

ONDES ACOUSTIQUES SOUS-MARINES DIFFRACTEES PAR LA HOULE

D. EUVRARD, O. MECHICHE ALAMI

Groupe Hydrodynamique Navale, URA D 0853 du CNRS, associé à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI). Laboratoire de Mécanique et Energétique, ENSTA, Centre de l'Yvette, Chemin de la Hunière, 91120 Palaiseau.

Résumé- Le rayonnement acoustique très basse fréquence d'un corps sous-marin en présence d'une houle présente deux aspects découplés: la propagation acoustique dans un fluide en mouvement et la diffraction des ondes acoustiques par la surface libre déformée et en mouvement. Nous étudions ce dernier aspect, plus typique de l'acoustique sous-marine. Nous donnons la solution analytique dans le cas d'une source acoustique ponctuelle: il se produit une sorte de résonance à la verticale de la source. Dans le cas d'un corps rayonnant, nous proposons une méthode numérique de résolution.

Summary- The influence of surface waves upon the very low frequency acoustic radiation of an underwater body presents two decoupled aspects: acoustic propagation in a moving medium and acoustic scattering due to the displacement and the deformation of the sea surface by gravity waves. We study the latter which is more typical of underwater sound. We give the analytical solution in the case of a point source: a kind of resonance appears above the point source. We propose a numerical procedure in order to solve the case of a radiating body.

I- INTRODUCTION

Comment une houle régulière influence-t-elle la propagation acoustique sous-marine ? Plus précisément, que se passe-t-il lorsque la longueur d'onde de la houle et celle du son sont du même ordre de grandeur ? Pour une période de houle de quelques secondes, ceci correspond à une fréquence acoustique très basse, de l'ordre de quelques Hertz.

Un modèle asymptotique cohérent a été mis au point de manière à établir les équations du problème. Ensuite, ces équations ont été résolues analytiquement dans le cas d'une source acoustique ponctuelle, par utilisation du principe d'"Amplitude Limite". Nous observons une sorte de résonance au-dessus de la source. Enfin, nous comptons pouvoir résoudre numériquement le problème d'un corps rayonnant.

II- CADRE ASYMPTOTIQUE

Soit $\mathcal{R} = (0; x, y, z)$ un repère cartésien avec (x, y) plan horizontal, O situé dans le plan de la surface libre au repos et z axe vertical ascendant.

Nous supposons le fluide parfait, l'écoulement isentropique et irrotationnel, et nous nous limitons à un océan infiniment profond. Nous adoptons une loi de compressibilité classique du type "Tait modifiée". En fait, il s'avèrera que la célérité du son pourra être considérée comme constante aux ordres considérés. Nous noterons c_0 cette dernière.

Nous considérons une houle plane régulière progressive de pulsation ω_0 se déplaçant suivant la direction des x croissants.

Nous considérons une source acoustique sous-marine harmonique de pulsation ω_{ac} .

Nous allons nous placer dans le cas (très intéressant) où les longueurs d'onde acoustique et hydrodynamique sont du même ordre Λ , ce qui correspond aux très basses fréquences acoustiques. Ce cas présente une moindre dégénérescence dans les équations de conservation.

Nous allons supposer que la source acoustique est à une profondeur suffisante, de l'ordre d'une longueur d'onde, de manière à négliger la houle diffractée.

Nous adimensionnons toutes les grandeurs physiques en les rapportant à Λ , à T_{ac} (période acoustique) ou T_0 (période de la houle) selon la nature du problème que l'on souhaite étudier (acoustique ou hydrodynamique), et à la masse volumique ρ_0 au niveau de la surface libre moyenne.

Nous faisons apparaître trois petits paramètres : \mathcal{A} l'amplitude de la houle rapportée à Λ , de l'ordre de 10^{-2} , ε la pression acoustique réduite, de l'ordre de 10^{-12} , et δ caractérisant la (faible) compressibilité de l'eau, de l'ordre de 10^{-3} : $\delta = g\Lambda/c_0^2 = 0((T_{ac}/T_G)^2)$ où g est l'accélération de la pesanteur.

Nous effectuons un développement asymptotique uniforme des grandeurs adimensionnées dans les lois de conservation par rapport aux trois petits paramètres, développement dont nous retenons seulement que les termes significatifs.

