

CRITERE DYNAMIQUE DE CAVITATION PAR BULLES

Jean Yves Billard, Philippe Cerrutti
Laboratoire d'Hydrodynamique
Ecole Navale
29240 Brest Naval, FRANCE

Christian Dugué
Groupe Phénomènes d'Interface
Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées
91120 Palaiseau, FRANCE

RESUME

Le champ de pression dans lequel évolue un germe de cavitation qui transite d'une zone de haute pression vers une zone de basse pression présente généralement des variations intermédiaires entre une évolution très lente et une évolution en créneau. Ces deux limites conduisent à des pressions critiques de croissance explosive différentes d'autant que le comportement thermodynamique du gaz inclus dans le germe est mal connu. Une étude systématique permet d'encadrer le domaine d'évolution de la pression critique.

SUMMARY

The pressure field to which is subjected a cavitation nucleus transiting from a high pressure to a low pressure region evolves usually some way between a slow (quasi-steady) and a rapid (instantaneous) pressure change. These two limiting cases give different critical pressures for explosive bubble growth. This is more so since the thermodynamic behaviour of the non condensable gas within the bubble is unknown. A systematic investigation allows to establish the range of all possible critical pressure values.

1. INTRODUCTION

L'apparition de la cavitation par bulles dans un écoulement est particulièrement sensible à la population de germes qu'il contient. En effet, la croissance explosive de ces inclusions gazeuses, dont la taille caractéristique est de quelques microns, se produit lorsque la pression environnante devient inférieure à une valeur critique. Néanmoins, l'examen de la littérature sur le sujet montre qu'on se contente généralement de définir la pression critique de cavitation simplement comme celle donnée par l'évolution quasi-statique d'une seule bulle dont le mélange gazeux qui la compose évolue de façon isotherme. Ce critère, s'il est suffisant dans beaucoup de cas, est naturellement inadapté pour décrire des situations où la pression évolue très rapidement. Il devient alors nécessaire de :

- i. tenir compte des effets dynamiques,
- ii. se demander si l'hypothèse d'évolution isotherme du mélange gazeux reste valide.

Curieusement, il n'existe pas à notre connaissance de critère simple applicable à ces situations. La difficulté vient du fait que l'on peut difficilement tenir compte de façon explicite de toutes les évolutions possibles du champ de pression qui constitue le terme moteur de l'équation de Rayleigh-Plesset :

$$\rho \left(r \ddot{r} + \frac{3}{2} \dot{r}^2 \right) = \left(p_{\infty 0} - p_v + \frac{2\gamma}{r_0} \right) \left(\frac{r_0}{r} \right)^{3k} - p_{\infty}(t) + p_v - \frac{2\gamma}{r} \quad (1)$$

(ρ : masse volumique, μ : viscosité dynamique, γ : tension superficielle, r_0 : rayon initial, r : rayon à l'instant t , p_v : pression de vapeur saturante, $p_{\infty 0}$: pression initiale, $p_{\infty}(t)$: pression au temps t , k : coefficient polytropique, $\dot{}$: dérivation temporelle)

On peut cependant contourner la difficulté; en effet, beaucoup de cas pratiques se rapportent à la situation suivante: une bulle, initialement au repos (rayon r_0 , pression $p_{\infty 0}$), subit pour $t > 0$ un champ de pression décroissante $p_{\infty}(t)$ qui l'amène en un temps non défini sous une pression finale constante p_{∞} . On a à chaque instant: $p_{\infty 0} > p_{\infty}(t) > p_{\infty}$. L'évolution réelle de la bulle peut être «encadrée» par les deux cas limites:

1. Evolution dite «quasi-statique»: la pression passe graduellement de $p_{\infty 0}$ à p_{∞} en un temps très long.

2. Evolution instantanée: la pression passe de $p_{\infty 0}$ à p_{∞} en un temps très court (créneau). Ce deuxième cas est appelé dans la suite le «cas dynamique».

On aboutit ainsi, pour un même germe initial, à une pression critique statique p_{cs} et à une pression critique dynamique p_{cd} que nous allons maintenant expliciter.

