

**ETUDE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UN CORPS REMORQUE
PAR UN CABLE IMMERGE**

C.Jacquot - D.Marichal

Laboratoire d'hydrodynamique Navale-URA 1217 du C.N.R.S.
Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes
1 rue de la Noé 44072 Nantes cedex.

L'étude présentée consiste à étudier les mouvements d'un câble sous-marin et du corps qu'il remorque. Les équations du mouvement sont obtenues, pour le câble par les équations de Lagrange en fonction de paramètres indépendants, et pour le corps remorqué à partir du principe fondamental de la mécanique. Le corps remorqué est pris en compte dans les équations du câble par le calcul du travail virtuel de la force de liaison entre le corps et le câble. Les avantages de la nouvelle formulation sont un gain en temps de calcul et une détermination exacte de la force de remorquage. Nous présentons des résultats de déformées instationnaires de câbles, de mouvements de corps remorqués et de forces de remorquage.

This is a study about the motion of a submarine cable and about the body it tows. The calculation of the equations of the motion for the cable itself is based on Lagrangian's equations in relation to independant parameters and, for the towed body upon the fundamental principle of mechanics. The role of the towed body is taken into account in the equations related to the cable by calculating the virtual work of the linking force between the body and the cable. The advantages of the new formulation are a gain of time of computerized calculation and the accurate definition of the towage force. We provide some results about instationary distorted shapes for cables, about the motions of the towed bodies, and about the towage forces.

L'intérêt de l'étude du comportement dynamique d'un engin sous-marin remorqué par câble n'est plus à démontrer. Les applications sont nombreuses (cartographie sous-marine, sonar...). Le Laboratoire d'Hydrodynamique Navale de l'E.N.S.M. a mis au point ces dernières années des programmes de calcul permettant de déterminer les formes d'équilibre des câbles ou d'en déterminer les mouvements. L'étude en cours consiste en une amélioration des méthodes déjà mises en oeuvre de façon à en corriger certains défauts et en une prise en compte la plus complète possible du corps que peut remorquer le câble.

L'étude dynamique passe par l'écriture des équations complètes et non linéarisées des mouvements du câble et du "poisson" remorqué.

Jusqu'à présent nous utilisons un paramétrage des câbles par les coordonnées cartésiennes des noeuds issus de la discrétisation. La mise en équations lagrangienne du système nécessitait l'emploi de multiplicateurs et la vérification de la conservation de la longueur de chaque élément du câble discrétisé. Le système d'équations différentielles et non linéaires ainsi obtenues était résolu par une méthode de différence centrale permettant de déterminer l'état du système à un instant donné en fonction des valeurs des paramètres aux deux instants précédents. Pour être stable cette méthode nécessitait un pas de temps très petit (0.02s pour des problèmes pouvant s'étendre sur plusieurs heures de temps réel). Les fluctuations, pourtant très faibles, des longueurs des éléments induisaient des bruits très importants dans les tensions calculées. Le "poisson" remorqué était le plus souvent assimilé à un point matériel ou, s'il était nécessaire de mieux le décrire, on rencontrait une difficulté de simultanéité dans la résolution des équations du câble et du corps remorqué (on négligeait en fait un décalage d'un pas de temps).

Les limites et inconvénients que nous venons de signaler nous ont poussés à entreprendre une nouvelle étude pour :

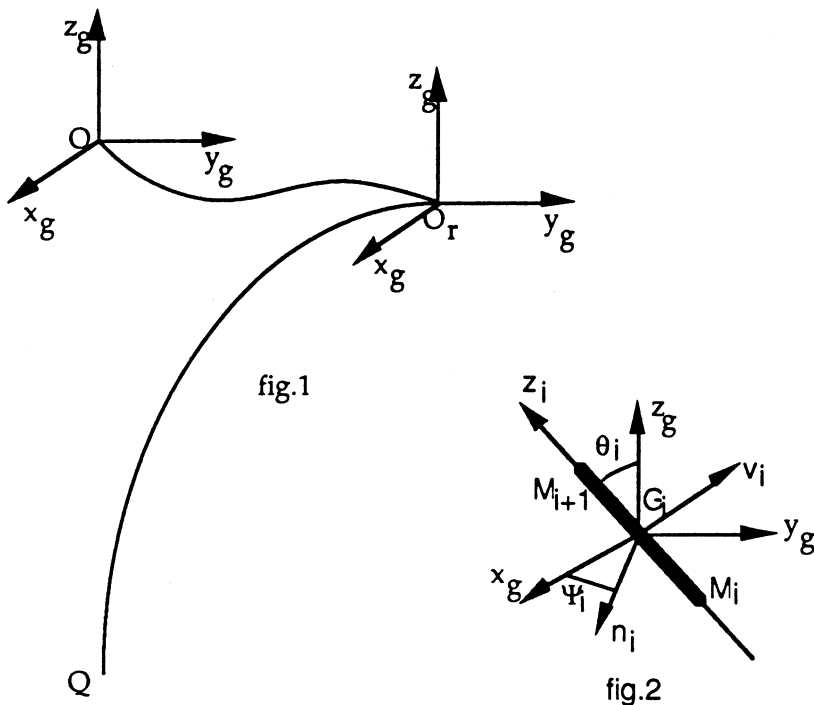
- améliorer les temps de calcul
- augmenter la précision du calcul des efforts de liaison du câble (avec le remorqueur ou le corps remorqué)
- pouvoir étudier de façon exacte le comportement dynamique du corps remorqué quelle que soit sa géométrie et les forces qu'on lui applique (gouvernes, hélices,...).