Le développement de la pression comporte un terme en \mathcal{A} (houle simple linéarisée), puis des termes acoustiques:

- un terme p_{a1} en ε . En posant $p_{a1} = \text{Im}\{p_{a1} e^{-i\omega_{ac}t}\}$ alors p_{a1} vérifie le problème harmonique $[P_{a1}]$ de pulsation ω_{ac} ci-après

$$[P_{a1}] \left\{ \begin{array}{l} \Delta p_{a1} + k^2 p_{a1} = 0 \quad \text{pour } z < 0 \quad (2-1) \quad \text{avec } k = \omega_{ac}/c_0, \\ p_{a1} = 0 \quad \text{sur } z = 0, \\ \text{Condition de rayonnement de Sommerfeld.} \end{array} \right.$$

$[P_{a1}]$ représente le problème d'acoustique linéaire en l'absence de houle,

- mais également un terme p_{a2} en $\varepsilon\mathcal{A}$. En posant

$$p_{a2} = \text{Im}\{ p_{a2}^{(1)} e^{-i(\omega_{ac} + \omega_G)t} + p_{a2}^{(2)} e^{-i(\omega_{ac} - \omega_G)t} \},$$

nous obtenons deux problèmes harmoniques $[P_{a2}^{(j)}]$ ($j=1,2$) similaires mais de pulsations différentes (somme et différence des pulsations acoustique et de la houle). $p_{a2}^{(j)}$ ($j=1,2$) vérifie

$$[P_{a2}^{(j)}] \left\{ \begin{array}{l} \Delta p_{a2}^{(j)} + k^2 p_{a2}^{(j)} = 0 \quad \text{pour } z < 0 \quad (2-2) \quad \text{avec } k = \omega_{ac}/c_0, \\ p_{a2}^{(j)} \Big|_{z=0} = Q_j = \frac{\Lambda}{2} e^{\sigma i \nu_G x} \frac{\partial p_{a1}}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (2-3) \quad \text{avec } \sigma = (-1)^{j+1} \\ \text{et } \nu_G = \frac{\omega_G^2}{g}. \end{array} \right.$$

Une condition de rayonnement (2-4).

Du fait que c'est la condition aux limites (2-3) qui contient

l'information sur la houle, ce problème représente la diffraction des ondes acoustiques dans un fluide au repos mais par une surface libre déformée et en mouvement,

- et un terme p_{a3} en $\varepsilon \mathcal{A} \delta^{\frac{1}{2}}$. En posant

$$p_{a3} = \text{Im} \left\{ p_{a3}^{(1)} e^{-i(\omega_{ac} + \omega_G)t} + p_{a3}^{(2)} e^{-i(\omega_{ac} - \omega_G)t} \right\},$$

comme à l'ordre $\varepsilon \mathcal{A}$, nous obtenons deux problèmes harmoniques $[P_{a3}^{(j)}]$ ($j=1,2$) similaires. $p_{a3}^{(j)}$ ($j=1,2$) vérifie

$$[P_{a3}^{(j)}] \begin{cases} \Delta p_{a3}^{(j)} + k^2 p_{a3}^{(j)} = R^{(j)} & \text{pour } z < 0 \quad (2-5) \text{ avec } k = \omega_{ac}/c_0, \\ p_{a3}^{(j)} = 0 & \text{sur } z = 0, \\ \text{Une condition de rayonnement.} \end{cases}$$

où $R^{(j)}$ est fonction des ordres précédents. Cette fois-ci, l'information sur la houle se trouve dans l'équation aux dérivées partielles (2-5) définie dans tout le domaine fluide. Ce problème représente donc la propagation acoustique dans un fluide en mouvement.

Nous pouvons remarquer qu'aux trois ordres considérés, le nombre d'onde est le même: $k = \omega_{ac}/c_0$.

Nous allons nous intéresser ici à la résolution du problème $[P_{a2}^{(j)}]$ ($j=1,2$).

III- RESOLUTION ANALYTIQUE DU CAS DE LA SOURCE PONCTUELLE

III.1- Régime périodique établi

La source acoustique S est supposée ponctuelle. Elle est située sous l'origine O du repère cartésien \mathcal{R} à la profondeur a ($a > 0$ d'ordre Λ).

A l'ordre ε le problème à résoudre pour p_{a1} est le problème $[P_{a1}]$ mais avec un terme source au second membre de (2-1) qui est $\delta(S)$, distribution de Dirac de support S . Il est résolu par la méthode des images. Nous obtenons, classiquement:

$$\text{en 2D} \quad p_{a1}(M) = -\frac{i\rho_0 c_0^2}{4} \left[H_0^1(kr_S) - H_0^1(kr_S^-) \right],$$

$$\text{en 3D } p_{a1}(M) = -\frac{\rho_0 c_0^2 \Lambda}{4\pi} \left[\frac{e^{ikr_s}}{r_s} - \frac{e^{ikr_{\bar{s}}}}{r_{\bar{s}}} \right],$$

où $r_s = |SM|$, $r_{\bar{s}} = |\bar{S}M|$ et \bar{S} est le symétrique de S relativement à $z=0$.

