

**ANALYSE AU SECOND ORDRE
DE LA HOULE GENEREE EN BASSIN**
Application à la houle bichromatique

Loïc Boudet et Raymond Cointe
BASSIN D'ESSAIS DES CARENES
Chaussée du Vexin, 27100 VAL DE REUIL

Résumé

Le problème abordé est celui de l'analyse des ondes de second ordre basse-fréquence associées à une houle bichromatique monodirectionnelle. La procédure proposée permet d'identifier séparément les ondes liées aux composantes de premier ordre et les ondes parasites générées par le batteur ou réfléchies sur la plage absorbante. Afin d'obtenir une précision d'analyse satisfaisante, l'originalité de la méthode consiste à exploiter des mesures de pression au fond du bassin.

Quelques tests expérimentaux et numériques sont présentés afin d'évaluer la méthode proposée.

Summary

This paper deals with the analysis of low frequency second order gravity waves associated with a bichromatic wave train. We describe a method which permits the separation of "set-down", spurious waves generated at the wavemaker, and long waves reflected at the beach end. To obtain a good precision, this procedure is based on pressure measurements at the bottom of the tank.

Both experimental and numerical tests are presented to assess the accuracy of the method.

1 Introduction

Les projets d'études d'une structure océanique complexe requièrent l'évaluation de sa réponse aux sollicitations de la houle. Que ce soit par une approche expérimentale (essais en bassin) ou à l'aide de codes numériques de diffraction-radiation, l'un des problèmes majeurs reste la caractérisation de la houle sollicitant la structure.

L'objectif est de mettre au point une méthode pour améliorer la caractérisation de la houle générée en bassin, en tenant compte d'effets non-linéaires. L'application envisagée concerne l'analyse des composantes basse-fréquence associées à une houle bichromatique.

L'analyse de telles composantes présente un intérêt pour les essais de structures ayant des mouvements de grande amplitude à des fréquences faibles vis à vis des fréquences de houle. Ce comportement est caractéristique des systèmes flottants de production utilisés en off-shore, dont les périodes propres se situent au delà des périodes de houle. Cette caractéristique assure des réponses faibles aux fréquences de houle ; la contrepartie est qu'en houle irrégulière des réponses résonantes apparaissent aux périodes propres sous l'action de composantes non-linéaires d'efforts ou de sollicitations basse-fréquence de houle. Ce comportement affecte également les mouvements verticaux des sous-marins faiblement immergés et soumis à une houle irrégulière.

La procédure proposée est complémentaire de celles développées par Goda et Suzuki [1] puis Mansard et Funke [2]. Leurs travaux, basés sur des hypothèses de linéarités conduisant à représenter la houle comme la somme de houles monochromatiques, permettent d'identifier séparément les composantes incidentes et réfléchies (au premier ordre). La méthode décrite ici prend en compte les non-linéarités de "deuxième ordre" mais son application est limitée à la houle bichromatique.

On présente quelques tests expérimentaux afin d'évaluer la procédure proposée. On s'intéresse également aux phénomènes d'instabilités liés à l'effet des non-linéarités de surface libre sur l'évolution des trains d'ondes, et non prévus par la théorie au second ordre. Ces phénomènes se présentent en effet comme une éventuelle limitation à l'application de la procédure, mais aussi comme une difficulté à part entière pour la réalisation et l'interprétation des essais en houle bichromatique.

2 Principe d'analyse des composantes basse-fréquence

La méthode décrite par la suite concerne le cas d'une houle bichromatique dont la composante incidente de premier ordre est exprimée sous la forme :

$$X(x, t) = a_1 \sin(k_1 x - \omega_1 t + \Phi_1) + a_2 \sin(k_2 x - \omega_2 t + \Phi_2) \quad (1)$$

où ω_1 et ω_2 désignent les pulsations, Φ_1 et Φ_2 les déphasages relatifs aux origines d'espace et de temps choisies, et k_i les nombres d'onde vérifiant la relation de dispersion :

$$\omega_i^2 = g k_i \operatorname{th}(k_i H), \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

où H désigne la profondeur d'eau.

Le signal de second ordre associé, fluctuant à la pulsation $\omega_2 - \omega_1$, est exprimé comme la somme de trois composantes :

- une composante liée aux ondes incidentes de premier ordre qui se propage dans la même direction. La théorie potentielle classique, étendue au deuxième ordre d'approximation, fournit une expression analytique de cette composante ;
- une onde libre générée par le batteur qui accompagne la production des ondes de premier ordre. D'un point de vue théorique, l'existence de cette composante assure le respect de la condition de glissement au second ordre sur le volet ;
- une onde libre réfléchi sur la plage d'absorption du bassin qui se propage dans la direction opposée. Les plages classiques sont en effet peu efficaces pour l'amortissement des ondes longues.

La composante basse-fréquence s'exprime donc :

$$\begin{aligned} X_{bf}(x, t) = & C_i \sin\{(k_2 - k_1)x - (\omega_2 - \omega_1)t + \Phi_i\} \\ & + C_r \sin\{k^*x + (\omega_2 - \omega_1)t + \Phi_r\} \\ & + C_s \sin\{k^*x - (\omega_2 - \omega_1)t + \Phi_s\} \end{aligned} \quad (3)$$

où les indices i, s, r , correspondent respectivement à l'onde liée, à l'onde libre générée par le batteur et à l'onde libre réfléchie sur la plage ; k^* désigne le nombre d'onde associé aux ondes libres, et vérifie la relation de dispersion $(\omega_2 - \omega_1)^2 = gk^* \text{th}(k^*H)$.

Ces trois ondes ayant des caractéristiques spatiales différentes, la mesure simultanée de la houle en trois positions différentes (suivant la direction de propagation) permet de les identifier. On peut toutefois craindre que la méthode soit trop sensible aux erreurs de mesure (bruit, ondes transversales ...) ; la solution proposée consiste à utiliser une ou plusieurs sondes supplémentaires et à identifier le signal au sens des moindres carrés.

Pratiquement, on répartit P sondes ($P \geq 3$) selon la direction de propagation de la houle, et on enregistre simultanément les signaux temporels pour chacune des sondes. Pour chaque point de mesure, on identifie l'amplitude complexe basse-fréquence B_P ¹ du signal expérimental, fluctuant à la pulsation $\omega_2 - \omega_1$, à celle du signal théorique donné par l'équation (3) :

$$\begin{aligned} B_p \equiv & - C_i e^{-j\{(k_2 - k_1)x_p + \Phi_i\}} \\ & + C_r e^{j\{k^*x_p + \Phi_r\}} \\ & - C_s e^{-j\{k^*x_p + \Phi_s\}} \end{aligned} \quad (4)$$

Par la suite, on utilise les notations :

$$\begin{aligned} X_{1p} &= x_p - x_1 \\ Z_i &= C_i e^{-j\{(k_2 - k_1)x_1 + \Phi_i\}} \\ Z_r &= C_r e^{j\{k^*x_1 + \Phi_r\}} \\ Z_s &= C_s e^{-j\{k^*x_1 + \Phi_s\}} \end{aligned} \quad (5)$$

2.1 Identification directe

Dans ce cas, on utilise trois sondes de mesure ; cette méthode conduit à résoudre le système d'équations :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -e^{-j(k_2 - k_1)X_{12}} & e^{jk^*X_{12}} & -e^{-jk^*X_{12}} \\ -e^{-j(k_2 - k_1)X_{13}} & e^{jk^*X_{13}} & -e^{-jk^*X_{13}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_i \\ Z_r \\ Z_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Excepté dans le cas d'une très faible profondeur d'eau ($k^* \simeq k_2 - k_1$), ce système n'est jamais singulier, et il n'y a pas de conditions strictes à respecter pour l'espacement des sondes.