2. CRITERE STATIQUE ET PARAMETRAGE

Rappelons brièvement le critère statique de cavitation [Darrozes et Chahine, 1983]. Dans le cas où l'évolution de la pression est lente, le comportement du gaz non condensable inclus dans le germe est supposé isotherme. Dans ce cas, l'expression (1) devient:

$$p_{\infty} = p_v + \left(p_{\infty 0} - p_v + \frac{2\gamma}{r_0} \right) \left(\frac{r_0}{r} \right)^3 - \frac{2\gamma}{r} \quad (2)$$

Les conditions initiales étant fixées, p_{∞} présente un minimum pour $r = r_{cs}$ donné par:

$$r_{cs} = r_0 \sqrt{3 \left(\frac{p_{\infty 0} - p_v}{2\gamma} r_0 + 1 \right)} \quad (3)$$

Ce rayon est obtenu pour une pression critique p_{cs} :

$$p_{cs} = p_v - \frac{4\gamma}{3r_{cs}} \quad (4)$$

Les conditions (3) et (4) définissent les conditions de croissance asymptotique pour une évolution quasi-statique. Elles expriment r_{cs} et p_{cs} en fonction de r_0 et p_0 . Un adimensionnement judicieux permet de se ramener à seulement deux quantités; il suffit pour cela de remarquer que l'équilibre des contraintes à l'interface peut s'écrire:

$$\frac{p_{\infty} - p_v}{2\gamma} r = \frac{p_g}{2\gamma} r - 1 \quad (5)$$

où p_g est la pression de gaz. La connaissance du premier membre (un nombre de Weber) est donc suffisante pour caractériser l'état gazeux d'un germe. On définit donc :

$$\mathcal{W}_0 = \frac{p_{\infty 0} - p_v}{2\gamma} r_0 ; \quad \mathcal{W} = \frac{p_{\infty} - p_v}{2\gamma} r ; \quad \mathcal{W}^* = \frac{p_{\infty} - p_v}{2\gamma} r_0 ; \quad \alpha = \frac{1}{\beta} = \frac{p_{\infty} - p_v}{p_{\infty 0} - p_v} \quad (6)$$

Il faut noter que les nombres de Weber peuvent être négatifs et que (5) implique que

$$\mathcal{W}_0 \geq -1 \text{ et } \mathcal{W} \geq -1 \text{ car } p_g \geq 0$$

L'équation (2) généralisée à un cas polytropique quelconque s'écrit alors:

$$\mathcal{W}_0 = -1 + \mathcal{W}^* \left(1 + \frac{1}{\mathcal{W}} \right) \left(\frac{\mathcal{W}}{\mathcal{W}^*} \right)^{3k} \quad (7)$$

On en déduit le nombre de Weber critique:

$$\mathcal{W}_{cs} = -\frac{3k-1}{3k} < 0 \quad (8)$$

$\mathcal{W}_{cs} < 0$ implique $\mathcal{W}_{cs}^* < 0$ d'après (6), d'où le critère statique:

$$\mathcal{W}'_0 = \frac{(3k-1)^{3k-1}}{(3k)^{3k} |\mathcal{W}'_{cs}|^{3k-1}} - 1 \quad (9)$$

Le système (8)-(9) est strictement équivalent au système (3)-(4) pour $k = 1$, l'équation (4) étant identique à l'équation (8). L'équation (9) formule avantageusement le critère à l'aide d'une seule courbe reliant un état initial \mathcal{W}'_0 et un état final \mathcal{W}'_{cs} pour toute valeur de k .

3. CRITERE DYNAMIQUE

3.1. Cas général.

Il suffit d'adimensionner (1) à l'aide de (6) en posant comme échelle de temps $1/\omega$. Il vient alors:

$$\frac{4\rho\omega^2\gamma}{(p_\infty - p_v)^3} \left(\mathcal{W}\mathcal{W}'' + \frac{3}{2}\mathcal{W}'^2 \right) = \left(\beta + \frac{1}{\mathcal{W}^*} \right) \left(\frac{\mathcal{W}^*}{\mathcal{W}} \right)^{3k} - 1 - \frac{1}{\mathcal{W}} \quad (10)$$

Choisissons ω tel que:

$$\omega = \frac{1}{2\gamma} \sqrt{\frac{|p_\infty - p_v|^3}{\rho}} \quad (11)$$

Alors:

$$\pm \left(\mathcal{W}\mathcal{W}'' + \frac{3}{2}\mathcal{W}'^2 \right) = \left(\beta + \frac{1}{\mathcal{W}^*} \right) \left(\frac{\mathcal{W}^*}{\mathcal{W}} \right)^{3k} - 1 - \frac{1}{\mathcal{W}} \quad (12)$$

avec le signe (+) si $p_\infty > p_v$ et le signe (-) si $p_\infty < p_v$.