A l'ordre $\varepsilon \mathcal{A}$, le problème à résoudre est $[P_{a2}^{(j)}]$ ($j=1,2$). On se heurte au fait qu'on ne sait pas exprimer au second ordre la condition de rayonnement (2-4). Ce que l'on peut faire c'est donner des solutions de (2-2) et (2-3). Un calcul par passage au plan Fourier et retour au plan physique (cf POT/1989) donne, entre autres solutions:

$$\text{en 2D } p_{a2}^{(j)} = p_{a2}^{(j)} \Big|_{z=0} * -2 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \quad (3-1), \text{ avec } \mathcal{E} = -\frac{i}{4} H_0^1(kr)$$

$$\text{en 3D } p_{a2}^{(j)} = p_{a2}^{(j)} \Big|_{z=0} * \frac{2}{\Lambda} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} \quad (3-2), \text{ avec } \mathcal{E} = \frac{\Lambda}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r}.$$

où $r = |OM|$.

\mathcal{E} est la solution élémentaire de l'équation de Helmholtz. (3-1) (respectivement (3-2)) est en fait une distribution de densité connue de doublets normaux de Helmholtz sur $z=0$.

Pour trouver la solution de $[P_{a2}^{(j)}]$, nous allons appliquer le principe d'"Amplitude Limite": nous formulerons puis résoudrons un problème aux valeurs initiales plus compliqué mais bien posé. La solution du problème stationnaire sera obtenue par un passage à la limite en temps sur la solution du problème instationnaire. La résolution a été menée à terme dans le cas du problème 2D.

III.2- Problème instationnaire

III.2.1- Résolution formelle

Nous allons, par commodité, dans tout le paragraphe III.2, revenir à des quantités adimensionnées. Ces quantités seront surmontées d'une barre.

La houle étant périodique établie, on suppose que la source acoustique harmonique, située en $S(\bar{x}=0, \bar{z}=-\bar{a})$, démarre à l'instant initial. Le terme source dans l'équation des ondes correspondant à (2-1), est pris égal à $\text{Im}\{Y(\bar{t})e^{-2i\pi\bar{t}}\} \delta(S)$; nous avons choisi la partie imaginaire de manière à ne pas créer de choc à l'instant initial.

Si l'on se place dans tout le plan (\bar{x}, \bar{z}) , la pression générée par cette source est la convolution du terme source avec la solution élémentaire de l'équation des ondes, soit

$$\bar{p} = \text{Im} \left\{ - \frac{e^{-2i\pi\bar{t}}}{2\pi} Y(\bar{t} - \bar{r}_s) \int_{\bar{r}_s}^{\bar{t}} \frac{e^{2i\pi t'}}{\sqrt{t'^2 - \bar{r}_s^2}} dt' \right\} \quad \text{avec} \quad \bar{r}_s = \frac{|SM|}{\Lambda} \quad (3-3).$$

La pression acoustique au premier ordre est donc, par la méthode des images,

$$\bar{p}_{a1} = - \frac{1}{2\pi} \text{Im} \left\{ e^{-2i\pi\bar{t}} \left(Y(\bar{t} - \bar{r}_s) \int_{\bar{r}_s}^{\bar{t}} \frac{e^{2i\pi t'}}{\sqrt{t'^2 - \bar{r}_s^2}} dt' - Y(\bar{t} - \bar{r}_s) \int_{\bar{r}_s}^{\bar{t}} \frac{e^{2i\pi t'}}{\sqrt{t'^2 - \bar{r}_s^2}} dt' \right) \right\} \quad (3-4),$$

Quant à \bar{p}_{a2} , elle doit satisfaire le problème mixte de Cauchy-Dirichlet suivant

$$[P_{a2}^t] \left\{ \begin{array}{l} (\bar{\nabla}^2 - \frac{\partial^2}{\partial \bar{t}^2}) \bar{p}_{a2} = 0 \quad \text{pour} \quad \bar{z} < 0 \quad \text{et} \quad \bar{t} > 0, \\ \bar{p}_{a2} = Q \quad \text{pour} \quad \bar{z} = 0 \quad \text{et} \quad \bar{t} > 0 \\ \bar{p}_{a2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{p}_{a2}}{\partial \bar{t}} = 0 \quad \text{pour} \quad \bar{z} < 0 \quad \text{et} \quad \bar{t} = 0. \end{array} \right. \quad (3-5),$$

Notons \mathcal{F} la transformation de Fourier suivant \bar{x} , u étant la variable transformée et notons \mathcal{L} la transformation de Laplace suivant \bar{t} , s étant la variable transformée.