2.2 Identification au sens des moindres carrés

On considère cette fois le cas où on enregistre les signaux de houle en P ($P \geq 4$) positions différentes.

Le principe consiste à minimiser le carré moyen de l'erreur à chacune des sondes,

¹La composante de pulsation $\omega_2 - \omega_1$ du signal expérimental est donnée par $\Im\{B_p e^{j(\omega_2 - \omega_1)t}\}$ où $j^2 = -1$.

$$\epsilon^2 = \sum_{p=1}^P \left\| -Z_i e^{-j\Theta_p} + Z_r e^{j\Theta_p^*} - Z_s e^{-j\Theta_p^*} - B_p \right\|^2 \quad (7)$$

avec $\Theta_p = (k_2 - k_1)X_{1p}$ et $\Theta_p^* = k^* X_{1p}$

L'erreur est minimale quand les trois dérivées partielles suivantes sont nulles :

$$\frac{\partial \epsilon^2}{\partial Z_i} = \frac{\partial \epsilon^2}{\partial Z_r} = \frac{\partial \epsilon^2}{\partial Z_s} = 0 \quad (8)$$

Les composantes Z_i, Z_r, Z_s s'obtiennent finalement en résolvant le système :

$$\begin{pmatrix} \sum_{p=1}^P e^{-2j\Theta_p} & -\sum_{p=1}^P e^{j(\Theta_p^* - \Theta_p)} & \sum_{p=1}^P e^{-j(\Theta_p^* + \Theta_p)} \\ -\sum_{p=1}^P e^{j(\Theta_p^* - \Theta_p)} & \sum_{p=1}^P e^{2j\Theta_p^*} & -P \\ \sum_{p=1}^P e^{-j(\Theta_p^* + \Theta_p)} & -P & \sum_{p=1}^P e^{-2j\Theta_p^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_i \\ Z_r \\ Z_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_{p=1}^P B_p e^{-j\Theta_p} \\ \sum_{p=1}^P B_p e^{j\Theta_p^*} \\ -\sum_{p=1}^P B_p e^{-j\Theta_p^*} \end{pmatrix} \quad (9)$$

2.3 Choix des capteurs de mesure

Pour l'identification des composantes linéaires de houle, on s'appuie naturellement sur la mesure des élévations de surface libre. Lorsqu'on s'intéresse aux composantes non-linéaires basse-fréquence, l'analyse des déformées de surface libre n'est pas satisfaisante, car les amplitudes associées sont très petites par rapport à celles des composantes fondamentales.

La méthodologie retenue consiste à utiliser des capteurs de pression disposés au fond du bassin ; ce choix est motivé par le fait que les composantes basse-fréquence décroissent plus lentement avec la profondeur que les ondes de premier ordre. Les signaux de pression paraissent donc mieux adaptés à l'analyse envisagée. En contrepartie, ce choix complique singulièrement la procédure expérimentale, et il reste à s'assurer que des effets perturbateurs (courant, dissipation) n'altèrent pas la mesure.

3 Présentation du dispositif expérimental

Les essais ont été réalisés dans un bassin de traction situé au Bassin d'Essais des Carènes, à Paris (Bassin n°2). Cette installation a une longueur de 150m, une largeur de 8m et une hauteur d'eau fixée pour ces essais à 1.8m ; elle est équipée à une extrémité d'un batteur de type volet actionné par un vérin hydraulique et, à l'autre extrémité, d'un dispositif d'absorption passive de configuration classique.

L'équipement de mesure comprenait :

- cinq détecteurs de houle capacitifs pour les mesures de déformées de surface libre, dont la technologie évite toute interaction (électronique) entre sondes voisines ;
- cinq transmetteurs de pression différentiels immergeables d'une étendue de mesure de $\pm 10\text{mbar}$ devant assurer, pour les périodes de houle étudiées, une précision de mesure satisfaisante des pressions dynamiques au fond du bassin.

Les capteurs de pression étaient disposés dans l'axe médian du bassin et espacés de 6m les uns des autres, le premier étant placé à 12m environ du batteur. Les détecteurs capacitifs étaient placés sous la plate-forme de traction aux distances suivantes du batteur : 12m, 20.63m, 22.33m, 24.08m, 27.1m. Les lyres (1, 2, 5) étaient placées dans l'axe médian du bassin et les lyres (3, 4) étaient décalées latéralement de 0.2m de part et d'autre de l'axe médian afin d'éviter que les légères perturbations de l'écoulement induites par les supports de lyres n'affectent les mesures.

Le temps d'attente entre deux essais consécutifs était de 30 minutes environ, afin d'éviter les perturbations occasionnées par les tests précédents. Chaque acquisition comprenait 2048 points de mesure, les cadences d'acquisition étant de l'ordre de 25 points pour la plus petite période excitée.

Le programme d'essais comprenait sept conditions de houle bichromatique, dont on donne la liste ci-dessous ; chaque cas d'essai a fait l'objet de tests à trois cambrures différentes au minimum ($k_1 a_1$ et $k_2 a_2$ inférieurs à 10%).

cas	1	2	3	4	5	6	7
ω_1 (rad/s)	3.694	3.927	3.694	3.694	3.927	3.694	3.694
ω_2 (rad/s)	3.896	4.128	3.946	4.009	4.241	4.128	4.323

Avant ces essais, une série de tests préliminaires en houle régulière avait permis d'évaluer les coefficients de réflexion²(au premier ordre) pour les périodes étudiées. Les coefficients de réflexion obtenus sont inférieurs à 4% .

4 Phénomènes d'instabilités en houle bichromatique

Lors de tests préliminaires en houle bichromatique, les sondes de mesure étaient placées à une quarantaine de mètres du batteur. L'analyse visuelle des signaux temporels et des spectres de déformées de surface libre révélait la présence de composantes aux pulsations $2\omega_2 - \omega_1$ et $2\omega_1 - \omega_2$, et d'amplitude non négligeable pour certains cas d'essais (on parlera également d'instabilités pour employer le terme consacré).

En toute rigueur, la procédure d'analyse des composantes basse-fréquence ne paraît plus valide dès lors que ces instabilités sont nettement développées ; il faudrait recourir à un modèle de houle quadri-chromatique. Une étude complémentaire de ces modifications du système de houle est donc nécessaire afin d'évaluer les limites éventuelles d'application de la procédure proposée en fonction du niveau de développement de ces instabilités.

En premier lieu, l'exploitation des quelques séquences d'essais préliminaires indique, qualitativement, les comportements suivants :

- pour un couple de composantes fondamentales de pulsations ω_1 et ω_2 , et à une position donnée dans le bassin, l'amplitude relative des instabilités (rapportée à l'amplitude des composantes fondamentales) croît avec la cambrure ;
- les amplitudes des composantes fondamentales (ω_1, ω_2) sont sensiblement altérées par rapport à leurs valeurs à proximité du batteur ;
- le niveau de développement des instabilités dépend de la différence de pulsation ($\omega_2 - \omega_1$).

Il est manifeste que les modèles linéaires d'évolution de houle ne peuvent expliquer ce comportement, ni même la prise en compte de non-linéarités de "deuxième ordre". En effet, si l'on considère la coexistence de deux houles régulières (ω_1, ω_2), les ondes de second ordre associées apparaissent aux pulsations $\omega_2 - \omega_1$ et $\omega_2 + \omega_1$.