1 REPERES ET PARAMETRAGES

Soit R_g un repère galiléen de référence, d'origine O et de base (b_t) . Soit R_r un repère, lié au point de remorquage en translation par rapport à R_g . L'origine O_r du repère R_r est définie par ses coordonnées absolues x, y, z .

Le câble, dont l'extrémité remorquée est O_r , est discrétisé en n éléments rectilignes homogènes de longueur $2l$ et de masse $3m$. La liaison entre chaque élément est supposée parfaite.

A chaque élément T_i est lié un repère dont l'origine est le centre de masse G_i et la base (b_i) de vecteurs unitaires $\vec{n}_i, \vec{v}_i, \vec{z}_i$. On passe de la base (b_g) à la base (b_i) par deux rotations successives : Ψ_i autour de \vec{z}_g , on obtient la base (b_{u_i}) , puis θ_i autour de \vec{n}_i pour obtenir la base liée (b_i) .



Le vecteur rotation instantanée absolue de chaque élément sera donc défini par :

$$\vec{\Omega}_{g_i} = \Psi_i \cdot \vec{z}_g + \theta_i \cdot \vec{n}_i = \theta_i \cdot \vec{n}_i + \Psi_i \cdot \sin \theta_i \cdot \vec{v}_i + \Psi_i \cdot \cos \theta_i \cdot \vec{z}_i = \Omega_{n_i} \cdot \vec{n}_i + \Omega_{v_i} \cdot \vec{v}_i + \Omega_{z_i} \cdot \vec{z}_i$$

2 MISE EN EQUATIONS DU MOUVEMENT DU CABLE

Les équations du mouvement du câble sont obtenues par la méthode de Lagrange. La position du point de remorquage est paramétrée par ses 3 coordonnées absolues x, y, z , chaque élément du câble est ensuite paramétré par les deux angles, Ψ_i et θ_i . Nous obtenons ainsi $2n+3$ paramètres indépendants de position.

La méthode de Lagrange nécessite de calculer l'énergie cinétique du câble; son énergie potentielle, le travail virtuel des forces de liaison et celui des forces extérieures, (ne dérivant pas d'un potentiel). Les paramètres étant indépendants et les liaisons étant parfaites, le travail des forces de liaison, dans les déplacements virtuels compatibles est nul.

les équations de Lagrange se présentent alors sous la forme générale suivante :

$$\frac{d(\delta E_c(c/R_g))}{dt(\delta \dot{q}_i)} - \frac{\delta E_c(c/R_g)}{\delta q_i} + \frac{\delta E_p(c)}{\delta q_i} = D_{2,i}$$

où $D_{2,i} \delta q_i$ est le travail virtuel des forces données ne dérivant pas d'un potentiel.

2.1/ Calcul de l'énergie cinétique du câble

Calculons l'énergie cinétique d'un élément :

$$2E_c(T_i/R_g) = 2E_c(T_i/R_g G) + 3mV_{gt_i}^2(G_i)$$

$$E_c(T_i/R_g) = \frac{1}{2} m l^2 \cdot (\dot{\theta}_i^2 + \dot{\Psi}_i^2 \sin^2 \theta_i)$$

$$\vec{V}_{gl_i}(\vec{G}_i) = \dot{x}_g \vec{x} + \dot{y}_g \vec{y} + \dot{z}_g \vec{z} + \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^i 2l_j \vec{z}_j - l_i \vec{z}_i \right)$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{gl_i} &= \dot{x}_g (\dot{x} - l_i (\dot{\theta}_i \cos \theta_i \sin \Psi_i + \dot{\Psi}_i \sin \theta_i \cos \Psi_i)) + 2 \sum_{j=1}^i l_j (\dot{\theta}_j \cos \theta_j \sin \Psi_j + \dot{\Psi}_j \sin \theta_j \cos \Psi_j) \\ &+ \dot{y}_g (\dot{y} - l_i (-\dot{\theta}_i \cos \theta_i \cos \Psi_i + \dot{\Psi}_i \sin \theta_i \sin \Psi_i)) - 2 \sum_{j=1}^i l_j (\dot{\theta}_j \cos \theta_j \cos \Psi_j - \dot{\Psi}_j \sin \theta_j \sin \Psi_j) \\ &+ \dot{z}_g (\dot{z} + l_i \dot{\theta}_i \sin \theta_i - 2 \sum_{j=1}^i l_j \dot{\theta}_j \sin \theta_j) \end{aligned}$$

On posera :

$$a_i = l_i (\theta_i \cos \theta_i \sin \Psi_i + \Psi_i \sin \theta_i \cos \Psi_i)$$

$$b_i = l_i (-\theta_i \cos \theta_i \cos \Psi_i + \Psi_i \sin \theta_i \sin \Psi_i)$$

$$c_i = -l_i \theta_i \sin \theta_i$$

$$X_i = x - a_i \quad Y_i = y - b_i \quad Z_i = z - c_i$$

$$\dot{X}_i = 2 \sum_{j=1}^i \dot{a}_j \quad \dot{Y}_i = 2 \sum_{j=1}^i \dot{b}_j \quad \dot{Z}_i = 2 \sum_{j=1}^i \dot{c}_j$$

la vitesse absolue du centre de masse d'un élément devient ainsi :

