{\rho}_*) + \rho(\bar{U} - \bar{U}_*) \cdot \bar{v} = 0$$

$$(VI.4) \quad \lambda^{(3)} = (1/2)(\rho/\bar{\rho}) \left[U'_v - \sqrt{(U'_v)^2 + 4\bar{\rho}G'(\bar{\rho})/\rho} \right]$$

$$RC^{(3)} : \left[\lambda^{(3)} - (\rho/\bar{\rho})U'_v \right] (\bar{\rho} - \bar{\rho}_*) + \rho(\bar{U} - \bar{U}_*) \cdot \bar{v} = 0$$

avec

$$(VI.5) \quad U'_v = (\bar{U} - \bar{W}) \cdot \bar{v}$$

et où \bar{T} est un vecteur orthogonal à \bar{v} .

Le principe du traitement des frontières est le suivant. On prend pour direction \bar{v} celle du vecteur unitaire normal sur la frontière, orienté vers l'extérieur du domaine de calcul.

- Si $\lambda^{(k)} \geq 0$: la relation de compatibilité correspond à une onde arrivant en un point P de la frontière, de l'intérieur ou de la frontière du domaine de calcul D. Elle exprime donc une propriété de l'écoulement dans D et doit être utilisée au point P.

- Si $\lambda^{(k)} < 0$: la relation de compatibilité correspond à une onde qui viendrait de l'extérieur et qui n'est donc pas associée à l'écoulement calculé. Elle ne peut donc pas être utilisée et doit être remplacée par une condition aux limites appliquée à l'une des variables dépendantes ($\bar{\rho}, u, v$).

L'ensemble des relations de compatibilité utilisables et des conditions aux limites permet de déterminer les inconnues $\bar{\rho}, u, v$ en chaque point des frontières.

On notera que l'on a toujours $\lambda^{(2)} > 0, \lambda^{(3)} < 0$, et donc que l'on utilisera toujours la $RC^{(2)}$ (VI.3), et jamais la $RC^{(3)}$ (VI.4). La $RC^{(1)}$ (VI.2) sera utilisée pour une frontière sortante ou imperméable ($U'_v \geq 0$), mais non pour une frontière entrante ($U'_v < 0$).

VI.2 Applications aux différentes frontières

VI.2.1 Parois

La vitesse normale est donnée par la condition de glissement (II.4). On a $U'_v = 0$, et la $RC^{(1)}$ (VI.2) donne la vitesse tangentielle à la paroi (égale à $\bar{U} \cdot \bar{T}$). La $RC^{(2)}$ (VI.3) donne la valeur de $\bar{\rho}$.

VI.2.2 Surface libre

D'après la condition (II.5) et la relation (IV.6), la valeur de $\bar{\rho}$ sur la surface libre est une constante connue. La $RC^{(2)}$ (VI.3) fournit donc la valeur de la vitesse normale du fluide. La surface libre ayant pour équation $\eta = \eta_L$, la condition de glissement s'écrit :

$$(VI.6) \quad (\partial\eta/\partial t)_{\eta=\eta_L} = -(\bar{U} \cdot \overrightarrow{grad\eta})_{\eta=\eta_L} = - \left[(\bar{U} \cdot \bar{n}) \mid \overrightarrow{grad\eta} \mid \right]_{\eta=\eta_L}$$

et donc la valeur de $(\partial\eta/\partial t)_{\eta=\eta_L}$ est connue. A ce stade, il faut préciser la transformation de coordonnées (III.1) utilisée. Pour le cas où le corps immergé est une plaque mince, on utilise une transformation de coordonnées simple dans laquelle les lignes $\xi = cte$ sont des droites verticales, invariantes dans le temps, et les lignes $\eta = cte$ s'obtiennent par interpolation entre la plaque ($y = h_0$), ou le fond ($y = 0$) en l'absence de plaque, et la surface libre ($y = H(x, t)$):

$$(VI.7) \quad x = g_1(\xi), \quad y = H(x, t) \bar{g}_2(\eta)$$

où $\bar{g}_2(\eta)$ est une fonction croissante donnée qui permet de faire varier la taille des mailles dans le plan physique et qui doit vérifier :

$$(VI.8) \quad \bar{g}_2(0) = 0, \quad \bar{g}_2(\eta_L) = 1$$

On déduit alors de (VI.6) et (VI.7) :

$$(VI.9) \quad \partial H/\partial t = -H \left[(d\bar{g}_2/d\eta)(\partial\eta/\partial t) \right]_{\eta=\eta_L} = H \left[(d\bar{g}_2/d\eta)(\bar{U} \cdot \bar{n}) \mid \overrightarrow{grad\eta} \mid \right]_{\eta=\eta_L}$$

Le calcul de $H^{n+1} = H(x, t_{n+1})$ résulte de la discrétisation de (VI.9) selon le même schéma en temps que dans (III.7):

$$(VI.10) \quad \frac{1}{2\Delta t}(3H^{n+1} - 4H^n + H^{n-1}) = H^{n+1} \left[(d\bar{g}_2/d\eta)(\vec{U} \cdot \vec{n}) | \overrightarrow{grad\eta} | \right]_{\eta=\eta_L}^{n+1}$$

Par ailleurs, comme pour une paroi, la $RC^{(1)}$ (VI.2) donne la vitesse tangentielle sur la surface libre.

Supposons connus les champs de vitesse et de pression à l'itération en pseudo-temps τ^q pour le calcul à l'instant t_{n+1} . On calcule tout d'abord la hauteur de la surface libre à l'itération τ^{q+1} à l'aide de (VI.10). On est alors en mesure de recalculer les coordonnées des noeuds du maillage et de redéfinir les termes métriques à τ^{q+1} . Puis les variables dépendantes $\bar{\rho}, \vec{U}$ dans D sont calculées par le schéma de Runge-Kutta. On applique enfin les conditions aux limites, en particulier sur la surface libre, ce qui complète la détermination des champs de vitesse et de pression à l'itération τ^{q+1} .