En utilisant l'identité:

$$2\mathcal{W}^2\mathcal{W}' \left(\mathcal{W}\mathcal{W}'' + \frac{3}{2}\mathcal{W}'^2 \right) = (\mathcal{W}^3\mathcal{W}'^2)' \quad (13)$$

l'équation (12) peut être intégrée une fois pour obtenir :

$$\pm \mathcal{W}'^2 = -\frac{2}{3(k-1)} \left(\beta + \frac{1}{\mathcal{W}^*} \right) \left(\frac{\mathcal{W}^*}{\mathcal{W}} \right)^{3k} - \frac{1}{\mathcal{W}} - \frac{2}{3} + \frac{K}{\mathcal{W}^3} \quad (14)$$

La constante d'intégration K est obtenue par la condition initiale $\mathcal{W}' = 0$ à $t = 0$:

$$K = \frac{2}{3(k-1)} (1 + \beta \mathcal{W}^*) \mathcal{W}^{*2} + \frac{2}{3} \mathcal{W}^{*3} + \mathcal{W}^{*2} \quad (15)$$

L'étude de l'équation (14) montre que:

1. dans le cas $p_- > p_v$, il existe deux racines positives, dont une est \mathcal{W}'_0 , entre lesquelles la bulle oscille.

2. Le cas $p_- < p_v$ est le plus intéressant; selon les valeurs du couple (β, \mathcal{W}^*) , (14) admet 1, 2 ou 3 racines :

- | | |
|---|--|
| a. Une seule racine (\mathcal{W}'_0): | croissance explosive. |
| b. Trois racines: | oscillations entre deux d'entre elles. |
| c. Deux racines, dont une double : | cas limite entre les deux précédents. |

Le critère dynamique correspond donc à l'existence d'une racine double de (14), c'est à dire:

$$\mathcal{W}'^2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d \mathcal{W}'^2}{d \mathcal{W}} = 0 \quad (16)$$

L'étude est terminée numériquement. La Figure 1 illustre, pour un germe de $10 \mu\text{m}$ de rayon initial et $k = 1,2$, les trois cas a, b et c.