$$(\vec{V}_{gl_i}(\vec{G}_i))^2 = (X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2) + (\dot{X}_i^2 + \dot{Y}_i^2 + \dot{Z}_i^2) + 2(X_i \dot{X}_i + Y_i \dot{Y}_i + Z_i \dot{Z}_i)$$

et son énergie cinétique :

$$E_c(T_i/R_g) = \frac{1}{2} m l_i^2 (\dot{\theta}_i^2 + \dot{\Psi}_i^2 \sin^2 \theta_i) + \frac{3}{2} m ((X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2) + (\dot{X}_i^2 + \dot{Y}_i^2 + \dot{Z}_i^2) + 2(X_i \dot{X}_i + Y_i \dot{Y}_i + Z_i \dot{Z}_i))$$

$$\text{d'où pour le câble : } E_c(C/R_g) = \sum_{k=1}^n (E_c(T_k/R_g))$$

2.2/ Calcul de l'énergie potentielle du câble

$$\text{Pour un élément } i : E_p(C) = 3mgz(G_i) + c^{te} \text{ avec } z(G_i) = \sum_{k=1}^i 2l_k \vec{z}_k - l_i \vec{z}_g + z$$

$$\text{Pour le câble : } E_p(C) = \sum_{k=1}^n (E_p(T_k)) = 3m.n.g.z + 3m.g.l \sum_{k=1}^n (-\cos \theta_k + 2 \sum_{j=1}^k \cos \theta_j)$$

2.3/ Bilan des forces extérieures

Le câble est soumis à deux types de forces :

- la force de remorquage appliquée au point O_T et la force exercée par un corps remorqué ou tout autre force appliquée de manière discrète en des points quelconques du câble.

- les forces dues à l'action du fluide sur le câble :

Ces forces sont supposées agir sur chaque élément en leur centre de masse. On supposera également que le fluide est au repos dans R_g .

Les forces d'origine hydrodynamique peuvent être décomposées en :

- une force hydrodynamique instationnaire due aux accélérations et au couplage des vitesses de translation et de rotation de chaque élément. On suppose les coefficients de "masse ajoutée" constants. Ils sont calculés dans le cas d'écoulements potentiels. Dans le cas d'éléments cylindriques (de faible

section) la matrice associée au tenseur des "masses ajoutées" ne possède que 4 termes non nuls : m_{nn} , m_{vv} , $m_{\theta\theta}$ et $m_{\Psi\Psi}$ dans la base liée.

- une traînée de pression normale à chaque élément
- une traînée de frottement tangentielle à chaque élément

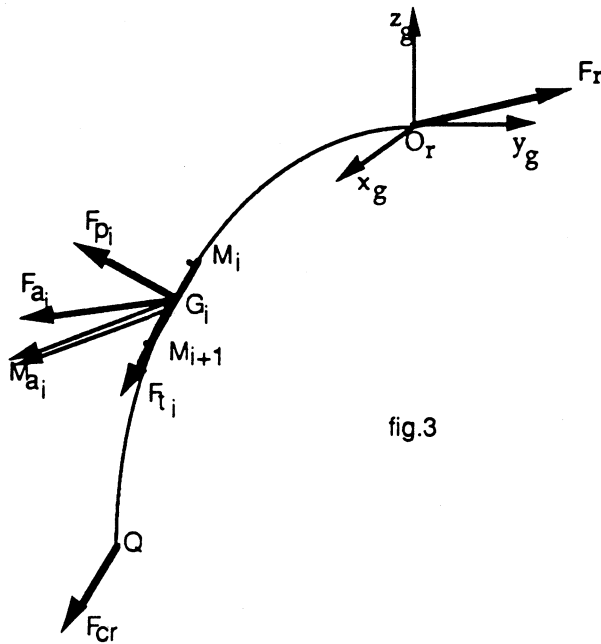


fig.3

2.4/ Travail virtuel des forces extérieures pour l'élément i

Le travail d'un torseur, de résultante \vec{F} appliquée au centre de masse G_i et de moment \vec{M} , est, compte tenu des paramètres choisis :

$$W = \vec{F} \cdot \delta \vec{G}_i + \vec{M} \cdot \delta \vec{\alpha}_i \quad \text{où } \delta \vec{\alpha}_i = \vec{\Omega}_{gt_i} \delta t$$

on obtient :

$$\begin{aligned} W = & \delta x \cdot (F_{n_i} \cos \Psi_i - F_{v_i} \cos \theta_i \sin \Psi_i + F_{z_i} \sin \theta_i \sin \Psi_i) \\ & + \delta y \cdot (F_{n_i} \sin \Psi_i + F_{v_i} \cos \theta_i \cos \Psi_i - F_{z_i} \sin \theta_i \cos \Psi_i) \\ & + \delta z \cdot (F_{v_i} \sin \theta_i + F_{z_i} \cos \theta_i) + \delta \theta_i \cdot (M_{n_i} + l \cdot F_{v_i}) + \delta \Psi_i \cdot (M_{v_i} - l \cdot F_{n_i}) \sin \theta_i \\ & + \sum_{k=1}^i 2l \cdot (-\cos \theta_k \sin(\Psi_i - \Psi_k) \cdot F_{n_i} - (\sin \theta_i \sin \theta_k + \cos \theta_i \cos \theta_k \cos(\Psi_i - \Psi_k)) \cdot F_{v_i} \\ & \quad + (-\cos \theta_i \sin \theta_k + \sin \theta_i \cos \theta_k \cos(\Psi_i - \Psi_k)) \cdot F_{z_i}) \cdot \delta \theta_k \\ & + \sum_{k=1}^i 2l \cdot (\sin \theta_k \cos(\Psi_i - \Psi_k) \cdot F_{n_i} + \sin \theta_k \cos \theta_i \sin(\Psi_k - \Psi_i) \cdot F_{v_i} + \sin \theta_i \sin \theta_k \sin(\Psi_i - \Psi_k) \cdot F_{z_i}) \delta \Psi_k \end{aligned}$$