VI.2.3 Frontières ouvertes

Frontière amont AB. Elle est telle que $U'_v = u$.

Si $u \geq 0$, on utilise la $RC^{(1)}$ qui donne $v = v_*$, et la $RC^{(2)}$. Il faut une condition aux limites qui est la condition d'Orlanski (II.6) appliquée soit à $(\bar{\rho} - \bar{\rho}_I)$, soit à $(u - u_I)$, où l'indice I réfère à la variable pour la houle incidente donnée.

Si $u < 0$, seule la $RC^{(2)}$ est utilisée. Il faut deux conditions aux limites qui sont les conditions d'Orlanski sur $(v - v_I)$ et soit sur $(\bar{\rho} - \bar{\rho}_I)$ soit sur $(u - u_I)$.

Frontière aval CD. Elle est telle que $U'_v = -u$.

Si $u \leq 0$, on utilise la $RC^{(1)}$ qui donne $v = v_*$, et la $RC^{(2)}$. On applique la condition d'Orlanski soit à $\bar{\rho}$ soit à u .

Si $u > 0$, seule la $RC^{(2)}$ est utilisée. On applique les conditions d'Orlanski sur v et soit sur $\bar{\rho}$ soit sur u . Ce traitement des frontières ouvertes a fait l'objet d'essais numériques satisfaisants sur la solution de la houle d'Airy [20].

VII. Applications au ballonnement dans une cuve

Une cuve de 9 m de long, remplie d'eau sur une hauteur de 6 m, est mise en oscillations forcées à une période $T = 2\pi/\omega = 4.5s$, avec une amplitude en cavement $a = 0.25m$. La vitesse d'entraînement de la cuve est $V_e = a\omega\cos(\omega t)$. Deux cas de calculs sont présentés dans les planches suivantes. Ils sont effectués dans le repère relatif lié à la cuve.

Le premier simule le ballonnement dans une cuve sans plaque. Le maillage contient 40x20 mailles, le pas de temps est $DT = T/28$. A l'instant initial, les champs de vitesse et de pression, ainsi que l'élévation de surface libre sont donnés par la solution de la théorie potentielle linéaire. On montre différents résultats pour deux instants qui correspondent à deux retournements successifs. Les figures 1.a et 1.b représentent les maillages à ces instants. La figure 2 présente pour le temps $26DT$ les courbes de convergence des résidus des variables dépendantes (a) et de la fonction hauteur (b) en valeurs moyenne et maximale pour 50 itérations. Il est à noter que la convergence pour d'autres instants de calcul est aussi bonne et une trentaine d'itérations suffirait pour atteindre un niveau de convergence acceptable. Les figures 3 et 4 montrent aux instants considérés les champs de vitesse et de pression.

De plus, la conservation du volume fluide est excellente (variation de moins de 0.1% après trois cycles complets).

Le deuxième calcul simule le ballonnement dans une cuve avec une plaque immergée à 2 m. Le maillage, non régulier, contient 50x30 mailles. Le pas de temps est $T/32$. L'état initial est le même que précédemment. On présente des résultats à deux instants très proches de ceux du cas sans plaque, étant donné la faible différence du pas de temps. Les figures 5.a et 5.b présentent le maillage aux instants choisis. Les figures 6.a et 6.b montrent que le niveau de convergence pour les calculs avec plaque est similaire au cas sans plaque pour 50 itérations. Les figures 7 et 8 présentent les champs de vitesse et de pression à deux retournements successifs. La solution montre que des tourbillons se forment aux extrémités de la plaque lors des retournements (figure 8.a).

On constate, dans les deux cas de calculs, que le sens de l'écoulement s'inverse dans tout le champ fluide en un seul pas de calcul lors d'un retournement.

Cette étude a été réalisée dans le cadre d'un projet Eurêka avec financement MRT.