En fait, il faut recourir à des modèles prenant en compte les non-linéarités de surface libre de troisième ordre pour justifier ce phénomène. Les premiers travaux menés sur ce sujet par Phillips [3] suggéraient que des interactions de "troisième ordre" entre deux ondes planes pouvaient entraîner le développement d'une troisième composante. Ces idées ont ensuite été confirmées expérimentalement par Longuet-Higgins et Smith [4] d'une part, Goldrick et al. [5] d'autre part. Dans le cas monodirectionnel, cette théorie justifie l'apparition d'une composante de pulsation $2\omega_2 - \omega_1$ et, symétriquement, de pulsation $2\omega_1 - \omega_2$.

4.1 Simulation numérique du phénomène

Pour compléter les observations faites à partir des premières séquences d'essais, quelques simulations numériques d'évolution d'un train d'ondes bichromatique ont été réalisées avec le logiciel

²Ce coefficient est défini comme le rapport de l'amplitude de l'onde réfléchie sur l'amplitude de l'onde incidente.

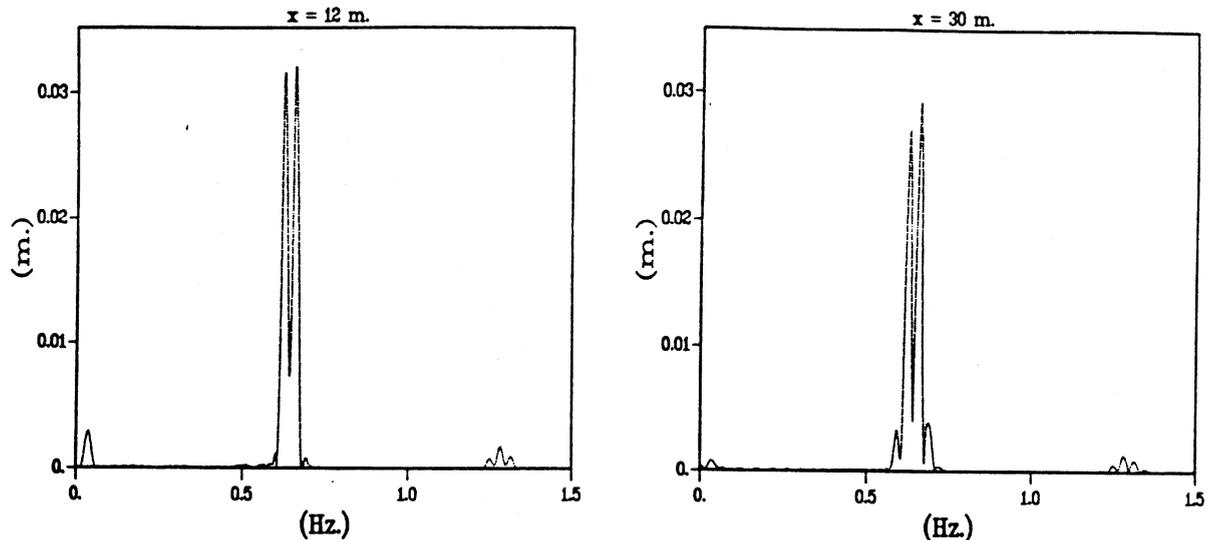


Figure 1: Spectres d'élévations, Sindbad, Cas 1

SINDBAD [6,7]. Ce logiciel permet la résolution de l'écoulement (supposé potentiel) dans le bassin en prenant en compte l'ensemble des conditions aux limites non-linéaires, aussi bien sur la batteur que sur la surface libre. Une approche numérique permet d'aborder le problème sans difficultés particulières, l'intérêt majeur étant de disposer de "mesures" de houle en n'importe quelle position dans le canal, ainsi que de celles des vitesses et pressions dans le fluide.

On présente les résultats de deux simulations réalisées dans des conditions identiques à l'exception de la cambrure de houle : la longueur du bassin est de 100 m, la profondeur d'eau de 1.8 m ; le batteur de type piston, initialement au repos, est mis en mouvement bichromatique ($\omega_1 = 3.927$, $\omega_2 = 4.128$). Les calculs sont effectués avec 25 points de discrétisation pour la plus petite longueur d'onde et 25 pas de temps pour la plus petite période. Pour les cas étudiés, les cambrures, calculées à 12m du batteur sont :

- Cas n°1 : $k_1 a_1 = 5.5\%$ $k_2 a_2 = 5.5\%$;
- Cas n°2 : $k_1 a_1 = 7.8\%$ $k_2 a_2 = 8.1\%$.

Pour un temps de simulation de 150 sec., le temps de calcul est d'environ 58 heures sur l'Alliant FX80 du Bassin d'Essais des Carènes. La figure 1 représente, dans le cas n°1, les spectres d'élévations de surface libre calculées respectivement à 12m et 30m du batteur. La figure 2 illustre l'évolution longitudinale des amplitudes des composantes fondamentales et de celles des instabilités.

Ces résultats confirment l'existence des échanges d'énergie prédits par les modèles au "troisième ordre", et sont en accord avec les tendances observées expérimentalement. On note initialement une croissance régulière des instabilités, la composante de pulsation $2\omega_2 - \omega_1$ étant plus développée que celle de pulsation $2\omega_1 - \omega_2$; on observe ensuite une modulation de ces instabilités qui s'accompagne d'une variation sensible des amplitudes des composantes fondamentales. On remarque également que les amplitudes des instabilités augmentent avec la cambrure de houle.

Le paragraphe suivant est consacré à la présentation d'un modèle (approché) d'évolution des instabilités. Les travaux présentés sont inspirés d'une étude bibliographique de Molin [8] qui expose l'état des connaissances sur les non-linéarités de surface libre, et leurs effets sur l'évolution de la houle.

4.2 Modèle d'évolution des instabilités

Le modèle proposé est basé sur l'utilisation de l'équation non-linéaire de Schrödinger qui décrit l'évolution lente de la courbe enveloppe sous l'effet des non-linéarités de surface libre. Cette

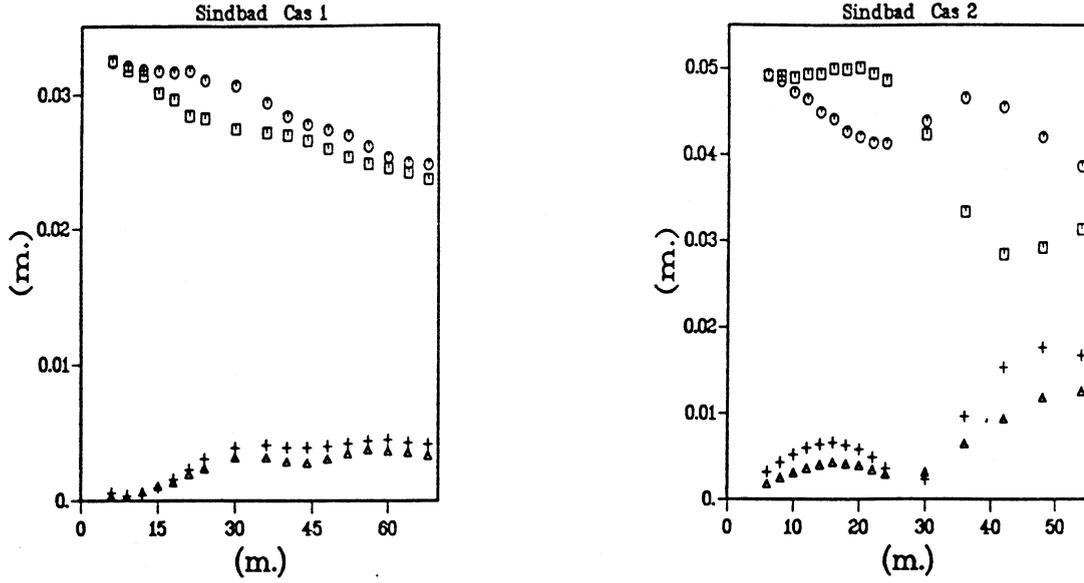


Figure 2: Evolution longitudinale des amplitudes de houle,
 \square : ω_1 , \odot : ω_2 , \triangle : $2\omega_1 - \omega_2$, $+$: $2\omega_2 - \omega_1$