2.41 / travail de la traînée de pression sur le câble

La traînée de pression sur chaque élément du câble est une force normale à l'axe de l'élément et agit au centre de masse G_i .

$$\vec{F}_{p_i} = F_{pn_i} \cdot \vec{n}_i + F_{pv_i} \cdot \vec{v}_i \quad \text{où } F_{pn_i} = -\frac{1}{2} \rho \cdot D \cdot 2l C_D V_{n_i} \cdot |V_{N_i}| \quad \text{et } F_{pv_i} = -\frac{1}{2} \rho \cdot D \cdot 2l C_D V_{v_i} \cdot |V_{N_i}|$$

$$V_{n_i} = \vec{V}_{gt_i}(G_i) \cdot \vec{n}_i \quad V_{v_i} = \vec{V}_{gt_i}(G_i) \cdot \vec{v}_i \quad |V_{N_i}| = \sqrt{V_{n_i}^2 + V_{v_i}^2}$$

D est le diamètre du câble et C_D est le coefficient de traînée supposé constant sur toute la longueur du câble.

Des études en cours montrent que le coefficient de traînée normale C_d peut varier de manière significative à cause des mouvements de vibrations engendrés par les lachers de tourbillons. Cependant, dans cette étude nous prendrons un coefficient de traînée C_d constant compris entre 1.7 et 1.9 (valeurs moyennes maintenant admises pour les câbles de remorquage). Le travail virtuel de cette force de traînée de pression sera pour le câble:

$$W_{F_p} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_{p_k} \cdot \vec{\delta G}_k$$

2.42 / Travail virtuel des forces d'inertie sur le câble

Comme pour la traînée de pression les éléments de réduction du torseur de ces efforts sur un élément de câble sont décomposés sur la base liée à chaque élément :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{A_{n_i}} &= -m_i \cdot \vec{V}_{g_{t_i}} \cdot (G) \cdot \vec{n}_i + m_i \cdot \vec{\Omega}_{b_i} \cdot \vec{V}_{z_i} & \vec{M}_{A_{n_i}} &= -m_i \cdot (\vec{\Omega}_{g_{t_i}}) \cdot \vec{n}_i + m_i \cdot \vec{V}_{v_i} \cdot \vec{V}_{z_i} \\ \vec{F}_{A_{v_i}} &= -m_i \cdot \vec{V}_{g_{t_i}} \cdot (G) \cdot \vec{v}_i - m_i \cdot \vec{\Omega}_{n_i} \cdot \vec{V}_{z_i} & \vec{M}_{A_{v_i}} &= -m_i \cdot (\vec{\Omega}_{g_{t_i}}) \cdot \vec{v}_i - m_i \cdot \vec{V}_{n_i} \cdot \vec{V}_{z_i} \\ \vec{F}_{A_{z_i}} &= -m_i \cdot (\vec{V}_{v_i} \cdot \vec{\Omega}_{n_i} - \vec{V}_{n_i} \cdot \vec{\Omega}_{v_i}) & \vec{M}_{A_{z_i}} &= 0 \end{aligned}$$

2.43 / Travail virtuel de la traînée de frottement

Les efforts tangentiels sont faibles et on peut les supposer constants le long du câble suivant les hypothèses de Landweber. Pour chaque élément on a : $F_{t_i} = .5 \cdot \epsilon \cdot f \cdot 2l \cdot \rho \cdot D \cdot C_d \cdot v_i^2$ où f est un coefficient constant, et pour le câble :

$$W_{F_t} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_{t_k} \cdot \vec{\delta G}_k$$

2.44 / Travail de la force de remorquage

Le travail virtuel de cette force est :

$$W_{F_R} = \vec{F}_R \cdot \vec{\delta O}_r \quad \text{où } \vec{\delta O}_r = \delta x \cdot \vec{x}_g + \delta y \cdot \vec{y}_g + \delta z \cdot \vec{z}_g$$

$$\text{et } \vec{F}_R = F_{R_x} \cdot \vec{x}_g + F_{R_y} \cdot \vec{y}_g + F_{R_z} \cdot \vec{z}_g \quad \text{on obtient donc : } W_{F_R} = F_{R_x} \cdot \delta x + F_{R_y} \cdot \delta y + F_{R_z} \cdot \delta z$$

3° MISE EN FORME DES EQUATIONS DE LAGRANGE

Les différentes quantités scalaires intervenant dans les équations de Lagrange ayant été calculées reprenons l'expression générale de ces équations

$$\frac{d(\delta E_c(c/R_g))}{dt(\delta \dot{q}_i)} - \frac{\delta E_c(c/R_g)}{\delta q_i} + \frac{\delta E_p(C)}{\delta q_i} = D_{2,i} \quad \text{pour } i \text{ appartenant à l'intervalle } 1, 2n+3.$$