Références

- [1] BERHAULT, C., LE BUHAN, Ph., MOLIN, B., BOUGIS, J., "DIODORE: A Numerical Tool for Frequency and Time Domain Analysis of the Behaviour of Moored or Towed Floating Structures", in: Design of Marine and Offshore Structures, T.K.S. Murthy, J.A. Alaez, Eds., pp. 721-739, Computational Mechanics Publications, Elsevier Applied Science, 1992.
- [2] BERHAULT, C., "Surface libre non-linéaire 2D - Quelques calculs avec SINDBAD", Projet Eurêka EU 394, Lot 112, Rapport PRINCIPIA NET.35.128.02, 12 Janv. 1991.
- [3] DE JOUETTE, C., VIVIAND, H., WORNOM, S., LE GOUEZ, J.M., "Pseudo-compressibility Methods for Incompressible Flow Calculation", 4th Intern. Symp. on Computational Fluid Dynamics, University of California, Davis, Calif., Sept. 9-12, 1991.
- [4] DE JOUETTE, C., "A Numerical Method for Unsteady Wave Flows Around Submerged Obstacles", Seventh Intern. Workshop on Water Waves and Floating Bodies, DCN - Bassin d'Essais des Carènes, Val de Reuil, 24-27 May 1992.
- [5] ORLANSKI, I., "A Simple Boundary Condition for Unbounded Hyperbolic Flows", J. of Comput. Phys., Vol. 21, pp 251-269, 1976.
- [6] CHORIN, A. J., "A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems", J. of Comput. Phys., Vol. 2, pp 12-26, 1967.
- [7] YANENKO, N. N., "The Method of Fractional Steps", Springer-Verlag, 1971.
- [8] ROGERS, S.E., KWAK, D., "Upwind Differencing Scheme for the Time-Accurate Incompressible Navier-Stokes Equations", AIAA J., Vol. 28, No. 2, Feb. 1990.
- [9] BREUER, M., HANEL, D., "Solution of the 3-D, Incompressible Navier-Stokes Equations for the Simulation of Vortex Breakdown", Proceed. Eighth GAMM Conf. on Num. Meth. in Fluid Mech., pp 42-51, P. Wesseling, Ed., Vieweg, Braunschweig, 1990.
- [10] HSU, C.H., CHEN, Y.M., LIU, C.H., "Time-Marching Methods for Three-Dimensional Steady and Unsteady Viscous Incompressible Flows", AIAA-91-0024, 29th Aerospace Sciences Meeting, Reno, Jan. 7-10, 1991.
- [11] VIVIAND, H., "Systèmes Pseudo-Stationnaires pour le Calcul d'Écoulements Stationnaires de Fluides Parfaits", Publication ONERA 1983-4, 1983.
- [12] JAMESON, A. SCHMIDT, W., and TURKEL, E., "Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes", AIAA- 81-1259, AIAA 14th Fluid and Plasma Dyn. Conf., Palo Alto, Calif., June 23-25, 1981.
- [13] SWANSON, R.C., TURKEL, E., "A Multistage Time-Stepping Scheme for the Navier-Stokes Equations", AIAA Paper 85-0035, AIAA 23rd Aerosp. Sci. Meeting, Reno, Nevada, Jan. 14-17, 1985.
- [14] SWANSON, R.C., TURKEL, E., "Artificial Dissipation and Central Difference Schemes for the Euler and Navier-Stokes Equations", AIAA Paper 87-1107-CP, AIAA 8th Comput. Fluid Dyn. Conf., Honolulu, Hawaii, June 9-11, 1987.
- [15] MARTINELLI, L., JAMESON, A., "Validation of a Multigrid Method for the Reynolds Averaged Equations", AIAA Paper 88-0414, AIAA 25th Aerosp. Sci. Meeting, 1988.
- [16] VATSA, V.N., "Accurate Numerical Solutions for Transonic Viscous Flow over Finite Wings", J. of Aircraft, Vol. 24, No. 6, June 1987.
- [17] VATSA, V.N., WEDAN, B.W., "Development of an Efficient Multigrid Code for 3-D Navier-Stokes Equations", AIAA 89-1791, AIAA 20th Fluid Dyn., Plasma Dyn. and Lasers Conf., Buffalo, New York, June 12-14, 1989.
- [18] VIVIAND, H., VEUILLOT, J.P., "Méthodes Pseudo-Stationnaires pour le Calcul d'Écoulements Transsoniques", ONERA, Publication No. 1978-4, 1978.
- [19] CAMBIER, L., GHAZZI, W., VEUILLOT, J.P., VIVIAND, H., "A Multi-Domain Approach for the Computation of Viscous Transonic Flows by Unsteady Type Methods", in Computational Methods in Viscous Flows, Vol. 3, W.G. Habashi (Ed.), Pineridge Press, 1984.
- [20] MICHAUD, F., BARIL, H., "Étude de la Condition d'Orlanski pour la Simulation Numérique de la Houle", PRINCIPIA, Rapport de stage RET.25.231.01, 25 juin 1992.
- [21] LANDEL, E., PRUDHOMME, P., "Présentation des atténuateurs de houle et des résultats obtenus dans le cadre des deux premières années du projet Eurêka", Journées Génie Côtier, Nantes, Février 1992.