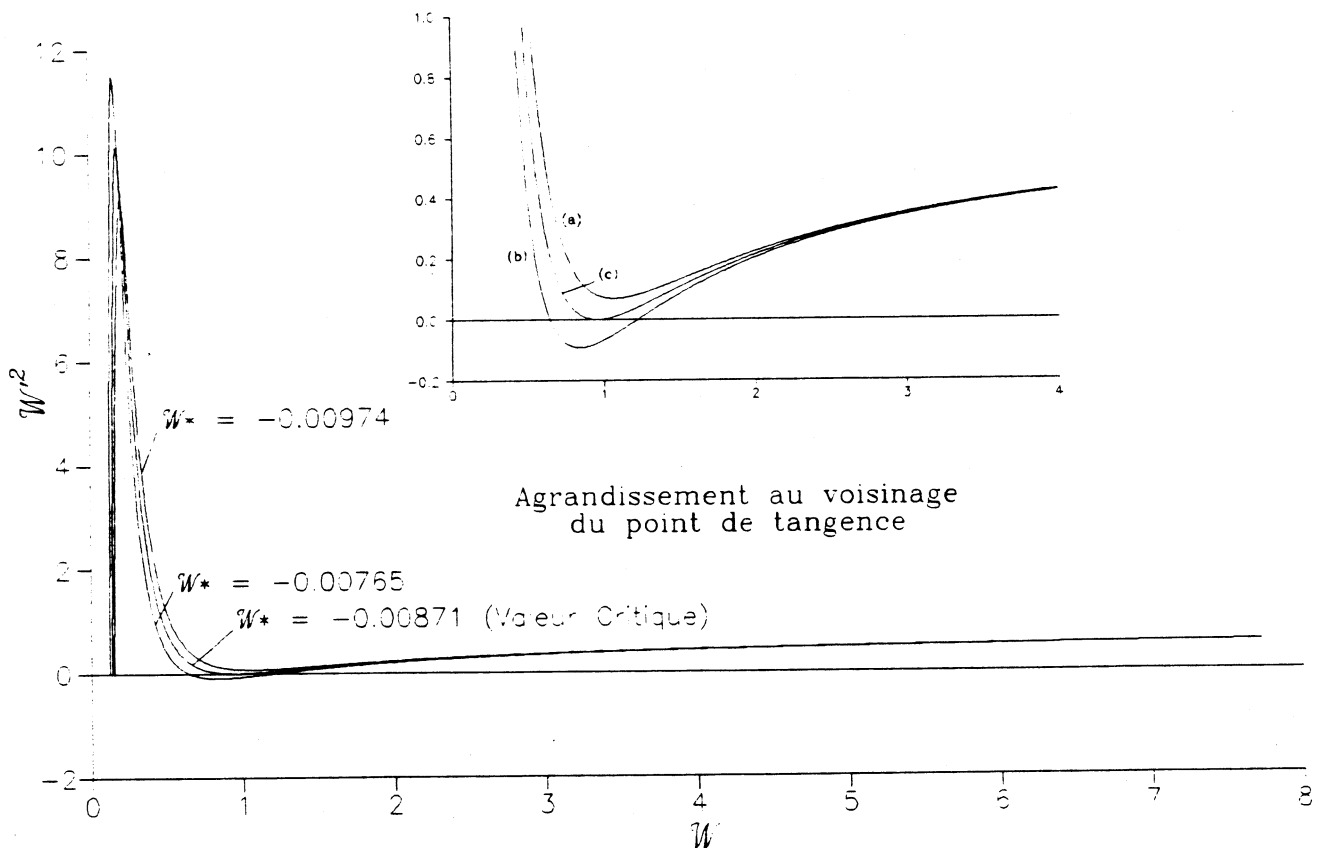


Figure 1: Evolution de \mathcal{W}'^2 donné par les équations (14)-(15) en fonction de \mathcal{W} .

Remarquons que (16) est équivalent à:

$$\mathcal{W}' = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{W}'' = 0 \quad (17)$$

Le premier membre de (12) est donc nul pour le point critique dynamique. En conséquence l'équation (7) est encore vérifiée avec $\mathcal{W} = \mathcal{W}'_{cd}$ et $\mathcal{W}^* = \mathcal{W}^*_{cd}$.

$$(1 + \mathcal{W}'_0) \left(\frac{\mathcal{W}^*_{cd}}{\mathcal{W}'_{cd}} \right)^{3k} - \mathcal{W}^*_{cd} \left(1 + \frac{1}{\mathcal{W}'_{cd}} \right) = 0 \quad (18)$$

D'autre part les équations (14) et (15) pour $\mathcal{W} = 0$ donnent, une fois développées,

$$2(1 + \mathcal{W}'_0) \mathcal{W}^2_{cd} \left(\frac{\mathcal{W}^*_{cd}}{\mathcal{W}'_{cd}} \right)^{3k-1} + 3(k-1) \mathcal{W}^2_{cd} + 2(k-1) \mathcal{W}^3_{cd} \\ - 2(1 + \mathcal{W}'_0) \mathcal{W}^2_{cd} - 3(k-1) \mathcal{W}^2_{cd} - 2(k-1) \mathcal{W}^3_{cd} = 0$$

Grâce à (18) on peut réécrire cette relation sous forme polynomiale,

$$2k \mathcal{W}^3_{cd} + (3k-1) \mathcal{W}^2_{cd} - 2(1 - \mathcal{W}'_0) \mathcal{W}^{*2}_{cd} - (k-1)(2\mathcal{W}^*_{cd} + 3) \mathcal{W}^{*2}_{cd} = 0 \quad (19)$$

Le système (18)-(19) donne par élimination de \mathcal{W}'_{cd} , une relation implicite entre \mathcal{W}'_0 et \mathcal{W}^*_{cd} , ce qui constitue le critère dynamique.

3.2. Cas isotherme ($k = 1$).

La singularité des équations (14)-(15) lorsque k tend vers 1 n'est qu'apparente. Dans ce cas, l'équation (12) peut être intégrée en:

$$\pm \mathcal{W}'^2 = 2(1 + \beta \mathcal{W}^*) \mathcal{W}^{*2} \frac{\text{Log} |\mathcal{W}|}{\mathcal{W}^3} - \frac{1}{\mathcal{W}} - \frac{2}{3} + \frac{K}{\mathcal{W}^3} \quad (20)$$

$$K = -2(1 + \beta \mathcal{W}^*) \mathcal{W}^{*2} \text{Log} |\mathcal{W}^*| + \mathcal{W}^{*2} + \frac{2}{3} \mathcal{W}^{*3} \quad (21)$$

Cette équation est la limite de (14)-(15) lorsque k tend vers 1. Elle s'étudie de la même façon que les précédentes. Elle est l'analogue de l'intégrale première donnée par Darrozès et Chahine [1983, équation (11)] mais avec les termes de tension superficielle conservés, ce qui est fondamental puisque leur absence aboutit à une croissance asymptotique dès que $p_- < p_v$ (pas de retard à la cavitation).

3.3. Cas particulier ($k = 4/3$).

Lorsque $k = 4/3$, l'équation (18) devient polynomiale. Le critère dynamique (18)-(19) peut alors être explicité:

$$w_0 = \frac{(w_{cd}^* + 3/2)^2}{81 w_{cd}^{*2}} \left(3 - 7w_{cd}^* + (3 - 4w_{cd}^*) \sqrt{\frac{3 - 4w_{cd}^*}{3 + 2w_{cd}^*}} \right) - 1 \quad (22)$$

alors que l'équation (9) donne pour le critère statique:

$$w_0 = \frac{27}{256 |w_{cs}^*|^3} - 1 \quad (23)$$

4. RESULTATS

Le Tableau 1, page suivante, rassemble les valeurs qui correspondent aux critères statique et dynamique, dans les cas isothermes et adiabatiques. Ces valeurs sont reprises sur la Figure 2.