équation repose sur des approximations et n'est exacte qu'au troisième ordre d'approximation. Son domaine de validité est restreint au cas des houles de faible cambrure et de spectre étroit. Malgré ce contexte assez restrictif, ce modèle permet de décrire de façon satisfaisante l'apparition d'instabilités en houle régulière, en particulier celles de Benjamin-Feir [9], qu'avait mise en évidence expérimentalement Benjamin [10].

L'élévation de surface libre η est écrite en fonction de l'enveloppe complexe A sous la forme

$$\eta = \text{Re}\{A(x,t)e^{j(kx-\omega t)}\} \quad (10)$$

où ω définit une pulsation moyenne autour de laquelle sont centrées les pulsations et k un nombre d'onde moyen qui vérifie la relation de dispersion :

$$\omega^2 = gk \text{th}(kH) \quad (11)$$

On établit, en profondeur finie et pour une houle unidirectionnelle, que l'évolution de l'enveloppe complexe obéit à l'équation de Schrödinger suivante :

$$j \left[A_t + \frac{\partial \omega}{\partial k} A_x \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} A_{xx} + \beta A A^* A = 0 \quad (12)$$

où A^* désigne le complexe conjugué de A et où β s'exprime :

$$\beta = \frac{-\omega k^2}{16 \text{sh}^4 kH} (\text{ch} 4kH + 8 - 2 \text{th}^2 kH) + \frac{\omega}{2 \text{sh}^2 2kH} \frac{(2\omega \text{ch}^2 kH + k \frac{\partial \omega}{\partial k})^2}{gk - (\frac{\partial \omega}{\partial k})^2} \quad (13)$$

$\partial \omega / \partial k$ et $\partial^2 \omega / \partial k^2$ s'obtiennent à partir de la relation de dispersion.

Pour le cas étudié, l'élévation de surface libre, au premier ordre d'approximation, est exprimée sous la forme :

$$\eta = a_1 \sin(k_1 x - \omega_1 t + \Phi_1) + a_2 \sin(k_2 x - \omega_2 t + \Phi_2) \quad (14)$$

On pose $\Delta \omega = (\omega_2 - \omega_1)/2$ ($\omega_2 > \omega_1$) et on exprime Δk à partir de la relation de dispersion :

$$\Delta k = \frac{2\omega}{g} \Delta \omega [\text{th}(kH) + kH(1 - \text{th}^2 kH)]^{-1} \quad (15)$$

On s'intéresse au développement initial des instabilités de pulsations $\omega \pm 3\Delta\omega$ en supposant que les composantes fondamentales $\omega \pm \Delta\omega$ ne sont pas altérées. On recherche donc l'enveloppe complexe sous la forme :

$$A(x, t) = -j a_1 e^{j\Phi_1} e^{-j(\Delta k x - \Delta \omega t)} - j a_2 e^{j\Phi_2} e^{j(\Delta k x - \Delta \omega t)} + f_1(x) e^{-3j(\Delta k x - \Delta \omega t)} + f_2(x) e^{3j(\Delta k x - \Delta \omega t)} \quad (16)$$

en imposant que les amplitudes f_1 et f_2 des instabilités sont nulles au niveau du batteur :

$$f_1(0) = f_2(0) = 0 \quad (17)$$

Pour le calcul de f_1 et f_2 , il suffit d'exprimer les composantes en $e^{\pm 3j(\Delta k x - \Delta \omega t)}$ du terme non linéaire AA^*A ; en exceptant les termes d'ordre 3 en f_1 et f_2 , on obtient une expression de la forme :

$$-j a_1^2 a_2 e^{j(2\Phi_1 - \Phi_2)} e^{-3j\theta} - j a_1 a_2^2 e^{j(2\Phi_2 - \Phi_1)} e^{3j\theta} + 2(a_1^2 + a_2^2)(f_1 e^{-3j\theta} + f_2 e^{3j\theta}) - 2a_1 a_2 e^{j(\Phi_1 + \Phi_2)}(f_1^* e^{3j\theta} + f_2^* e^{-3j\theta}) \quad (18)$$

avec $\theta = \Delta k x - \Delta \omega t$

En reportant cette expression dans l'équation de Schrödinger, on aboutit aux équations en f_1 et f_2

$$\frac{\alpha_2}{2} f_1'' + j A_1 f_1' + B f_1 + C f_2^* = D_1 \quad (19)$$

$$\frac{\alpha_2}{2} f_2'' + j A_2 f_2' + B f_2 + C f_1^* = D_2 \quad (20)$$

$$\alpha_1 = \frac{\partial \omega}{\partial k}, \quad \alpha_2 = \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}$$

$$A_1 = \alpha_1 - 3\alpha_2 \Delta k, \quad A_2 = \alpha_1 + 3\alpha_2 \Delta k$$

$$B = 2\beta(a_1^2 + a_2^2) - \frac{9}{2}\alpha_2 \Delta k^2, \quad C = -2a_1 a_2 \beta e^{j(\Phi_1 + \Phi_2)}$$

$$D_1 = j\beta a_1^2 a_2 e^{j(2\Phi_1 - \Phi_2)}, \quad D_2 = j\beta a_1 a_2^2 e^{j(2\Phi_2 - \Phi_1)}$$

Les équations (19) et (20) sont résolues par développement en série, en négligeant les dérivées secondes³ (on vérifie a posteriori qu'on peut admettre cette simplification). On exprime f_1 et f_2 sous la forme :

$$f_1 = \sum_l u_l (k^3 a_1 a_2 x)^l, \quad f_2 = \sum_l v_l (k^3 a_1 a_2 x)^l \quad (21)$$

où les coefficients u_l et v_l s'obtiennent par récurrence :

$$u_1 = -j \frac{D_1}{k^3 a_1 a_2 A_1}, \quad v_1 = -j \frac{D_2}{k^3 a_1 a_2 A_2}$$

$$u_{l+1} = j \frac{B u_l + C v_l^*}{k^3 a_1 a_2 A_1 (l+1)}, \quad v_{l+1} = j \frac{B v_l + C u_l^*}{k^3 a_1 a_2 A_2 (l+1)}, \quad (l \geq 1) \quad (22)$$

Sur la figure 3, on compare les résultats du modèle et de SINDBAD, pour les deux cas testés. On observe que ce modèle approché reproduit de façon satisfaisante l'évolution initiale des instabilités mais n'est plus valide à des distances où il apparaît une modulation dans la croissance de ces composantes.