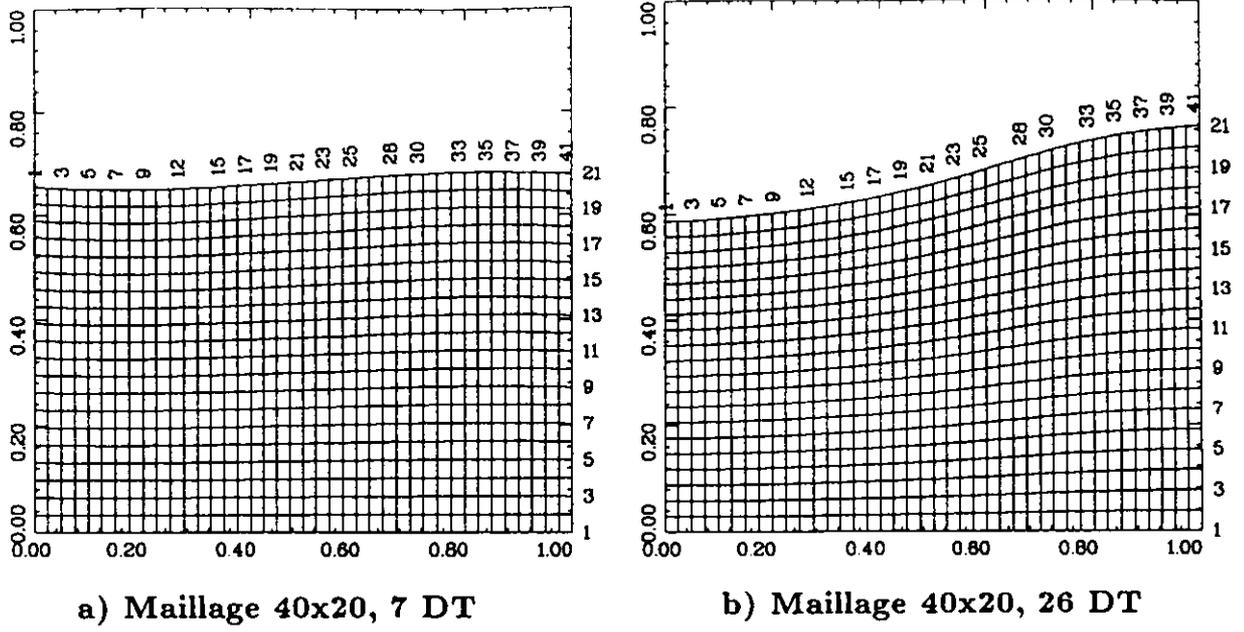


Figure 1 Maillage à deux instants - cuve sans plaque