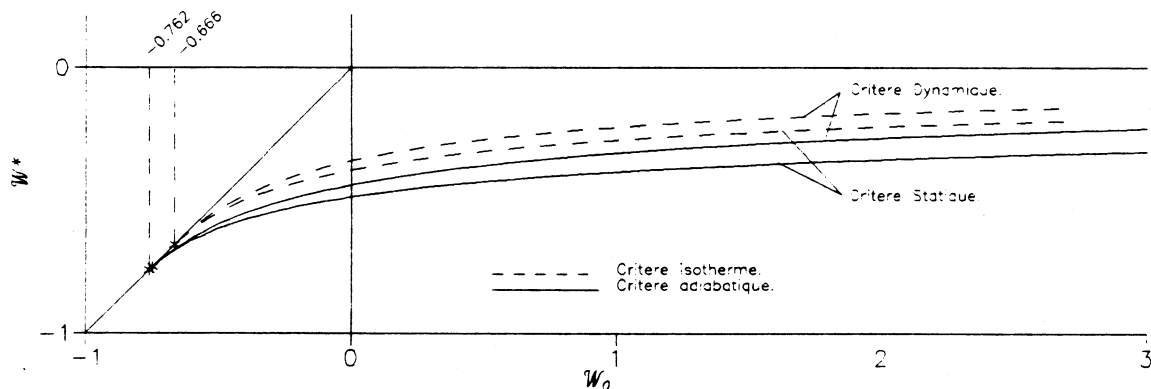


Figure 2: Critères statique et dynamique dans le plan (w_0, w^*) .

On observe que:

1. Un germe ne peut exister de façon stable que si $w_0 > -\frac{3k-1}{3k}$ (dont la valeur varie de -0,762 pour $k=1,4$ à -0,666 pour $k=1$),

2. $w_{cs}^*(w_0, k) < w_{cd}^*(w_0, k)$. Un germe peut exploser prématurément par rapport à la prédiction du critère statique,

Tableau 1 : Valeurs des coefficients critiques dynamiques et statiques pour $k = 1$ et $1,4$.

\mathcal{W}_0	$k = 1.00$		$k = 1.4$	
	$ \mathcal{W}_{st}^* $	$ \mathcal{W}_{d}^* $	$ \mathcal{W}_{st}^* $	$ \mathcal{W}_{d}^* $
-0.6	0.60139	0.60866	0.63912	0.64788
-0.5	0.53304	0.54450	0.58784	0.60424
-0.4	0.47965	0.49712	0.54718	0.57077
-0.3	0.43727	0.46030	0.51387	0.54393
-0.2	0.40283	0.43061	0.48592	0.52170
-0.1	0.37426	0.40602	0.46202	0.50285
0.0	0.35016	0.38522	0.44128	0.48656
0.1	0.32954	0.36732	0.42306	0.47228
0.2	0.31167	0.35170	0.40688	0.45961
0.3	0.29603	0.33792	0.39239	0.44826
0.4	0.28221	0.32565	0.37932	0.43800
0.5	0.26990	0.31462	0.36744	0.42865
0.6	0.25885	0.30465	0.35659	0.42010
0.7	0.24888	0.29557	0.34663	0.41221
0.8	0.23983	0.28725	0.33745	0.40491
0.9	0.23157	0.27960	0.32894	0.39813
1.0	0.22400	0.27253	0.32103	0.39180
1.1	0.21703	0.26597	0.31365	0.38587
1.2	0.21058	0.25987	0.30675	0.38030
1.3	0.20461	0.25416	0.30028	0.37506
1.4	0.19906	0.24882	0.29419	0.37010
1.5	0.19388	0.24380	0.28845	0.36541
1.6	0.18902	0.23907	0.28302	0.36096
1.7	0.18448	0.23461	0.27789	0.35673
1.8	0.18020	0.23039	0.27302	0.35269
1.9	0.17618	0.22639	0.26839	0.34885
2.0	0.17237	0.22259	0.26398	0.34517
2.1	0.16878	0.21897	0.25978	0.34165
2.2	0.16537	0.21553	0.25577	0.33828
2.3	0.16214	0.21224	0.25194	0.33504
2.4	0.15907	0.20910	0.24827	0.33193
2.5	0.15614	0.20610	0.24476	0.32894
2.6	0.15335	0.20322	0.24138	0.32605
2.7	0.15069	0.20046	0.23814	0.32328

3. $\mathcal{W}_{\alpha}^*(\mathcal{W}_0, k) = \mathcal{W}_{\alpha}^*(\mathcal{W}_0, k)$ lorsque $\mathcal{W}_0 > -\frac{3k-1}{3k}$, ce qui est logique puisqu'au point critique, la bulle est instable à la moindre oscillation,