³La prise en compte des dérivées secondes nécessite de trouver deux conditions initiales supplémentaires

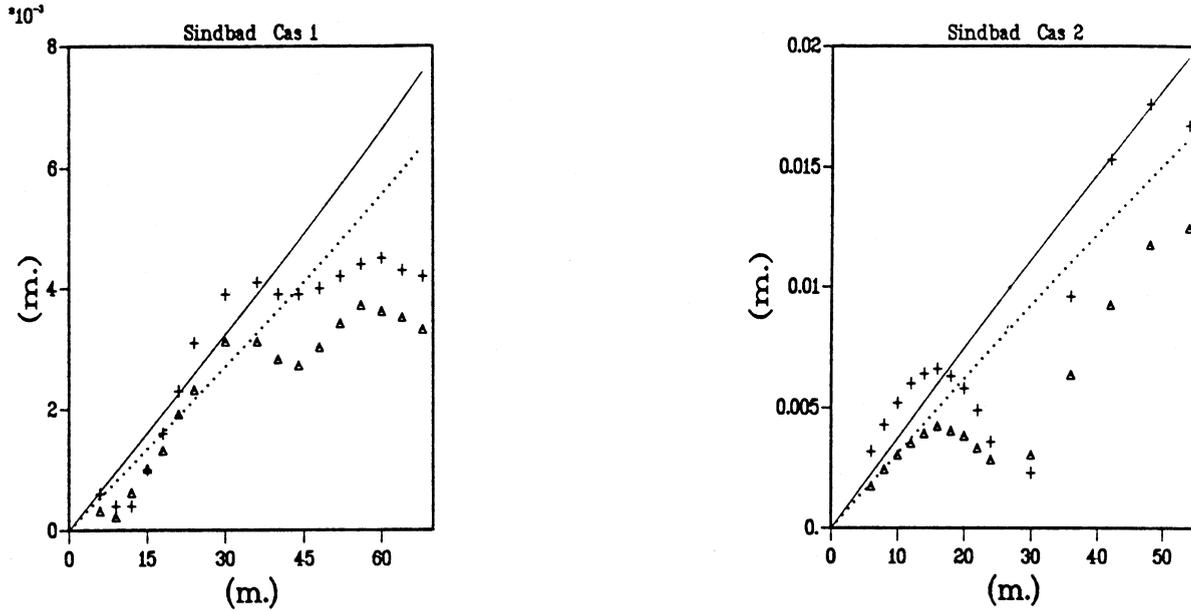


Figure 3: Modèle d'évolution des instabilités,
 SINDBAD : Δ : $2\omega_1 - \omega_2$, $+$: $2\omega_2 - \omega_1$
 Modèle : : $2\omega_1 - \omega_2$ (module) , - - - : $2\omega_2 - \omega_1$ (module)

Cette étude succincte a été réalisée essentiellement pour justifier l'origine des phénomènes observés expérimentalement. On a pu constater que les effets des non-linéarités se font ressentir même à proximité du batteur, et qu'ils entraînent également une variation sensible de l'amplitude des composantes fondamentales. Pour évaluer précisément les limites du modèle, il faudrait résoudre les équations couplées en a_1 , a_2 , f_1 et f_2 .

5 Résultats expérimentaux

On présente quelques tests expérimentaux dans le but d'évaluer la procédure d'analyse des composantes basse-fréquence. Les figures illustrent les résultats obtenus pour des cambrures de houle assez fortes, où les phénomènes basse-fréquence sont plus significatifs :

- cas (a) : figures (4, 5, 6, 7) $\omega_1 = 3.927$, $\omega_2 = 4.128$, $k_1 a_1 = 7.7\%$, $k_2 a_2 = 9.1\%$
- cas (b) : figures (8, 9) $\omega_1 = 3.694$, $\omega_2 = 3.896$, $k_1 a_1 = 8.6\%$, $k_2 a_2 = 10.5\%$

Les cambrures indiquées sont calculées à 12m du batteur.

Les figures 4 et 6 représentent les signaux temporels enregistrés pour le cas (a). Sur les signaux d'élévations, on observe une légère dissymétrie des groupes qui traduit l'existence de composantes de pulsations $2\omega_2 - \omega_1$ et $2\omega_1 - \omega_2$; les exemples de spectres correspondants le confirment (figure 5).

Sur les signaux de pression (figure 6 et 8), on note une décroissance de l'amplitude des composantes fondamentales (ω_1, ω_2) avec la distance. Ce comportement a été observé pour tous les cas d'essais, y compris lors des tests préliminaires en houle monochromatique. Des tests numériques réalisés avec le logiciel SINDBAD ne mettent pas en évidence le même phénomène. Ce comportement pourrait s'expliquer par des effets d'origine visqueuse. Toutefois, le développement d'un courant moyen lié au transport de masse (qui pourrait induire le développement d'une couche limite sur le fond) ne fournit pas une explication satisfaisante ; on observe en effet sur les signaux de pression que le phénomène apparaît intantamment.

L'observation des signaux de pression montre également l'existence d'une composante basse-fréquence (figures 6, 7, 8, 9), en particulier sur les signaux mesurés à 36m du batteur. On ne constate pas, pour cette gamme de fréquences, de décroissance longitudinale de la pression. Pour la gamme de pulsations étudiées, les pressions induites par les composantes fondamentales sont

tout de même prépondérantes. Malgré cela on conçoit bien l'intérêt de se baser sur la mesure des pressions pour l'analyse des composantes basse-fréquence.

Pour tester la méthode d'analyse, nous nous sommes basés sur les critères suivants :

- L'amplitude de l'onde liée (aux ondes de premier ordre) calculée par la procédure a été comparée systématiquement à la valeur prédite par la théorie potentielle . Les valeurs calculées par la procédure sont supérieures, les écarts relatifs étant le plus souvent inférieurs à 15% ; l'écart maximum constaté pour un cas d'essai est de 22%.

- La procédure d'identification (au sens des moindres carrés) a été répétée plusieurs fois pour chaque essai, en se basant sur les mesures de quatre capteurs (1,2,4,5), (1,3,4,5), puis des cinq. On observe des écarts relatifs généralement inférieurs à 15% , aussi bien pour l'onde liée que pour les ondes libres.

- On a comparé, pour chacune des cinq mesures de pression, la composante des signaux expérimentaux fluctuant à la pulsation $\omega_2 - \omega_1$ avec le signal basse-fréquence calculé par la procédure d'analyse (équation (3)). Ces comparaisons sont très satisfaisantes. A titre d'exemple, on a superposé sur la figure 8, les cinq signaux de pression et la composante basse-fréquence identifiée par la procédure.

Des tests identiques ont été effectués à partir des simulations numériques réalisées avec SINDBAD. Sur la figure 10, les résultats obtenus pour le cas n°2 sont illustrés ; on a superposé les signaux temporels de pression et la composante basse-fréquence calculée par la procédure. Pour ce cas, la cinématique basse-fréquence est essentiellement contrôlée par les ondes libres, ce qui n'est pas observé expérimentalement. Il est probable que l'amortissement "numérique" des ondes longues est moins efficace (longueur du canal, "plage numérique", pas de dissipation), ce qui entraîne l'excitation d'un mode propre du canal.

Dans la limite des critères utilisés pour tester cette méthode, les résultats sont satisfaisants. On peut également constater que l'existence de phénomènes d'instabilités ne met pas en défaut la procédure proposée. Toutefois, la nature de ces phénomènes implique que la cinématique basse-fréquence ainsi calculée n'a qu'une valeur locale. Enfin, on illustre sur la figure 11 l'observation expérimentale de phénomènes d'instabilités pour les cas (a) et (b); les valeurs expérimentales sont comparées aux résultats du modèle décrit au paragraphe 4.2.