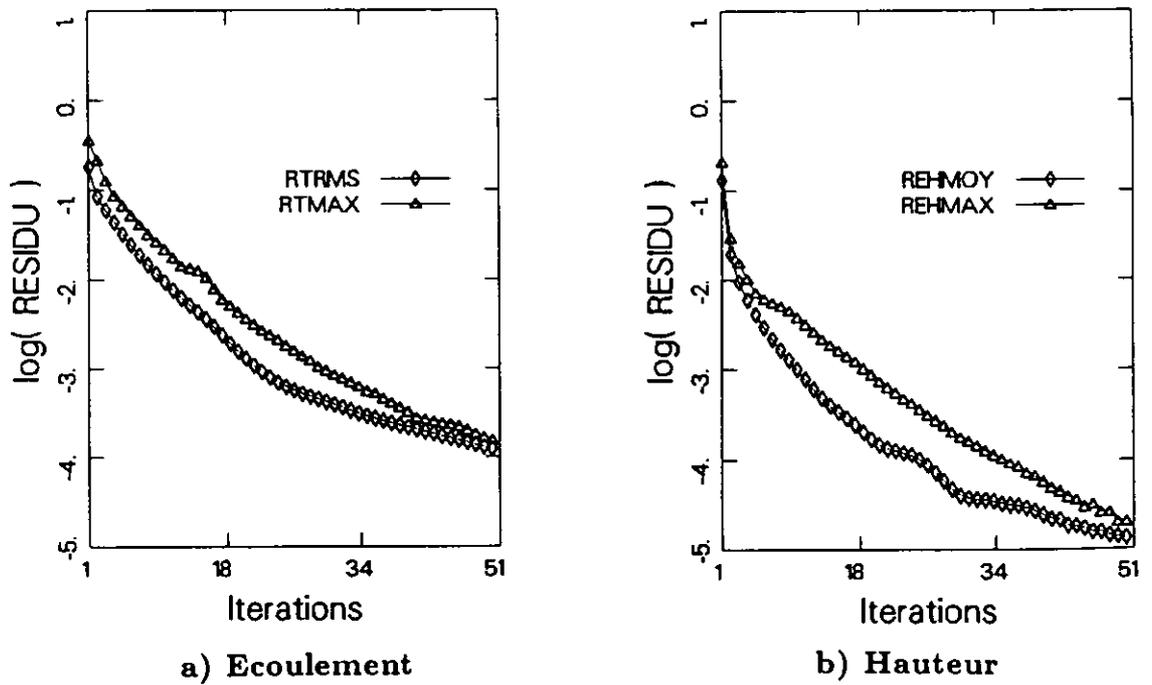
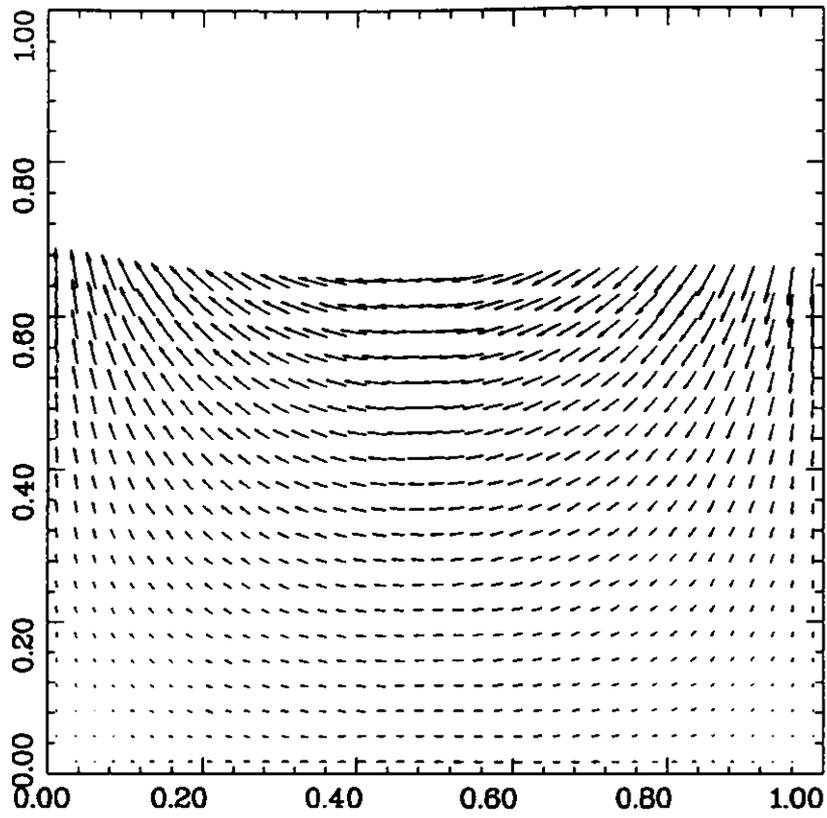
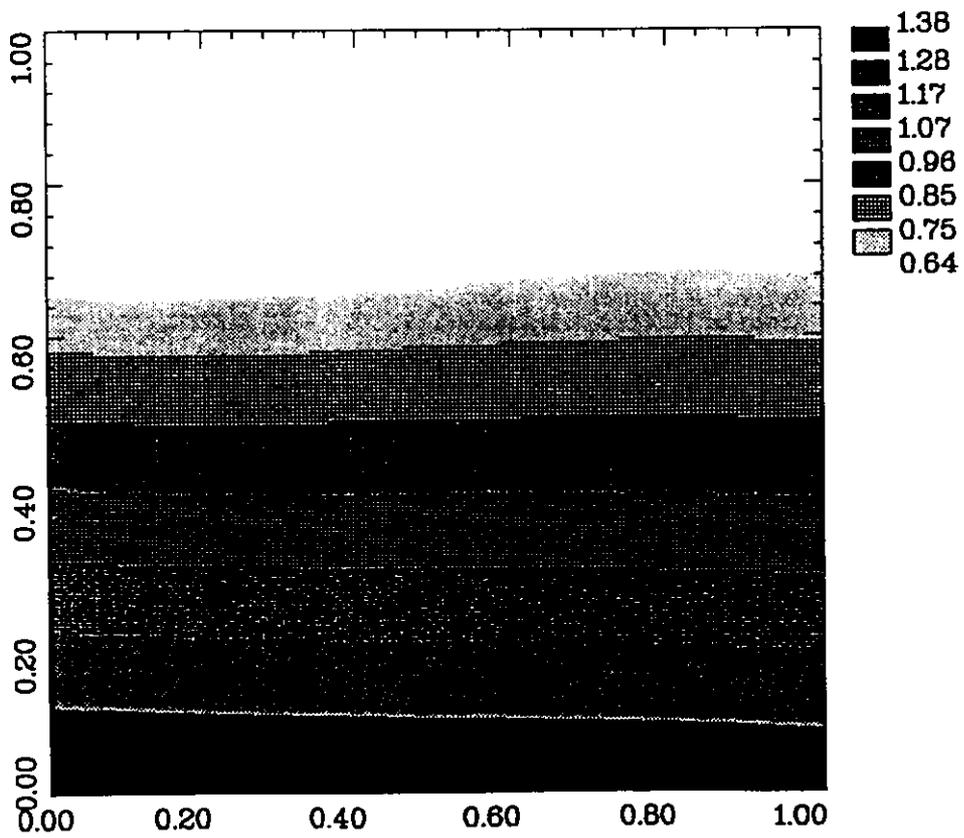