4. Les frontières des critères statiques et dynamiques s'entrecroisent :

$\mathcal{W}_{\alpha}^*(\mathcal{W}_0, k=1,4) < \mathcal{W}_{\alpha}^*(\mathcal{W}_0, k=1,4) < \mathcal{W}_{\alpha}^*(\mathcal{W}_0, k=1) < \mathcal{W}_{\alpha}^*(\mathcal{W}_0, k=1)$. Cela à son importance car une même pression critique peut être atteinte de plusieurs façons. Seule une étude thermique de l'évolution du gaz permettrait de conclure de façon plus précise.

En revenant aux grandeurs dimensionnelles, il est instructif de comparer les valeurs obtenues au moyen des différents critères quand k varie, Figure 3. Pour un même germe de $10 \mu\text{m}$ de rayon initial à la pression atmosphérique, on obtient un éventail de pressions critiques dynamiques p_{α} compris entre -249 Pa et 831 Pa et un rayon critique compris entre 95 et $2515 \mu\text{m}$, soit des valeurs encadrant celle du critère statique isotherme qui donne 162 Pa et $47 \mu\text{m}$ (température 20°C , $p_v = 2337 \text{ Pa}$). Les différences s'accroissent au fur et à mesure que les germes sont plus petits ou plus exactement que leur nombre de Weber initial est plus petit. 25-95

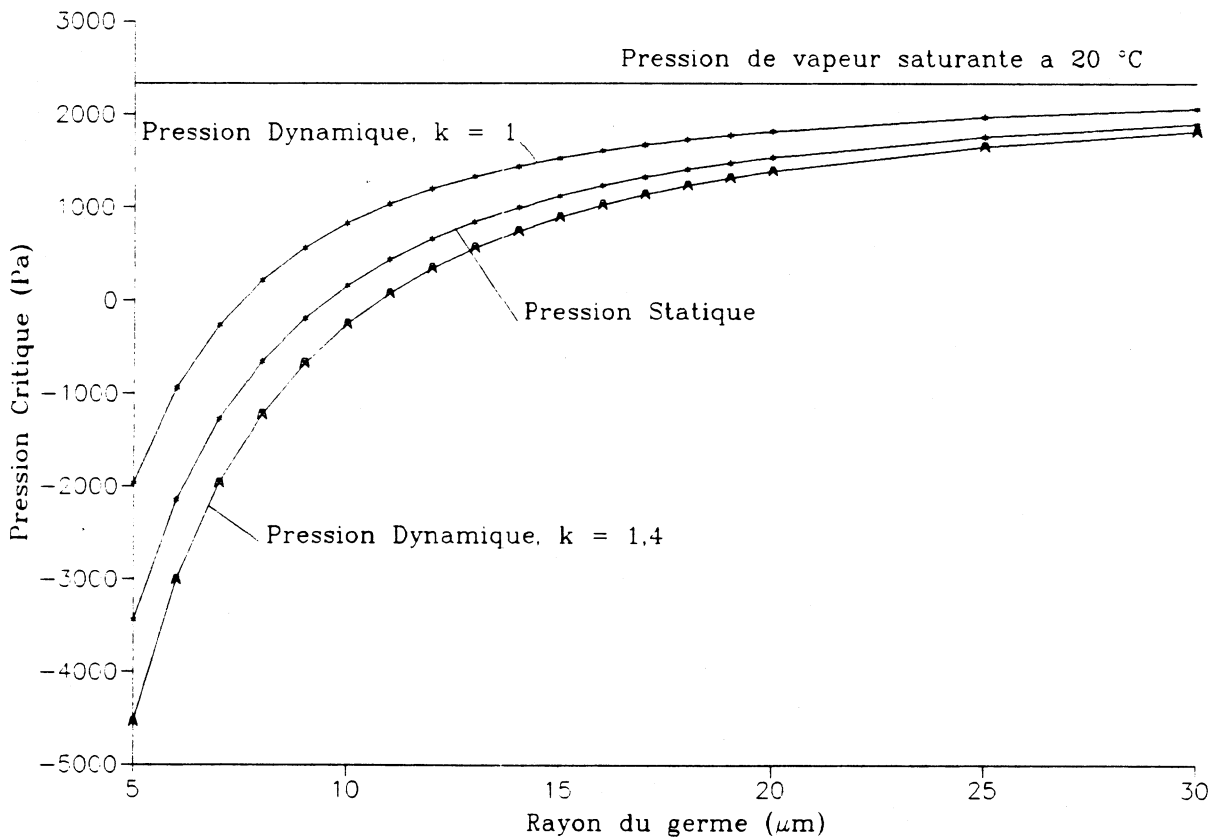


Figure 3 : Pression critiques statique et dynamique pour $k = 1$ et $k = 1,4$ ($p_{\infty} = 101325 \text{ Pa}$).