$\mathcal{L}\mathcal{F}\bar{p}_{a2}$ doit vérifier le problème suivant

$$[\mathcal{L}\mathcal{F}P_{a2}^t] \left\{ \begin{array}{l} [\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} - (4\pi^2 u^2 + s^2)] \mathcal{L}\mathcal{F}\bar{p}_{a2} = 0 \quad \text{pour} \quad \bar{z} < 0, \\ \mathcal{L}\mathcal{F}\bar{p}_{a2} = \mathcal{L}\mathcal{F}Q \quad \text{sur} \quad \bar{z} = 0. \end{array} \right.$$

$[\mathcal{L}\mathcal{F}P_{a2}^t]$ admet pour unique solution bornée pour $\bar{z} < 0$

$$\mathcal{L}\mathcal{F}\bar{p}_{a2} = \mathcal{L}\mathcal{F}Q \times e^{\bar{z}\sqrt{4\pi^2 u^2 + s^2}} \quad (3-6).$$

D'après ABRAMOWITZ et STEGUN (formule 29.3.95 page 1027) et COLOMBO et LAVOINE/1972 (page 99), nous pouvons écrire la transformée de Laplace inverse de (3-6), soit,

$$\bar{p}_{a_2} = \mathcal{F}Q * \left\{ \delta(\bar{t} + \bar{z}) + \frac{2\pi\bar{z}\bar{u}}{\sqrt{\bar{t}^2 - \bar{z}^2}} J_1(2\pi\bar{u}\sqrt{\bar{t}^2 - \bar{z}^2}) \cdot Y(\bar{t} + \bar{z}) \right\} \quad (3-7),$$

où J_1 est la fonction de Bessel de première espèce, d'ordre 1.

Enfin, en introduisant la solution élémentaire E de l'équation des ondes, nous montrons que

$$\bar{p}_{a_2}(M) = Q *_{\bar{x}, \bar{t}} -2 \frac{\partial E}{\partial \bar{z}} \quad \text{où } E = -\frac{1}{2\pi} \frac{Y(\bar{t} - \bar{r})}{\sqrt{\bar{t}^2 - \bar{r}^2}} \quad \text{et } \bar{r} = |OM| = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{z}^2} \quad (3-8).$$

(3-8) ne peut représenter qu'une solution formelle de $[P_{a_2}^t]$ du fait que la transformation de Laplace n'est pas biunivoque et que la transformation de Fourier est isomorphe dans l'espace des distributions \mathcal{S}' pour lequel une condition aux limites du type (3-5) n'a pas de sens.

III.2.2- Vérification directe

Q et E ont leur support dans le demi-cône $\bar{t} \geq 0$, $|\bar{x}| \leq \bar{t}$ dans le plan (\bar{x}, \bar{t}) . Un théorème classique sur la convolution assure que le produit de convolution (3-8) a un sens et que cette dernière vérifie l'équation des ondes homogène.

Un problème délicat que nous avons eu à rencontrer a été de montrer que la distribution (3-8) était en fait une fonction continue (au moins après le passage du front d'onde) et qu'elle vérifiait la condition de Dirichlet (3-5) sur $\bar{z} = 0$ et pour tout $\bar{t} > 0$. Dans (3-8), d'une part Q est C^0 mais pas C^1 et d'autre part E est singulier pour $\bar{t} = \bar{r}$ mais appartient à L_{loc}^1 . Malheureusement sa dérivée $\partial/\partial\bar{z}$ au sens des fonctions n'est pas dans L_{loc}^1 et n'a rien à voir avec la dérivée au sens des distributions qui est nécessitée dans (3-8). Nous avons donc décidé de calculer d'abord $Q *_{\bar{x}, \bar{t}} -2E$, changer les variables d'intégration et

finalement appliquer $\partial/\partial\bar{z}$, non pas sur la fonction singulière E mais sur Q qui est plus régulière. Nous avons obtenu

$$-2Q *_{\bar{x}, \bar{t}} E = \frac{2\bar{a}}{\pi} \cos 2\pi(\bar{x} - \bar{t}) \int_{-\bar{z}}^{\bar{t} - \bar{a}} G d\tau \quad \text{pour } \bar{z} < 0 \text{ et } \bar{t} > \bar{a} - \bar{z} \quad (3-9),$$

$$\text{avec } G = \int_{-1}^{+1} \frac{Y(\bar{t}-\tau-\bar{r}_s)}{\bar{r}_s} \cdot e^{-2i\pi\eta\sqrt{\tau^2-\bar{z}^2}} \cdot F \cdot \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \quad (3-10),$$

$$\text{et } F = \operatorname{Re} \left\{ e^{-2i\pi(\bar{t}-\tau)} \int_1^{(\bar{t}-\tau)/\bar{r}_s} \frac{e^{2i\pi\bar{r}_s w}}{\sqrt{w^2-1}} dw \right\} \text{ où } \bar{r}_s = \sqrt{(\bar{x}-\eta\sqrt{\tau^2-\bar{z}^2})^2 + \bar{a}^2} \quad (3-11).$$