Figure 2 Courbes de convergence à 26 DT - cuve sans plaque

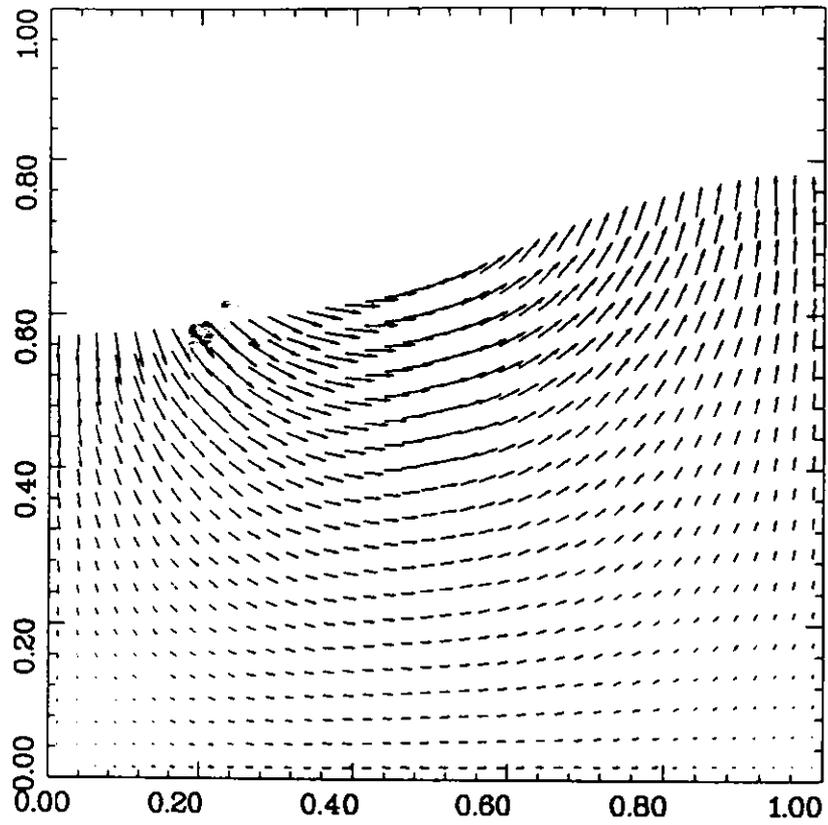


a) Champ de vitesse, 7 DT

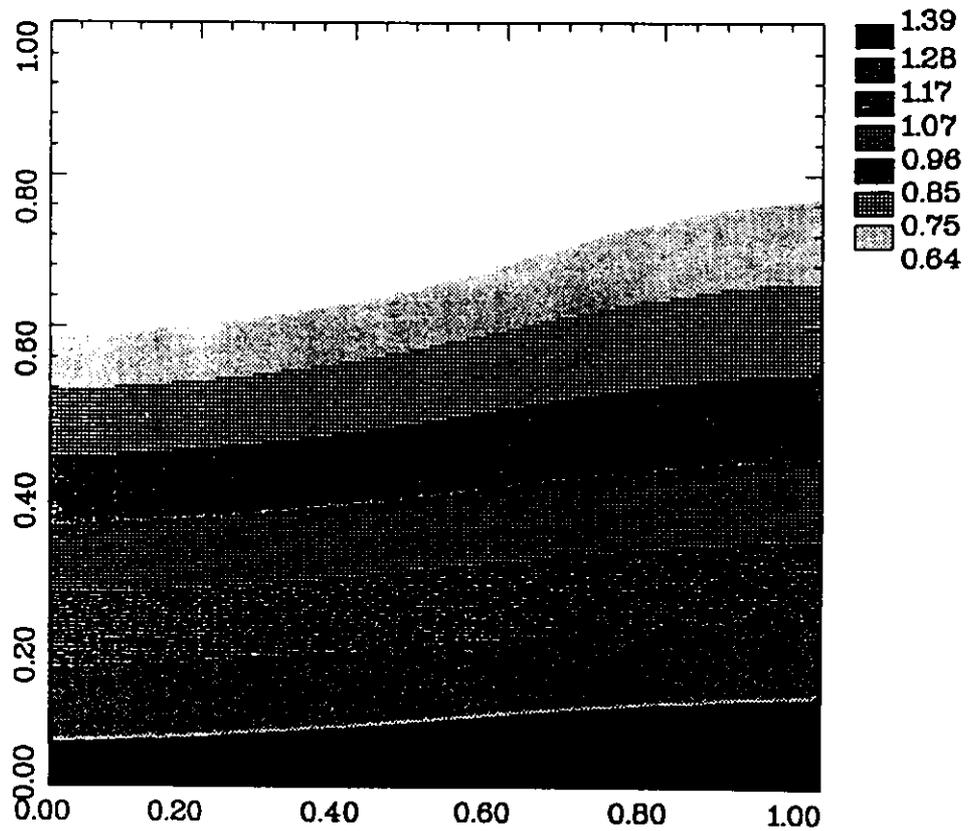


b) Pression, 7 DT

Figure 3 BALLOTEMENT DANS UNE CUVE SANS PLAQUE



a) Champ de vitesse, 26 DT