Nous gardons dans les membres de gauche de ces équations les termes en

$\frac{d}{dt}(\frac{dq_i}{dt})$ et nous passons à droite tous les autres termes. Nous obtenons ainsi $2n+3$ équations qui peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{vmatrix} A_{ij}(q) & B_{ij}(q) & E(q) & F(q) & G(q) \\ C_{ij}(q) & D_{ij}(q) & H(q) & I(q) & J(q) \\ K(q) & L(q) & M(q) & N(q) & P(q) \\ Q(q) & R(q) & S(q) & T(q) & U(q) \\ V(q) & W(q) & X(q) & Y(q) & Z(q) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta_i \\ \Psi_i \\ x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} SMT_i(q, q_i, q_j, q^2) \\ SMP_i(q, q_i, q_j, q^2) \\ SMX(q, q_i, q_j, q^2) \\ SMY(q, q_i, q_j, q^2) \\ SMZ(q, q_i, q_j, q^2) \end{vmatrix}$$

Suivant les problèmes à traiter les inconnues à l'extrémité de remorquage du câble seront

- soit les paramètres de position x, y, z
- soit les composantes de la force de remorquage FR_x, FR_y, FR_z .

Nous avons traité des cas où le mouvement du point O_r était imposé Il faut donc faire passer dans les trois dernières équations de Lagrange les composantes de la force FR qui sont inconnues et transférer les termes imposés en \ddot{x}, \ddot{y} , et \ddot{z} dans les seconds membres

Nous obtenons la forme matricielle suivante :

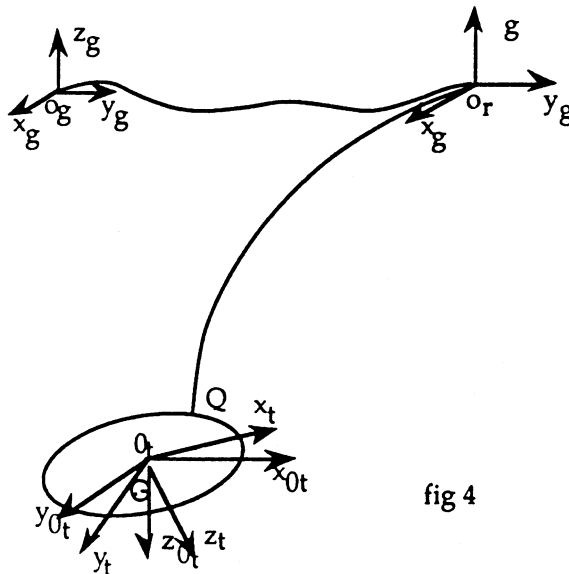
$$\begin{vmatrix} A_{ij}(q) & B_{ij}(q) & 0 & 0 & 0 \\ C_{ij}(q) & D_{ij}(q) & 0 & 0 & 0 \\ \hline K(q) & L(q) & 1 & 0 & 0 \\ Q(q) & R(q) & 0 & 1 & 0 \\ V(q) & W(q) & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta_i \\ \Psi_i \\ \hline FR_x \\ FR_y \\ FR_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} SMT_i(q, q_i, q_j, q^2) \\ SMP_i(q, q_i, q_j, q^2) \\ \hline SMX(q, q_i, q_j, q^2) \\ SMY(q, q_i, q_j, q^2) \\ SMZ(q, q_i, q_j, q^2) \end{vmatrix}$$

Les $2n$ premières équations étant découplées des 3 dernières, elles peuvent être résolues séparément.

4 INTRODUCTION D'UN CORPS REMORQUE

La présence d'un corps remorqué (CR) par l'extrémité Q du câble (C) nécessite d'écrire les équations générales du mouvement de ce corps et de "lier" ces équations aux $2n+3$ équations de Lagrange déjà écrites pour le câble.

On supposera que la liaison entre le câble (C) et (CR) est parfaite. On associe à (CR) un repère principal d'inertie de centre O_p et de base (b_t) : (x_t, y_t, z_t) .



Le corps (CR) sera paramétré par les 3 coordonnées absolues de O_t et par 3 angles de rotations définis comme suit suivant les habitudes des "gens de la mer":

$$\vec{x}_{0_t}, \vec{y}_{0_t}, \vec{z}_{0_t} \longrightarrow \vec{x}_{1_t}, \vec{y}_{1_t}, \vec{z}_{0_t} \text{ par } \Psi/z_0 \quad (\text{lacet})$$

$$\vec{x}_{1_t}, \vec{y}_{1_t}, \vec{z}_{0_t} \longrightarrow \vec{x}_{2_t}, \vec{y}_{1_t}, \vec{z}_{2_t} \text{ par } \theta/y_1 \quad (\text{tangage})$$

$$\vec{x}_{2_t}, \vec{y}_{1_t}, \vec{z}_{2_t} \longrightarrow \vec{x}_{t_t}, \vec{y}_{t_t}, \vec{z}_{t_t} \text{ par } \phi/x_2 \quad (\text{roulis})$$

Soit $\vec{\Omega}_{gc} = p.\vec{x}_t + q.\vec{y}_t + r.\vec{z}_t$ le vecteur rotation instantanée absolue de (CR) où

$$p = \dot{\phi} - \Psi.\sin\theta, \quad q = \Psi.\sin\dot{\theta} + \dot{\theta}.\cos\phi, \quad r = \Psi.\cos\dot{\phi} + \dot{\theta}.\sin\phi$$

Les 6 équations scalaires qui définissent le mouvement de (CR) sont obtenues par application du principe fondamental de la mécanique :