La condition $\bar{t} > \bar{a}-\bar{z}$ dans (3-9) signifie que la perturbation acoustique, issue de S à $\bar{t} = 0$ et se propageant avec une célérité réduite unité, nécessite au moins le temps $\bar{a}-\bar{z}$ pour atteindre le point (\bar{x}, \bar{z}) . Dérivant (3-9), nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (-2Q \underset{\bar{x}, \bar{t}}{*} E) = \frac{2\bar{a}}{\pi} \cos 2\pi(\bar{x}-\bar{t}) \left\{ G \Big|_{\tau=-\bar{z}} + \int_{-\bar{z}}^{\bar{t}-\bar{a}} \frac{\partial G}{\partial \bar{z}} d\tau \right\} \quad (3-12),$$

$$\text{où } G \Big|_{\tau=-\bar{z}} = \pi \cdot \frac{Y(\bar{t}+\bar{z}-\bar{r}_{SL})}{\bar{r}_{SL}} \cdot \operatorname{Re} \left\{ e^{-2i\pi(\bar{t}+\bar{z})} \int_1^{(\bar{t}+\bar{z})/\bar{r}_{SL}} \frac{e^{2i\pi\bar{r}_{SL} w}}{\sqrt{w^2-1}} dw \right\} \quad (3-13),$$

$$\text{avec } \bar{r}_{SL} = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{a}^2}.$$

Il s'agit d'une fonction. Elle satisfait la condition de Dirichlet (3-5) et peut être interprétée comme étant une onde se propageant dans la direction des \bar{z} négatifs avec une célérité unité. Son amplitude est continue en \bar{x} et s'annule pour $|\bar{x}| \geq \sqrt{(\bar{t}+\bar{z})^2 - \bar{a}^2}$. Nous avons montré que l'intégrale dans (3-12) était absolument convergente (ce qui justifie (3-12)) et s'annulait pour $\bar{z} = 0$.

III.2.3- Unicité

Notons \mathcal{S}' l'espace des distributions à croissance lente $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ sur \mathbb{R}^n (ici $n=2$). Notons $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^+; \mathcal{S}')$ l'espace des distributions de \mathcal{S}' dépendant de $t \in \mathbb{R}^+$ avec k dérivées continues (au sens des distributions). Si $w \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^+; \mathcal{S}')$, alors $\mathcal{F}w \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^+; \mathcal{S}')$.

Notons $\bar{D} = -\partial^2/\partial \bar{t}^2 + \bar{\Delta}^2$ l'opérateur des ondes en dimension 2.

On a

$$\mathcal{L}_{t, x, z} \bar{D} = P_2 s^2 + P_0 \quad \text{avec } P_2 = -1 \quad \text{et } P_0 = -4\pi^2(u^2 + v^2) \quad (3-14),$$

Nous avons $P_2 \neq 0$ et $P_2 s^2 + P_0 \neq 0$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ et $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}\{s\} > 0$, ce qui signifie que \bar{D} est hyperbolique. Alors (cf DAUTRAY, LIONS/1987 p.1028) le problème de Cauchy

$$[C] \left\{ \begin{array}{l} \bar{D}p = \bar{g} \quad \text{pour } (\bar{x}, \bar{z}) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \bar{t} \in \mathbb{R}^+, \\ \bar{p}|_{\bar{t}=0} = \bar{p}_0 \quad \text{pour } (\bar{x}, \bar{z}) \in \mathbb{R}^2, \\ \left. \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{t}} \right|_{\bar{t}=0} = \bar{p}_1 \quad \text{pour } (\bar{x}, \bar{z}) \in \mathbb{R}^2, \end{array} \right.$$

a une solution unique dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathcal{S}')$ pourvu que $\bar{g} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathcal{S}')$, $\bar{p}_0 \in \mathcal{S}'$ et $\bar{p}_1 \in \mathcal{S}'$.

Le problème $[P_{a_2}^t]$ que l'on veut résoudre n'est pas exactement du type [C] puisqu'il est posé dans le demi-plan \bar{z} et contient une condition de Dirichlet sur $\bar{z} = 0$ à tout $\bar{t} > 0$. Cependant, nous pouvons aisément faire un *prolongement* de cette condition de Dirichlet. Posons $\tilde{p} = \bar{p}_{a_2} - Q$: \tilde{p} doit vérifier un problème $[\tilde{P}]$ avec une équation des ondes non-homogène pour $\bar{x} \in \mathbb{R}$, $\bar{z} \in \mathbb{R}$ et $\bar{t} \in \mathbb{R}^+$, ainsi qu'une condition de Dirichlet homogène pour $\bar{z} = 0$ et des données de Cauchy non-homogènes. Dans une seconde étape nous *prolongeons* les définitions de \bar{g} , \bar{p}_0 , \bar{p}_1 et \bar{p} à tout le plan $\bar{x} \in \mathbb{R}$, $\bar{z} \in \mathbb{R}$, obtenant ainsi des fonctions antisymétriques par rapport à \bar{z} , c'est-à-dire \bar{g} , \bar{p}_0 , \bar{p}_1 et \bar{p} : \bar{p} vérifie alors le problème [C], qui n'a ainsi *pas plus d'une solution*.