b) Pression, 26 DT

Figure 4 BALLOTEMENT DANS UNE CUVE SANS PLAQUE

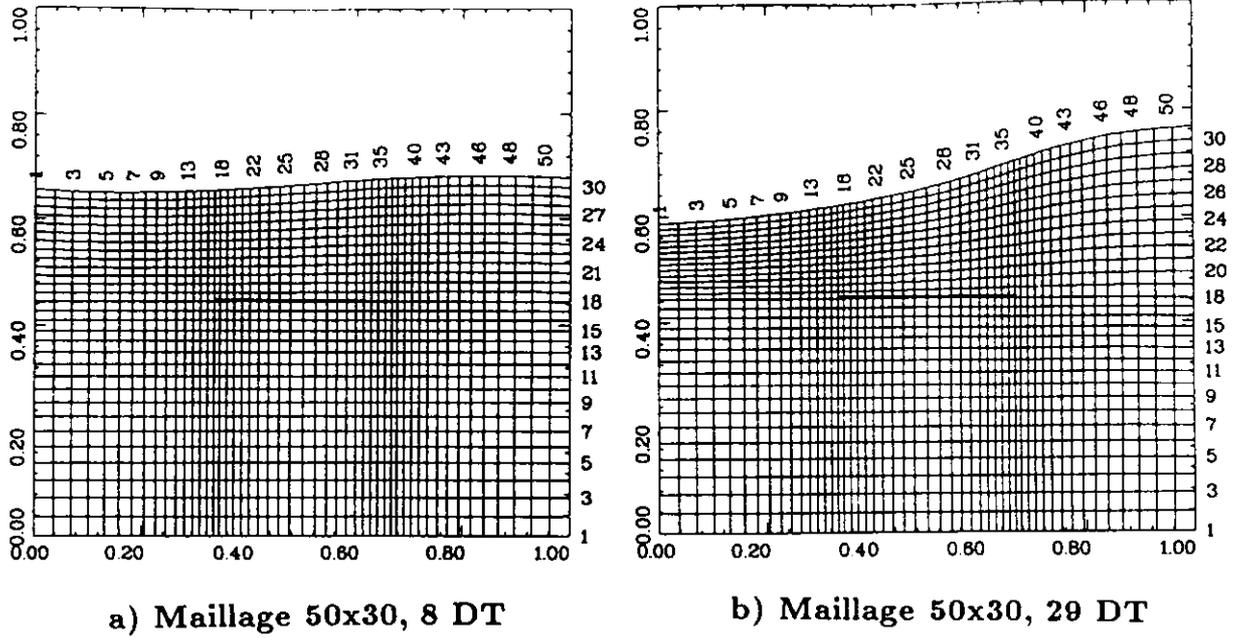


Figure 5 Maillage à deux instants - cuve avec plaque

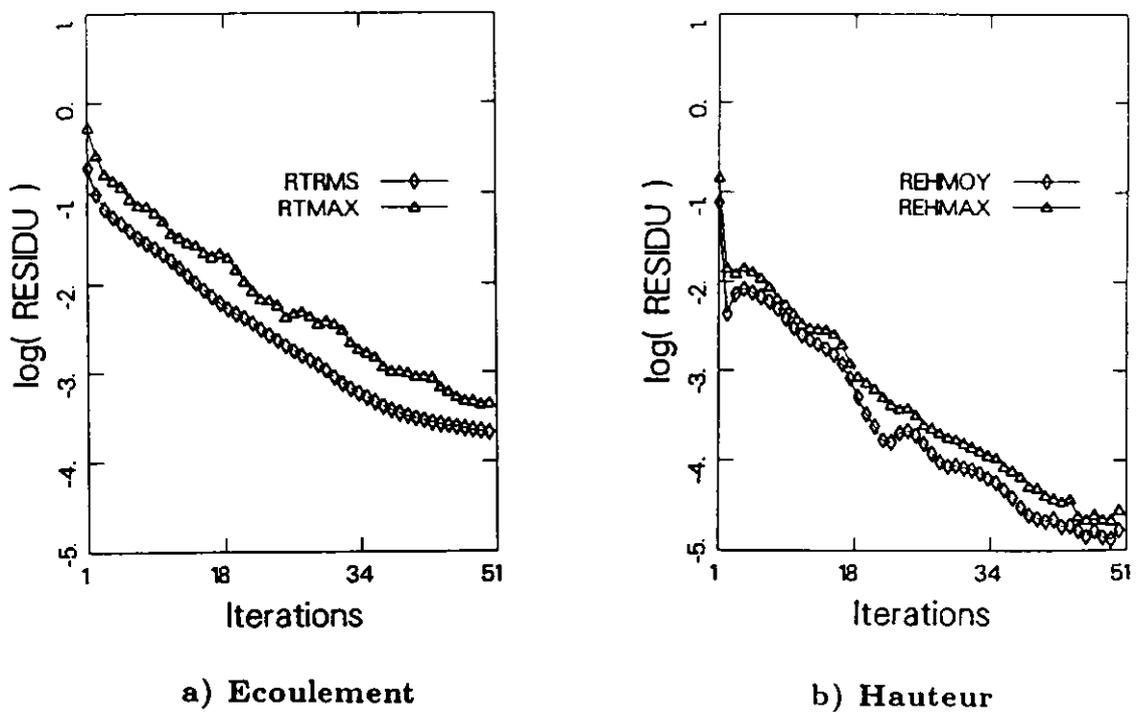
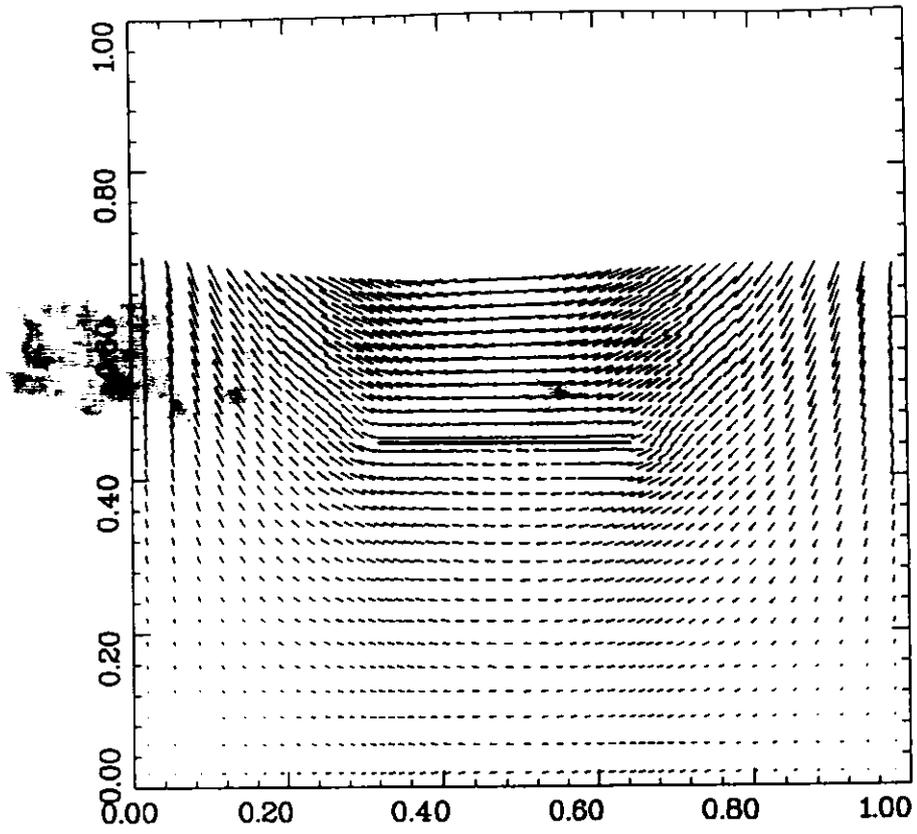
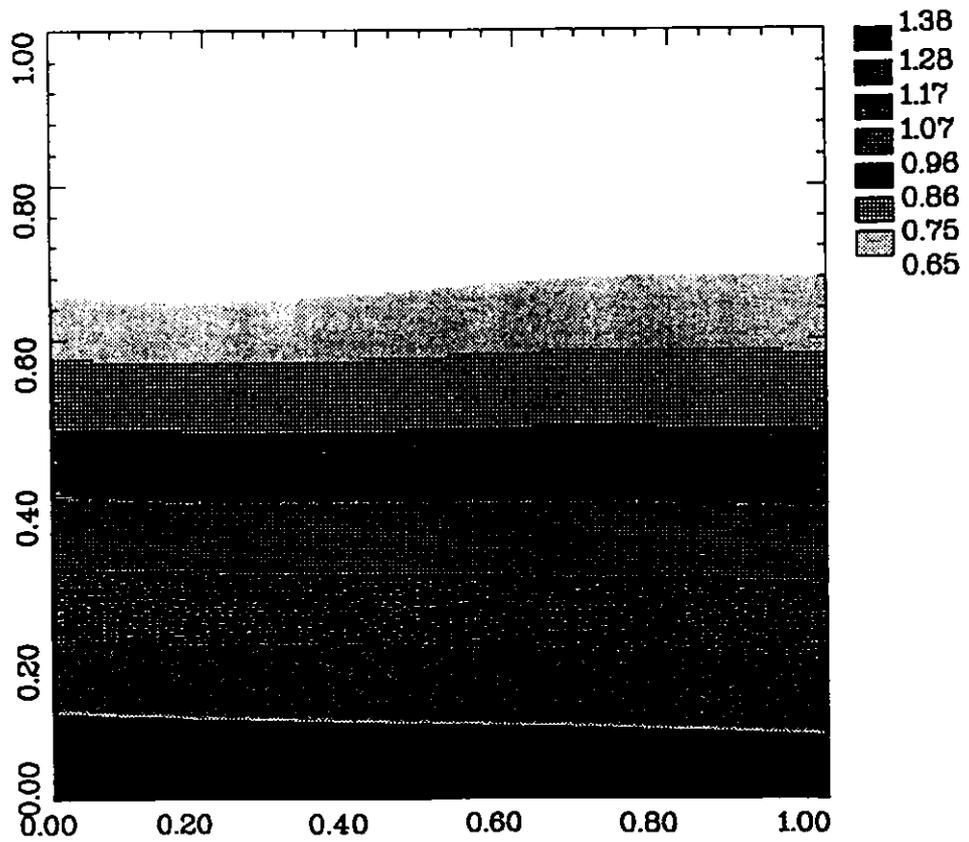