Conclusion

L'étude présentée montre le caractère essentiel de la caractérisation de la houle pour l'étude du comportement non-linéaire (basse-fréquence) de structures océaniques.

La procédure d'analyse des ondes de second ordre basse-fréquence donne des résultats encourageants ; pour obtenir une précision d'analyse satisfaisante, il semble intéressant de se baser sur des mesures de pression au fond du bassin. Toutefois, les travaux réalisés sont insuffisants pour s'assurer du bien-fondé de cette démarche expérimentale. Il reste en particulier à expliquer la décroissance longitudinale des pressions "haute-fréquence" ; pour étudier la validité des développements théoriques au second ordre d'approximation, il serait également nécessaire d'analyser les corrélations entre les pressions mesurées au fond et les vitesses dans le fluide.

Les tests numériques et expérimentaux ont également permis de mettre en évidence l'importance des effets des non-linéarités sur l'évolution des trains d'ondes bichromatiques (monodirectionnels). Ces effets peuvent être minimisés en réalisant les essais à proximité du batteur, mais posent de réels problèmes pour l'interprétation d'essais à forte cambrure de houle. L'étude des effets de "troisième ordre" avait pour but essentiel de justifier l'origine des phénomènes observés expérimentalement. Les équations de Schrödinger ont été traitées de manière incomplète ; il serait nécessaire de prendre en compte l'évolution longitudinale des composantes fondamentales pour vérifier la validité de ce modèle.

Remerciements

Nous remercions Monsieur B. Molin de l'I.F.P. pour l'importante contribution qu'il a apportée à cette étude.

Ces travaux ont été effectués dans le cadre de conventions entre le Bassin d'Essais des Carènes et la D.R.E.T. (contrats n°90/1004J et 89/1052). Le logiciel Sindbad a été développé à l'I.F.P. dans le cadre de la convention D.R.E.T. n°88/073. Cette dernière est remerciée pour son soutien.

References

- [1] Y. Goda et Y. Suzuki, 1976, "Estimation of incident and reflected waves in random wave experiments", Proc. 15th Coastal Eng. Conf., Honolulu, Hawaii.
- [2] E.P.D. Mansard et E.R. Funke, 1980, "The measurement of incident and reflected spectra using a least squares method", Proc. 17th Coastal Eng. Conf., Sydney, Australia.
- [3] O.M. Phillips, 1960, "On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude. Part. 1 The elementary interactions", J. Fluid Mech. n° 9.
- [4] M.S. Longuet-Higgins et N.D. Smith, 1966, "An experiment on third-order resonant wave interactions", J. Fluid Mec. n° 25.
- [5] L.F. McGoldrick, O.M. Phillips, N.E. Huang et T.H. Hodgson, 1966, "Measurements of third-order resonant wave interactions", J. Fluid Mec. n° 25.
- [6] R. Cointe, 1989, "Calcul des efforts hydrodynamiques sur un cylindre horizontal en théorie potentielle non-linéaire", Deuxièmes Journées de l'Hydrodynamique, Nantes.
- [7] R. Cointe, 1989, "Quelques aspects de la simulation numérique d'un canal à houle", Thèse de doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.
- [8] B. Molin, 1986, "Houle non-linéaire, Etude bibliographique", Rapport A.R.A.E., Ref. I.F.P. n°34505.
- [9] T.B. Benjamin et J.E. Feir, 1967, "The desintegration of wave trains on deep water, Part. 1 Theory", J. Fluid Mec. n°27.
- [10] T.B. Benjamin, 1967, "Instability of periodic wave trains in nonlinear dispersive systems", Proc. R. Soc. London A. n°299.

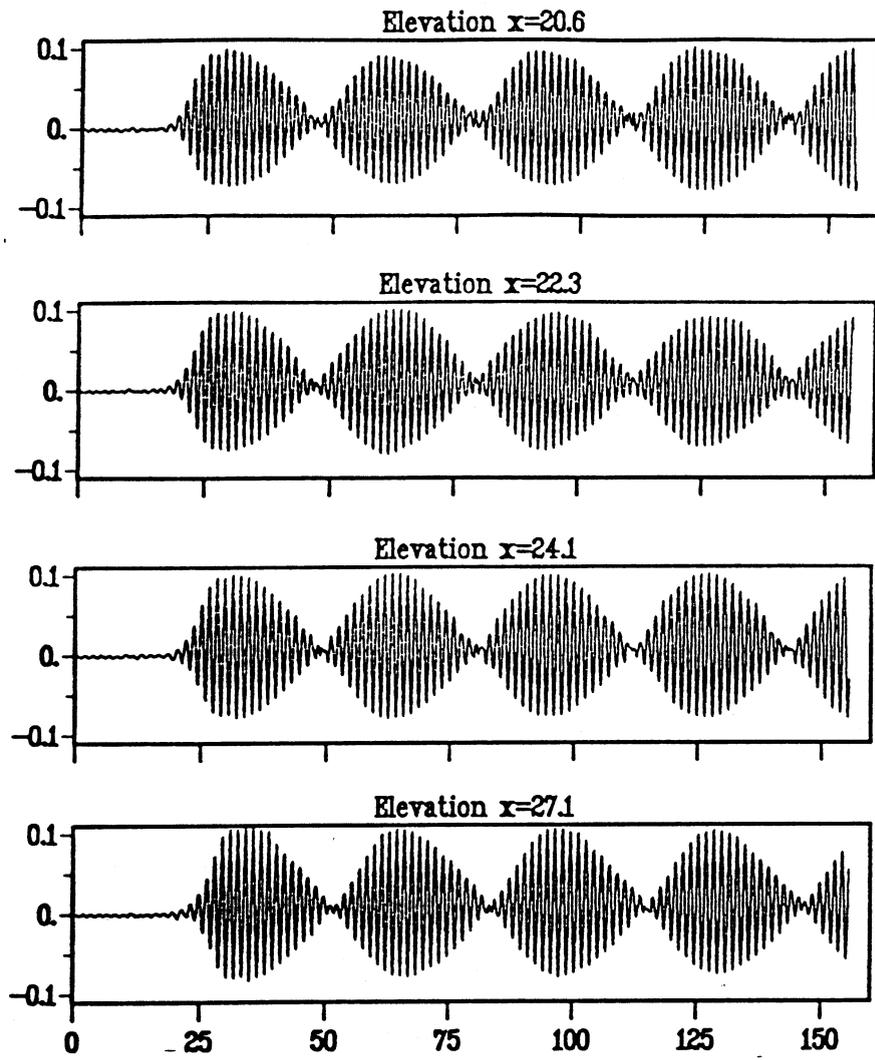


Figure 4: Déformées de surface libre (m) en fonction du temps (sec.), cas (a)