La projection, sur la base liée à (CR) des relations vectorielles donnent les 6 équations du mouvement :

$$X = m_{cr}(u + qw - rv - x_G(q^2 + r^2) + y_G(pq - \dot{r}) + z_G(rp + \dot{q}))$$

$$Y = m_{cr}(\dot{v} + ru - pw - y_G(r^2 + p^2) + z_G(qr - p) + x_G(pq + \dot{r}))$$

$$Z = m_{cr}(\dot{w} + pv - qu - z_G(p^2 + q^2) + x_G(rp - \dot{q}) + y_G(qr + p))$$

$$K = pI_x + qr(I_z - I_y) + m_{cr}(y_G(\dot{w} + pv - qu) - z_G(\dot{v} + ru - pw) + x_G y_G(pr - \dot{q}) - x_G z_G(pq + \dot{r}) + y_G z_G(r^2 - q^2))$$

$$M = qI_y + rp(I_x - I_z) + m_{cr}(z_G(\dot{u} + qw - rv) - x_G(\dot{w} + pv - qu) + y_G z_G(pq - \dot{r}) - y_G x_G(qr + p) + z_G x_G(p^2 - r^2))$$

$$N = rI_z + pq(I_y - I_x) + m_{cr}(x_G(\dot{v} + ru - pw) - y_G(\dot{u} + qw - rv) + z_G x_G(qr - p) - z_G y_G(rp + \dot{q}) + x_G y_G(q^2 - p^2))$$

La liaison en Q impose 3 relations scalaires entre les 6 paramètres primitifs de (CR). Nous garderons les 3 paramètres angulaires comme paramètres indépendants. Il faut ajouter aux inconnues de positions les 3 composantes de la force F_L de liaison. Le torseur des actions extérieures sur (CR) peut être décomposé en un torseur des actions du fluide et un torseur des actions de liaison au point Q. Le premier torseur s'exprime en fonctions des caractéristiques géométriques du corps, de ses coefficients hydrodynamiques et de ses paramètres de position.

Nous disposons donc pour l'ensemble du système de $2n+9$ équations à $2n+3$ inconnues de position auxquelles on doit ajouter les 3 composantes de la force de remorquage de l'ensemble et les 3 composantes de la force de liaison entre le câble et le corps remorqué.

Il est possible d'éliminer les composantes de la force de liaison ce qui revient à diminuer de 3 l'ordre du système d'équations à résoudre. Pour ce faire les 3 composantes X_{LT} , Y_{LT} , Z_{LT} dans le repère R_t , de cette force sont tirées des 3 premières équations du mouvement de (CR)

$$X_{LT} = X_{fluide} - m_{cr} \cdot \vec{\gamma}_{gt}(G) \cdot \vec{x}_t$$

$$Y_{LT} = Y_{fluide} - m_{cr} \cdot \vec{\gamma}_{gt}(G) \cdot \vec{y}_t$$

$$Z_{LT} = Z_{fluide} - m_{cr} \cdot \vec{\gamma}_{gt}(G) \cdot \vec{z}_t$$

et sont reportées dans les 3 équations de moment de (CR) qui deviennent

$$K_{fluide} - y_G Z_{fluide} + z_G Y_{fluide} = I_x \dot{p} + (I_z - I_y)qr + m_{cr}(y_G(\dot{w} + pv - qu) - z_G(\dot{v} + ru - pw) + x_G y_G(pr - \dot{q}) - x_G z_G(pq + \dot{r}) + y_G z_G(r^2 - q^2))$$

$$M_{fluide} - z_G X_{fluide} + x_G Z_{fluide} = I_y \dot{q} + (I_x - I_z)rp + m_{cr}(z_G(\dot{u} + qw - rv)$$

$$-x_g(\dot{w}+pv-qu)+y_gz_g(pq-\dot{r})-y_gx_g(qr+\dot{p})+z_gx_g(p^2-r^2) \\ N_{\text{fluide}}-x_q Y_{\text{fluide}}+y_q Z_{\text{fluide}} = I_z \dot{r}+(I_y-I_x)pq+m_{cr}(x_g(\dot{v}+ru-pw) \\ -y_g(\dot{w}+qw-rv)+z_gx_g(rq-\dot{p})-z_gy_g(rp+\dot{q})+x_gy_g(q^2-p^2))$$

Elles sont enfin introduites dans les équations de Lagrange du câble par le calcul de leur travail virtuel dans les déplacements compatibles.

Les efforts exercés par le fluide sur le corps remorqué sont encore de différentes natures :

- forces de traînée
- forces d'inertie ajoutée
- forces de portance

Ils s'expriment de manière classique à l'aide de coefficients hydrodynamiques qui peuvent être déterminés soit :

- par des calculs analytiques
- par des modélisations numériques
- par des méthodes expérimentales

Pour tirer le maximum de profit de la méthode que nous proposons il sera nécessaire de faire une synthèse de ces méthodes.

5 EXEMPLES :

Pour résoudre le système matriciel nous avons utilisé une méthode de Runge-Kutta 4ème Ordre.

5.1/ Le programme a d'abord été testé sur un problème bidimensionnel. Un corps sous marin schématisé par deux sphères reliées entre elles par une tige de masse et de section négligeable est remorqué par un câble infiniment souple. Deux lois horaires du point de remorquage ont été étudiées :

- système au repos à l'instant initial, mise en vitesse horizontale de 0 à 2m/s en 15s puis vitesse constante.
- mêmes conditions avec introduction à $t = 15s$ d'un mouvement vertical sinusoïdal du point de remorquage (amplitude = 1m, période = 10s).