On remarque sur la Figure 4 que des pressions critiques données par le critère statique sont pratiquement confondues avec celles données par le critère dynamique avec un coefficient polytropique est compris entre 1,2 et 1,3, et ceci sur un très large gamme de diamètre (de 5 à $100 \mu\text{m}$). Il est donc impossible de dire *a priori* si un germe a explosé «rapidement de façon plutôt

adiabatique» ou «moins rapidement mais de façon isotherme». La prédiction de la cavitation dans les zones où la pression diminue n'est donc pas si simple et un critère prudent serait de considérer l'enveloppe des courbes comme une zone à risque de cavitation. On définit ainsi un critère «flou» de cavitation:

1. $p_{\infty} < p_{cr}(k=1,4)$: cavitation.
2. $p_{cr}(k=1,4) < p_{\infty} < p_{cr}(k=1)$: risque de cavitation.
3. $p_{cr}(k=1) < p_{\infty}$: pas de cavitation.

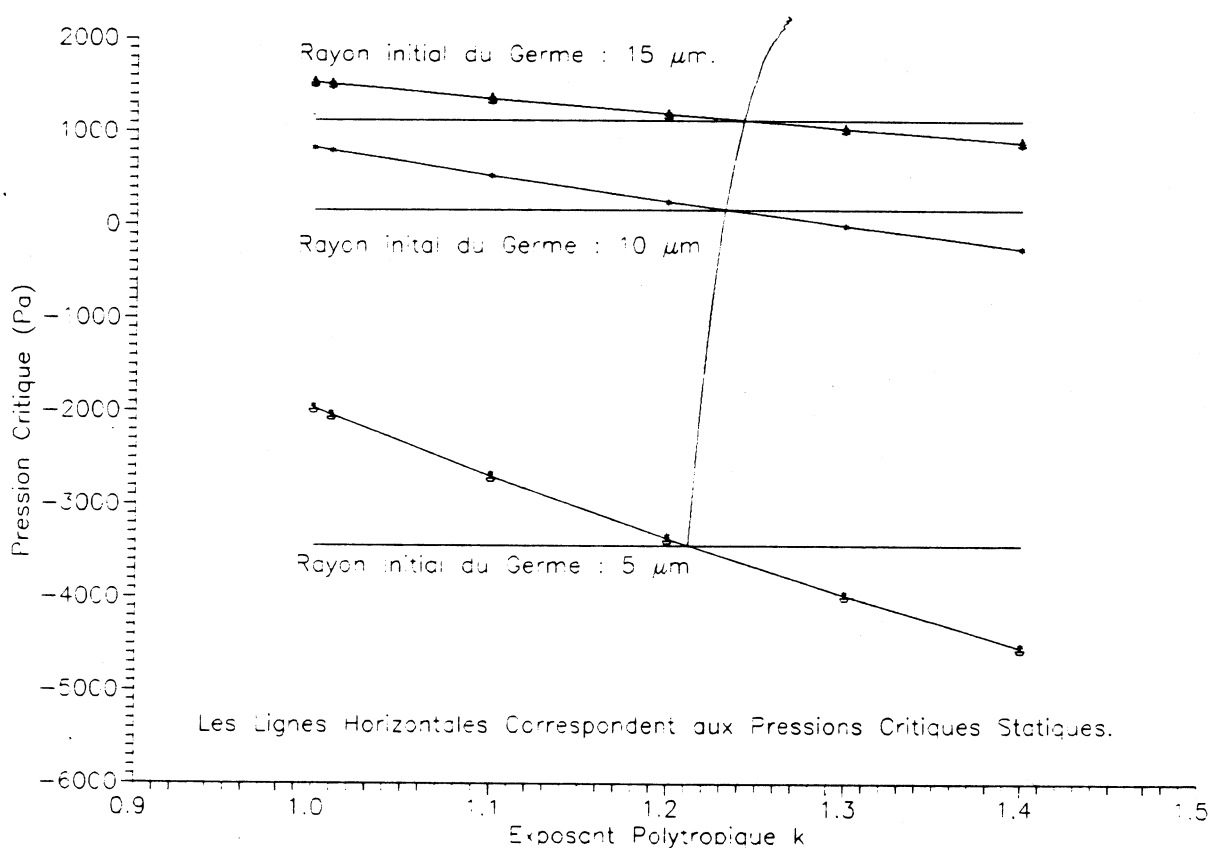


Figure 4 : Evolution de la pression critique dynamique en fonction de l'exposant polytropique et lieu des points où il y a égalité avec la pression critique statique isotherme.