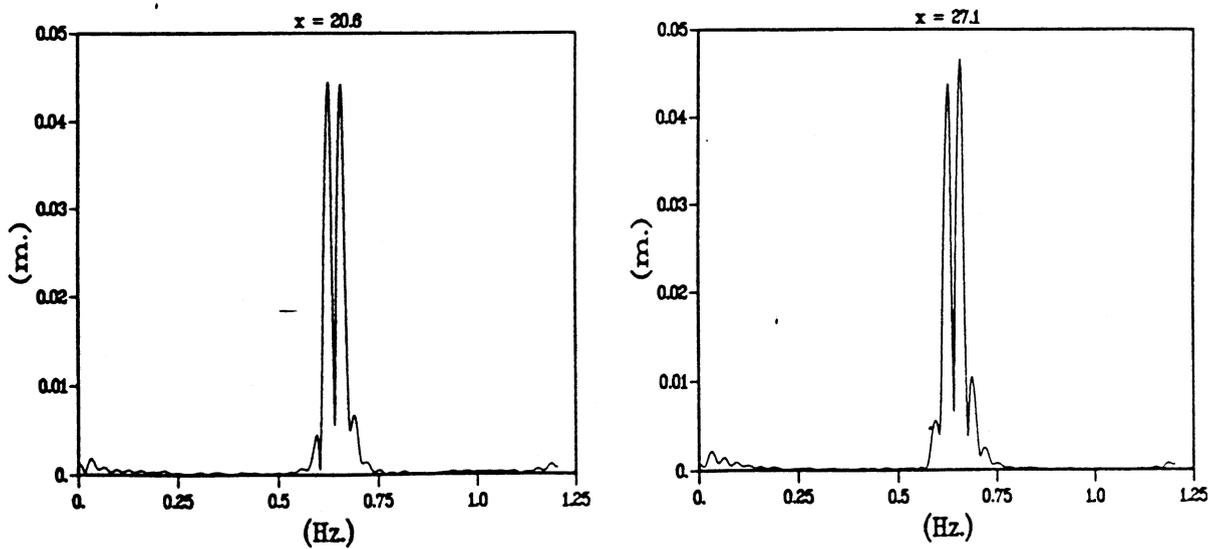


Figure 5: Spectres d'élévations, cas (a)

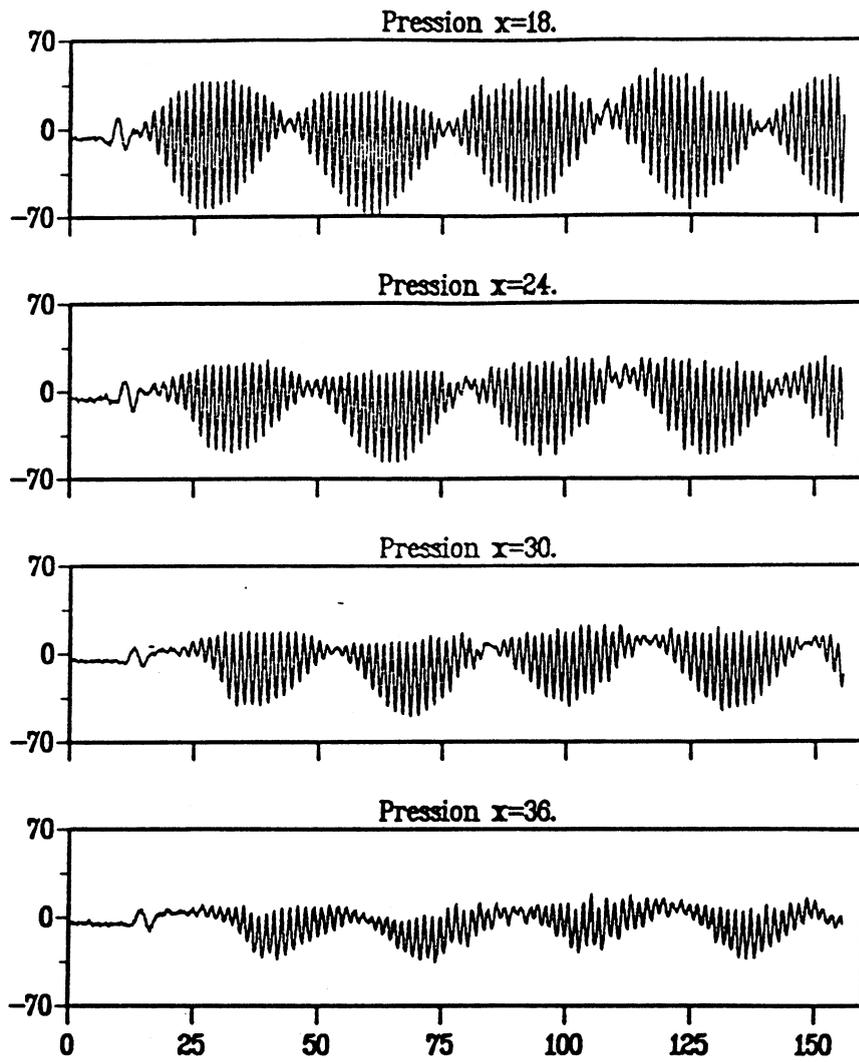


Figure 6: Pressions (Pa) au fond en fonction du temps ($sec.$), cas (a)

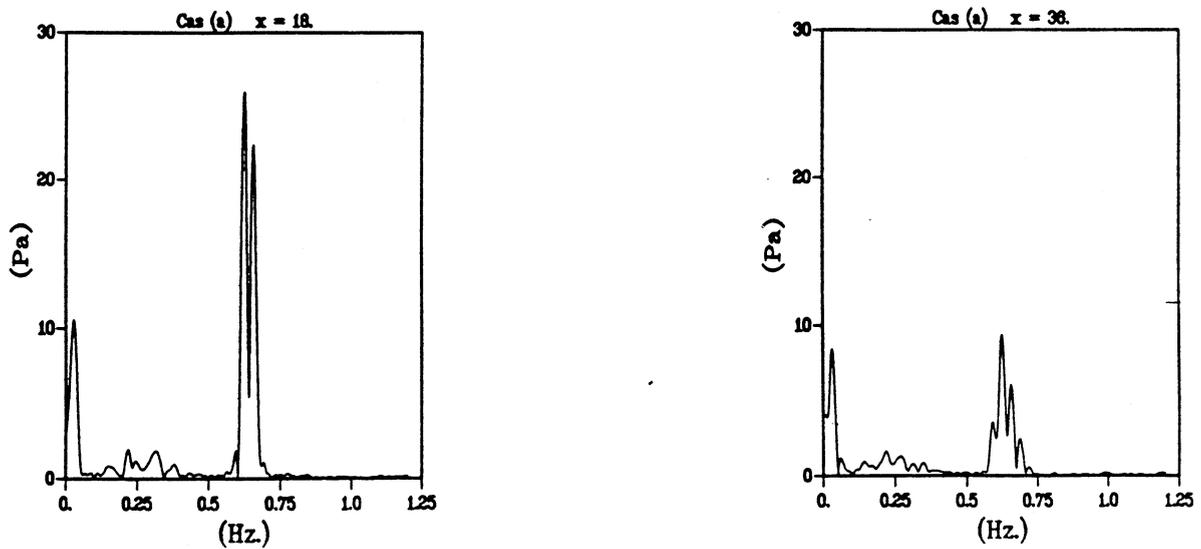


Figure 7: Spectres de pression, cas (a)