III.2.4- Passage à la limite en temps

Nous allons voir que, pour $\bar{t} \rightarrow +\infty$, la solution instationnaire trouvée tend vers la solution (3-1) du problème harmonique.

Vu les formules (3-9), (3-10) et (3-11) il y a peu de chance d'avoir une démonstration directe rigoureuse. Etant donné que la transformation de Fourier \mathcal{F} est une isométrie sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, il est plus facile de prouver la convergence sur $\mathcal{F}\bar{p}_{a_2}$. Nous travaillerons sur \mathcal{S}'_x .

D'autre part, à cause de la fonction de Heaviside $Y(\bar{t} + \bar{z})$ dans (3-7), il semble difficile d'obtenir un résultat uniforme relativement à $\bar{z} \in \mathbb{R}$: \bar{z} doit rester borné tandis que \bar{t} tend vers l'infini. De plus, nous avons besoin de permuter $\bar{t} \rightarrow +\infty$ et $\partial/\partial \bar{z}$, ce qui est uniquement valable pour les distributions. Nous allons donc travailler sur \mathcal{D}'_z : une fonction-test étant fixée dans \mathcal{D}_z , \bar{z} variera uniquement sur le support de cette fonction et restera donc bornée.

Finalement, la convergence sera établie pour $\mathcal{F}\bar{p}_{a_2}$ dans $\mathcal{S}'_x \otimes \mathcal{D}'_z$, ce qui entraînera le même résultat pour \bar{p}_{a_2} dans $\mathcal{S}'_x \otimes \mathcal{D}'_z$.

Puisque $J'_0 = -J_1$, (3-7) peut encore s'écrire

$$\mathcal{F}_{\bar{p}_{a2}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left\{ \mathcal{F}Q * \frac{Y(\bar{t} + \bar{z}) J_0(2\pi u \sqrt{\bar{t}^2 - \bar{z}^2})}{\bar{t}} \right\} \quad (3-14),$$

la dérivée étant prise au sens des distributions.

La condition de Dirichlet Q sur $\bar{z} = 0$ peut s'écrire

$$Q = Y(\bar{t} - \bar{a}) e^{-2i\pi \bar{t}} Q_p(\bar{x}) + Q_T(\bar{x}, \bar{t}) \quad (3-15),$$

où Q_p est la condition de Dirichlet correspondant au problème harmonique et que nous considérons seulement pour $\bar{t} \geq \bar{a}$ i.e. après que l'onde acoustique issue du point-source ait atteint la surface libre moyenne $\bar{z} = 0$, et où Q_T est une fonction transitoire.

Nous allons mettre séparément $Y(\bar{t} - \bar{a}) e^{-2i\pi \bar{t}} Q_p(\bar{x})$ et $Q_T(\bar{x}, \bar{t})$ dans le deuxième membre de (3-14).

Lemme: Posons $I(u, \bar{z}, \bar{t}) = \int_{-\bar{z}}^{\bar{t} - \bar{a}} e^{2i\pi \tau} J_0(2\pi u \sqrt{\tau^2 - \bar{z}^2}) d\tau$ pour $\bar{t} \geq \bar{a} - \bar{z}$. Nous avons alors

(i) $\lim_{\bar{t} \rightarrow +\infty} I(u, \bar{z}, \bar{t}) = I(u, \bar{z}, +\infty)$ dans $\mathcal{S}'_u \otimes \mathcal{D}'_z$, et

(ii) $I(u, \bar{z}, +\infty) = \frac{i}{2} \mathcal{F}(H_0^1(2\pi r)) = \mathcal{F}(-2\mathcal{E})$ (cf (3-1)).

Après avoir prouvé ce lemme, nous obtenons

$$Y(\bar{t} - \bar{a}) e^{-2i\pi \bar{t}} \mathcal{F}Q_p * \frac{Y(\bar{t} + \bar{z}) J_0(2\pi u \sqrt{\bar{t}^2 - \bar{z}^2})}{\bar{t}} \rightarrow Y(\bar{t} - \bar{a}) e^{-2i\pi \bar{t}} \mathcal{F}Q_p \cdot \mathcal{F}\left(-2\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \bar{z}}\right) \quad (3-16)$$

dans $\mathcal{S}'_u \otimes \mathcal{D}'_z$. Nous pouvons permuter le passage à la limite et $\partial/\partial \bar{z}$, d'où:

$\mathcal{F}_{\bar{p}_{a2}}$ correspondant à $Y(\bar{t} - \bar{a}) e^{-2i\pi \bar{t}} Q_p$ tend vers $(\mathcal{F}_{\bar{p}_{a2}})_{\text{harmonique}}$ dans $\mathcal{S}'_u \otimes \mathcal{D}'_z$ quand $\bar{t} \rightarrow +\infty$.