Enfin, on s'est interrogé sur la validité de l'hypothèse de fluide parfait, faite dès le départ dans l'équation (1). L'équation de Rayleigh-Plesset, avec les termes visqueux, a donc été intégrée numériquement. La comparaison de ces pressions critiques avec celles déjà obtenues montre une coïncidence remarquable comme on peut le voir sur la Figure 5 et prouve que les termes visqueux sont bien négligeables.

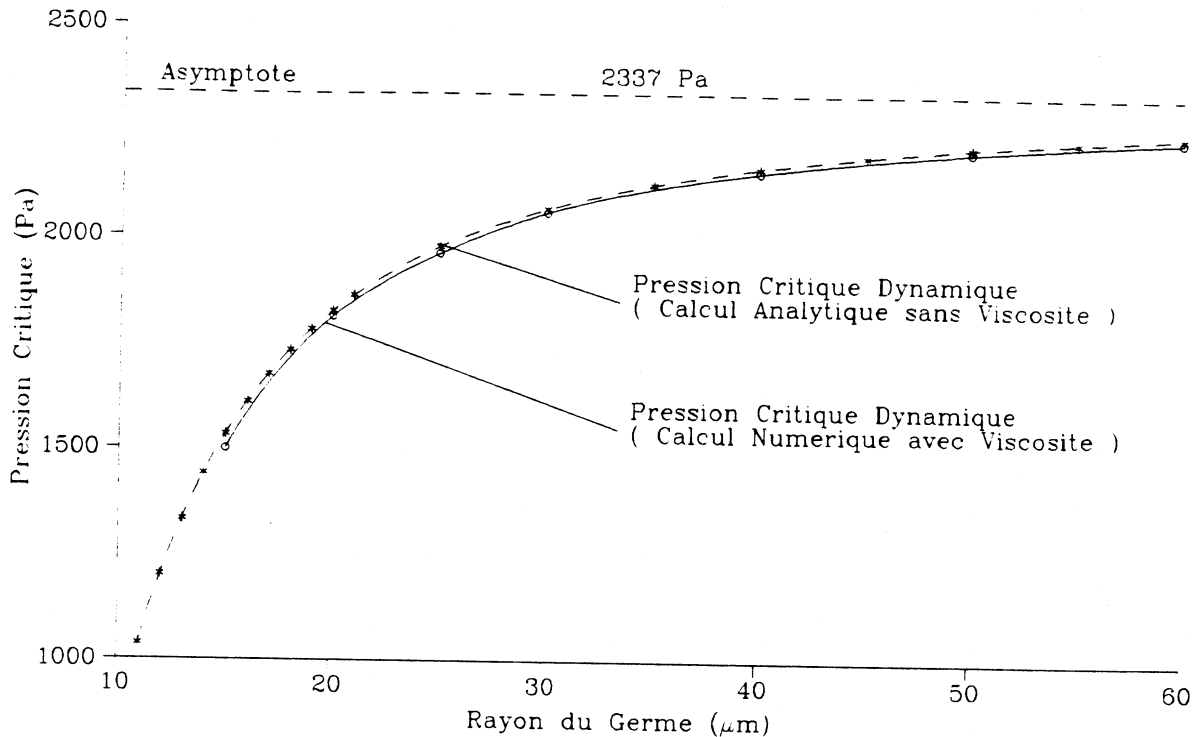


Figure 5 : Comparaison des pressions critiques dynamiques avec et sans viscosité.

5. CONCLUSION

L'étude de l'équation de Rayleigh-Plesset a été conduite dans le cas de germes soumis à un créneau de pression dans le but de déterminer les conditions critiques menant à leur croissance explosive. Les paramètres judicieux se sont avérés être deux nombres de Weber, l'un caractérisant l'état initial du germe, l'autre le saut de pression. Il apparaît que les seuils de pression obtenus dépendent du comportement thermique du mélange gaz-vapeur du germe, les écarts pouvant être considérables dans le cas de petits germes. D'autre part, la pression critique dynamique peut être, selon le coefficient polytropique du gaz, inférieure, égale ou supérieure à la pression critique quasi-statique isotherme habituellement prise en référence.

Ces résultats doivent permettre une meilleure interprétation des études numériques menées sur les phénomènes de croissance et collapse prématuré, des résultats des expériences relatives à l'apparition de la cavitation par bulles isolées dans les tunnels de cavitation et, en particulier, de celles caractérisant la population en germes au moyen d'un Venturi.

Référence :

Darrozes J S , Chahine G L

"Les recherches sur le phénomène de cavitation effectuées à l'Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées."

Sciences et Techniques de l'Armement, 1er fascicule 1983.