Figure 6 Courbes de convergence à 8 DT - cuve avec plaque



a) Champ de vitesse, 8 DT



b) Pression, 8 DT

Figure 7 BALLOTEMENT DANS UNE CUVE AVEC PLAQUE

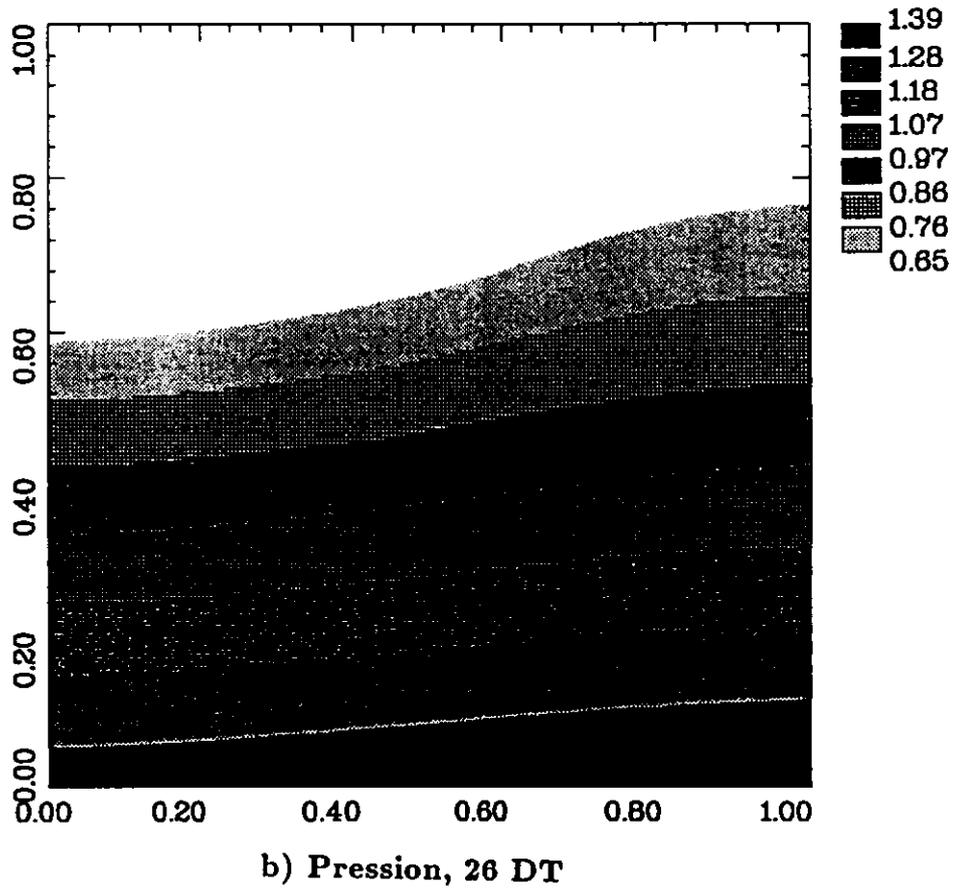
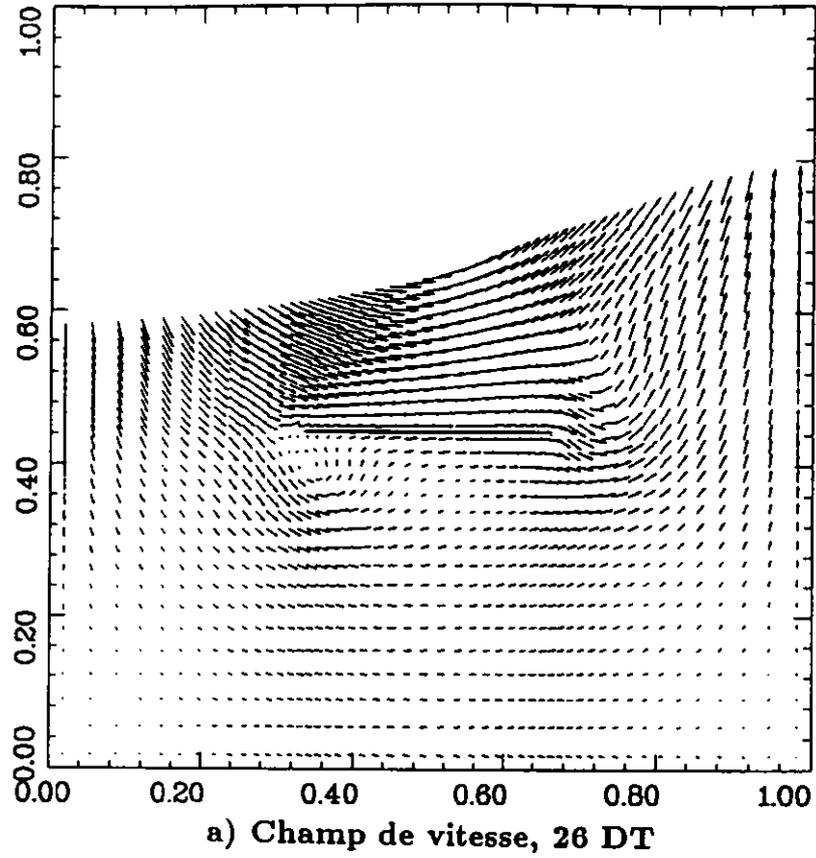


Figure 8 BALLOTEMENT DANS UNE CUVE AVEC PLAQUE