Tout comme pour Q_T , il est préférable d'utiliser (3-7) plutôt que (3-14) et il est alors plus aisé de montrer que le $\mathcal{F}_{\bar{p}_{a2}}$ correspondant tend vers zéro dans $\mathcal{S}'_u \otimes \mathcal{D}'_z$.

Finalement, au moins en 2D, la solution^z (3-1) est la limite de la solution transitoire, et apparaît donc comme la solution "physiquement" acceptable.

IV- REPRESENTATION GRAPHIQUE DE LA SOLUTION

(3-1) et (3-2) étant des produits de convolution, il peut être intéressant de les calculer par FFT inverse, d'autant plus que nous

disposons des expressions correspondantes dans le plan Fourier (cf POT/1989).

Notons u la variable Fourier correspondant à x et v celle qui correspond à y . La transformée de Fourier horizontale de $p_{a_2}^{(j)}$ étant paire suivant v , alors $p_{a_2}^{(j)}$ est paire suivant y .

D'autre part, en remplaçant u par $-u$, le problème $j=1$ se transforme en $j=2$ et réciproquement. Par conséquent, les courbes représentatives dans le plan Fourier de $p_{a_2}^{(2)}$ se déduisent de celles de $p_{a_2}^{(1)}$ en faisant une symétrie par rapport à $u=0$. De la même façon, les courbes représentatives de $p_{a_2}^{(2)}$ se déduiront de celles de $p_{a_2}^{(1)}$ en faisant une symétrie par rapport à $x=0$. C'est la raison pour laquelle il nous suffira de présenter les courbes du problème $j=1$.

Nous avons effectué le calcul pour une source située à une profondeur Λ , l'observation se faisant à une profondeur fixée égale à $\Lambda/2$. Les longueurs d'onde acoustique et de la houle étant du même ordre, k est du même ordre que ν_G . Pour le calcul, nous avons choisi $k = \nu_G$.

Les figures 1, 2 et 3 représentent la partie réelle, la partie imaginaire et le module de $p_{a_2}^{(1)}(x, y, z = -\Lambda/2)$. Nous pouvons constater qu'une résonance apparaît au-dessus de la source acoustique. Ce pic atteint son amplitude maximale sur $z=0$ donc sur la surface libre. Autrement dit, ce qui était insonore sur $z=0$ ($p_{a_1} = 0$ sur $z=0$) en l'absence de houle, devient détectable sur $z=0$ du fait de la présence de la houle: la houle amplifie le bruit.