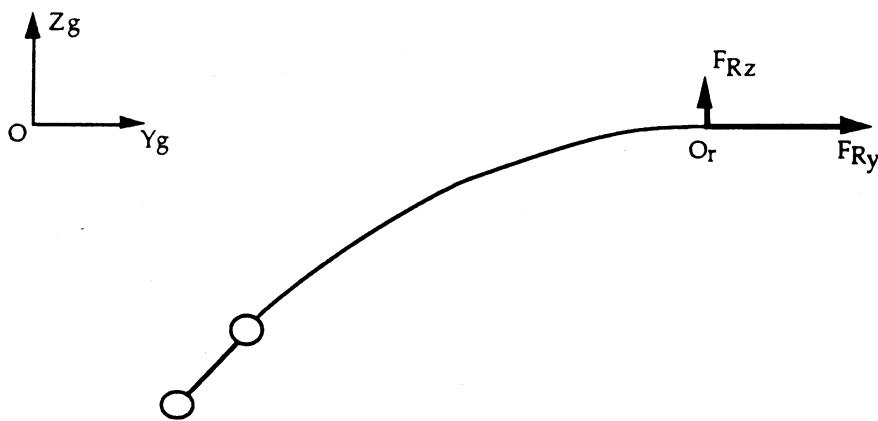


fig 5

Caractéristiques du câble :

- 5 éléments
- $l = 10m$
- m unitaire = $1.5kg/m$
- diamètre = $0.019m$
- $C_d = 1,8$

caractéristiques des sphères :

- poids apparents nuls
- rayon : $0.25m$
- distance entre sphères : $1.5m$

Les figures (6) et (7) montrent la trajectoire des extrémités du câble et du centre de masse de la seconde sphère pour les 2 lois de vitesse imposées au point de remorquage.

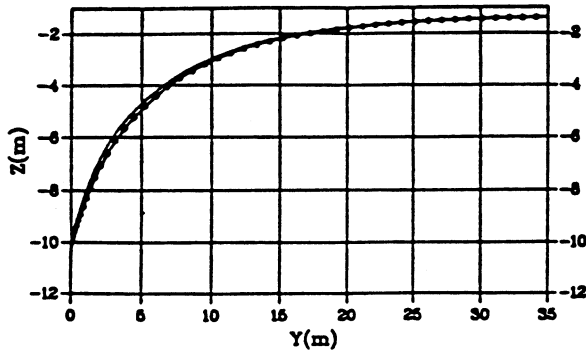


fig 6

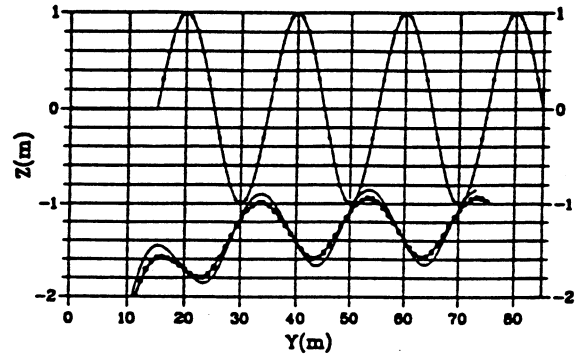


fig7

Les figures (8) et (9) montrent les variations des composantes de la force de remorquage pour les 2 lois précitées.

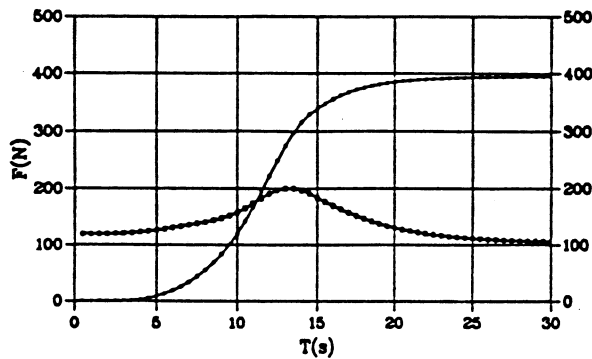


fig 8

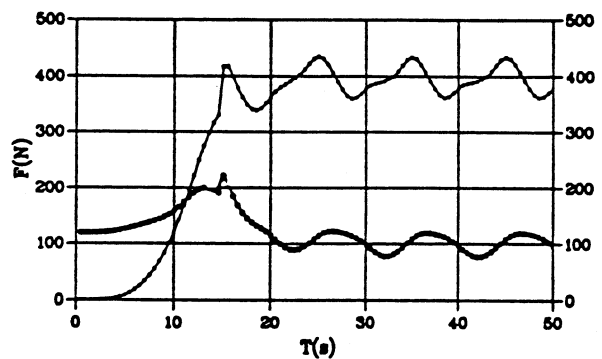


fig 9

5.2/ Exemple tridimensionnel

Le corps remorqué est une sphère homogène. La liaison entre le câble et la sphère se fait en un point Q de la surface de la sphère. A l'instant initial le système est au repos, câble vertical, O, Q, O_t sont alignés. La première phase du mouvement est une accélération rectiligne du point O_r de remorquage qui permet d'atteindre la vitesse de 1,57m/s en 15 secondes. La deuxième phase est un mouvement de giration (de rayon 7.5m) à vitesse uniforme.

Caractéristiques du câble :

- 10 éléments
- $l = 15\text{m}$
- masse linéique = 0.14kg/m
- diamètre = 0.010m
- $C_d = 1.9$

Caractéristique de la sphère :

- masse = 3kg
- rayon = 0.05m
- $C_d = 0.5$

- Les courbes suivantes visualisent :
- la projection dans le plan horizontal du mouvement des deux extrémités du câble.
 - la cote verticale de l'extrémité inférieure du câble en fonction du temps
 - l'évolution au cours du temps des paramètres angulaires de la sphère

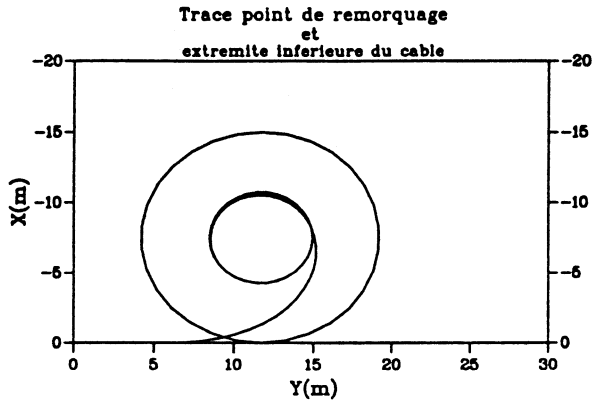


fig 10

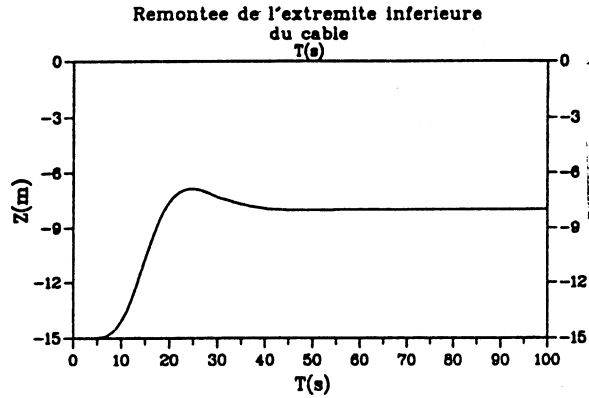


fig 11

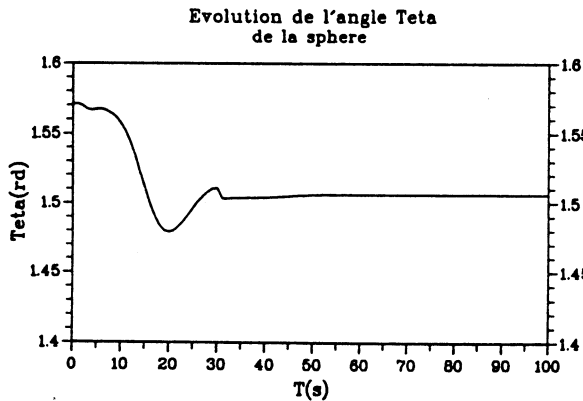


fig 12

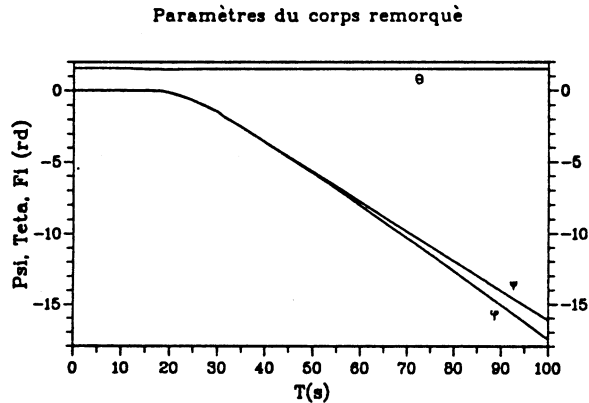


fig 13

6 CONCLUSION

Les gains de temps constatés et le non "bruitage" des composantes de la force de remorquage justifie pleinement le bien fondé de la nouvelle formulation du problème. Il est clair que l'exploitation optimale de ce travail implique une connaissance précise des coefficients hydrodynamiques (frottement, traînée de pression et masse d'eau "ajoutée") sur le système remorqué et plus particulièrement pour le corps remorqué. La continuité logique du travail proposé sera de développer les méthodes (expérimentale et théorique) de détermination de ces différents coefficients; nous aurons alors un outil performant.

Bibliographie

- 1/ Landweber L. and Protter M.H. (1947). The shape and tension of a light flexible cable in a uniform current, J. Appl. Mec.

2/ Pote L. (1950) , A method of determining optimum lengths of towing cables, David Taylor Model bassin, Report 717

3/ Marichal D. (1979) , Contribution à l'étude statique et dynamique des câbles sous-marins, Nantes, Doctoral thesis.

4/ Marichal D. and Bourget P.L. (1986) , Study of the vortex-shedding influence on the drag coefficient and the shape of immersed flexible cylinders, International Conference CADMO 86, Washington D.C.

5/ Sarpkaya T. , Vortex shedding and resistance in harmonic flow about smooth and rough circular cylinders at high Reynolds numbers, Report NPS 59 SL 76021, Monterey California.

6/ Rajaona D.R. (1987) , Analyse harmonique de phénomènes périodiques, pseudopériodiques, superpériodiques - Application à l'étude expérimentale des efforts hydrodynamiques appliqués sur un cylindre placé dans un écoulement stationnaire ou instationnaire, Thèse de Docteur ès Sciences, Nantes, France.

7/ Marichal D. and Jacquot Ch. , Study of the dynamical behaviour of immersed cables. C.M.O.E.88 Venice