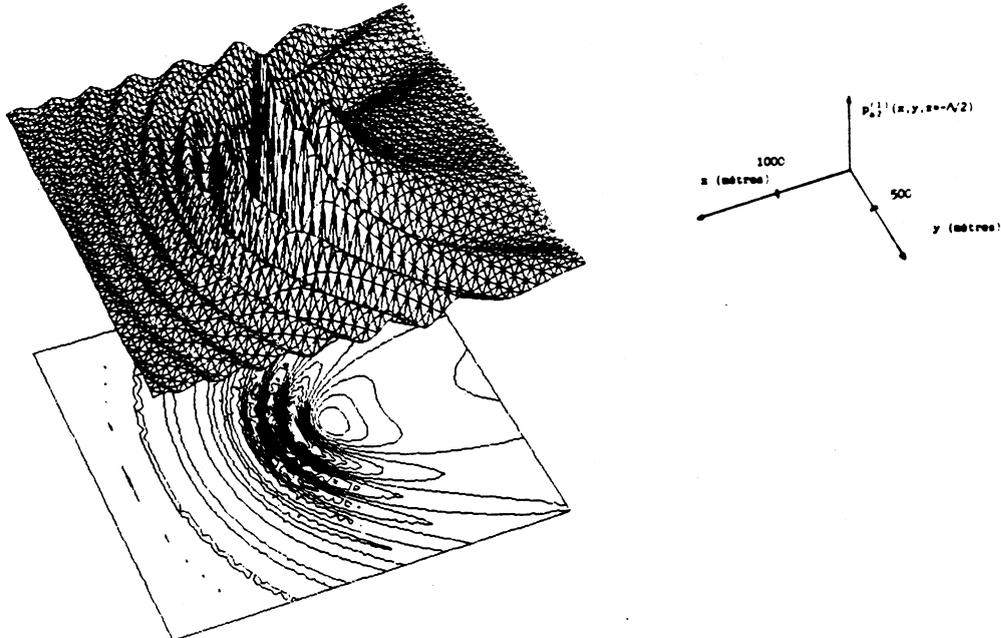


Figure 1

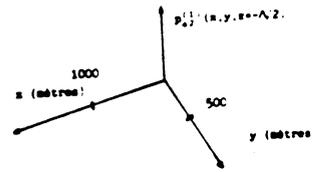
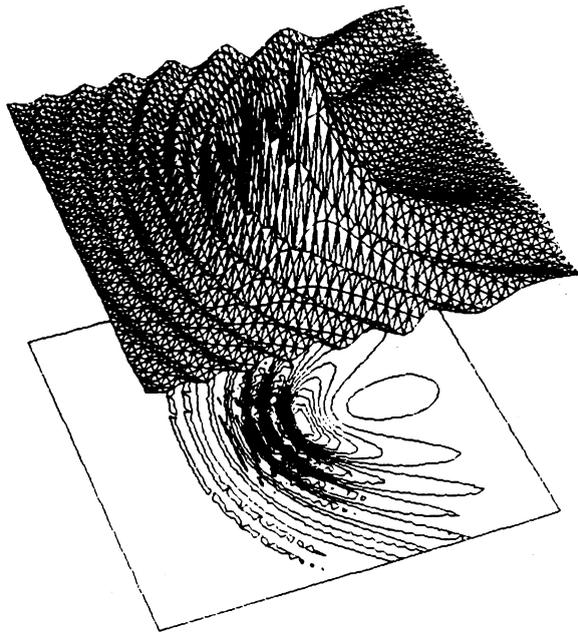


Figure 2

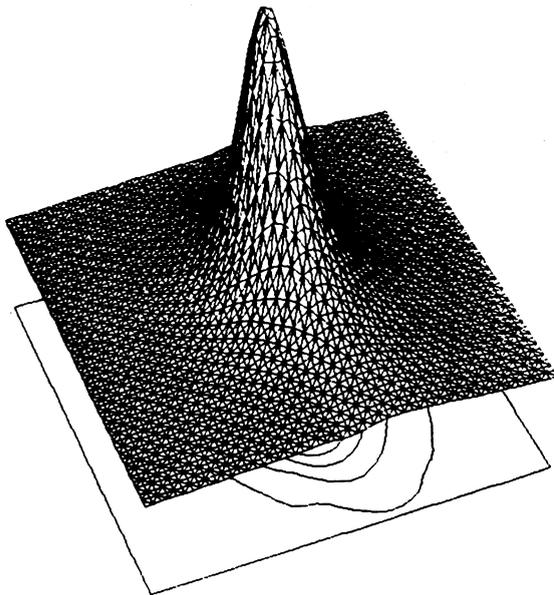


Figure 3

V- RESOLUTION NUMERIQUE DU CAS DU CORPS RAYONNANT

Nous allons donner le processus numérique qui nous permettra de résoudre le cas d'un corps vibrant de façon connue, et qui sera prochainement mis en oeuvre.

A l'ordre ε , le problème $[P_1]$ avec une condition de Neumann à la frontière du corps étant bien posé, nous pouvons utiliser la méthode de couplage éléments finis - représentation intégrale due à JAMI et LENOIR/1978. Nous disposons du code MELINA adapté à ce genre de problème.

A l'ordre εA , nous décomposons $p_{a2}^{(j)}$ par linéarité en $p_{a2,1}^{(j)}$ et $p_{a2,2}^{(j)}$:

- $p_{a2,1}^{(j)}$ va ignorer la présence du corps en satisfaisant (2-2) dans tout le demi-plan $z < 0$ et (2-3) sur $z = 0$. Nous obtenons $p_{a2,1}^{(j)}$ par calcul numérique d'une distribution de doublets (donc d'un produit de convolution) à l'aide d'une FFT.

- Ensuite $p_{a2,2}^{(j)}$ va prendre en compte la présence du corps en satisfaisant (2-2) pour $z < 0$ et hors du corps, une condition de Dirichlet homogène sur $z = 0$ et une condition de Neumann sur la frontière du corps avec une correction due à l'introduction de $p_{a2,1}^{(j)}$. Ce problème sera lui aussi résolu à l'aide de la méthode de couplage éléments finis-représentation intégrale de JAMI-LENOIR.

L'ensemble de ce processus est analogue à celui déjà mis en oeuvre avec succès, pour un problème de propagation de raz-de-marée, par LENOIR et VERRIERE/1989.

BIBLIOGRAPHIE

- M. ABRAMOWITZ, I. A. STEGUN, *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, Inc., New York, 1970.
- S. COLOMBO, J. LAVOINE, *Transformations de Laplace et de Mellin*, Gauthier-Villars éditeur, 1972.
- R. DAUTRAY, J.L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, vol. 3, Masson, 1985.
- M. LENOIR, A. JAMI, *A variational formulation for exterior problems in linear hydrodynamics*, Computer Methods in Mechanics and Engineering, vol. 16, pp 341-359, 1978.
- G. POT, *Diffraction d'une onde acoustique sous-marine par une houle plane simple*, Rapport ENSTA n°233, 1989.
- M. VERRIERE, *Calcul numérique de champs de vagues linéaires, en régime transitoire, en présence d'un obstacle tridimensionnel*, Thèse et Rapport ENSTA n°235, 1989.

Ce travail a été effectué dans le cadre du contrat DRET 88/1009 .