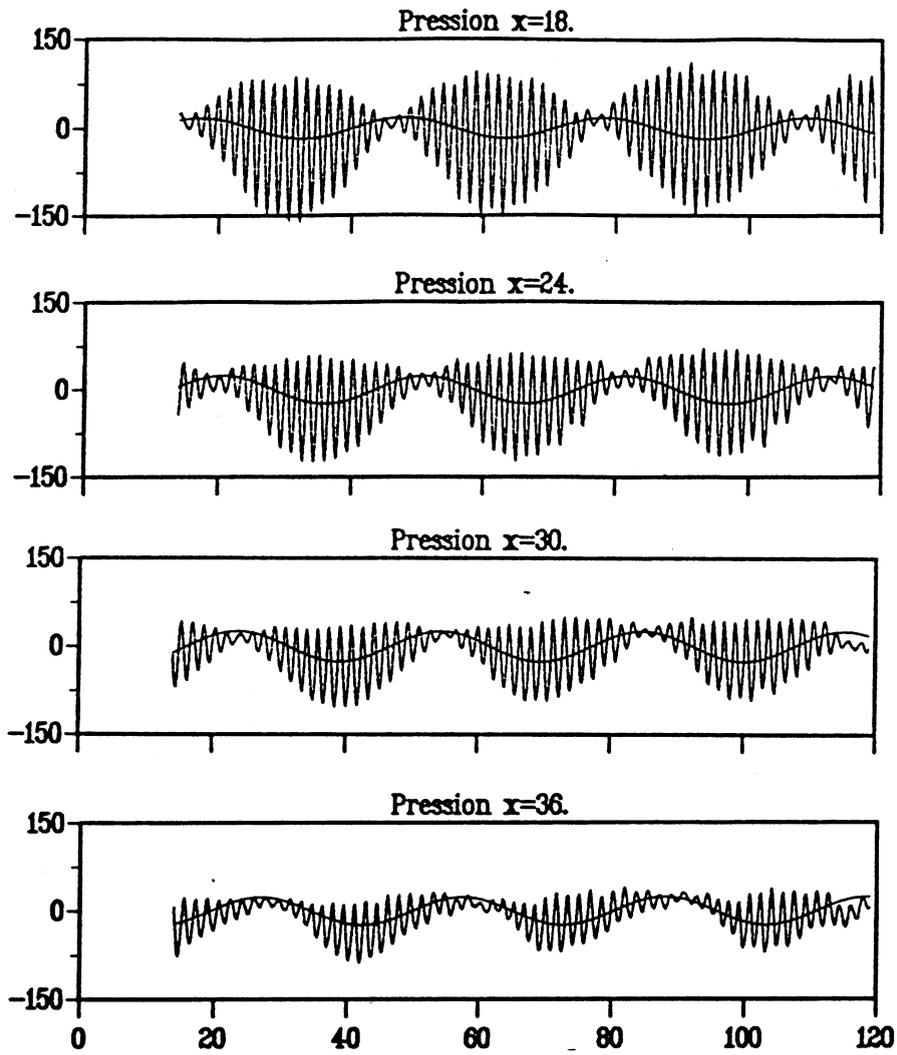


Figure 8: Pressions (Pa) au fond en fonction du temps ($sec.$), cas (b)

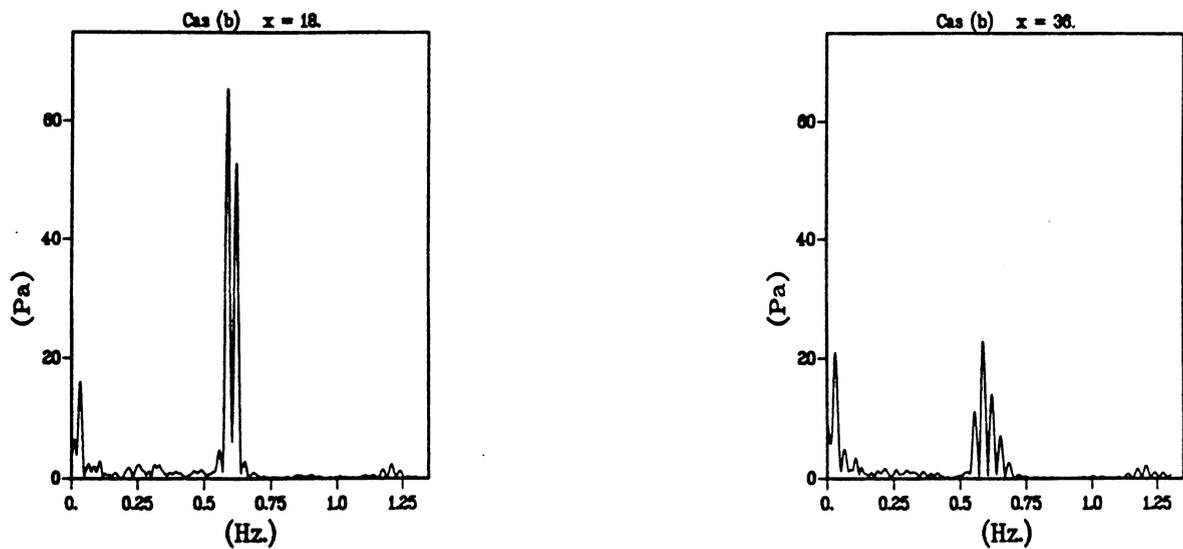


Figure 9: Spectres de pression, cas (b)

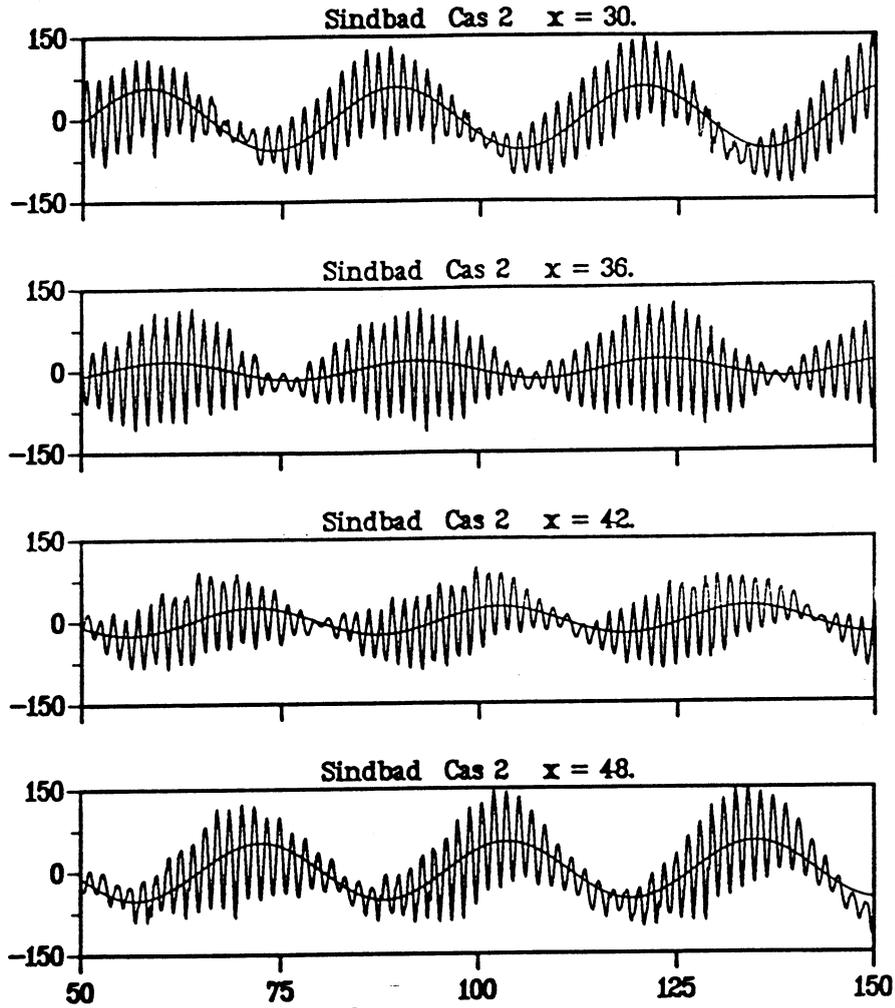


Figure 10: Pressions (Pa) au fond en fonction du temps (sec.) , SINDBAD cas 2

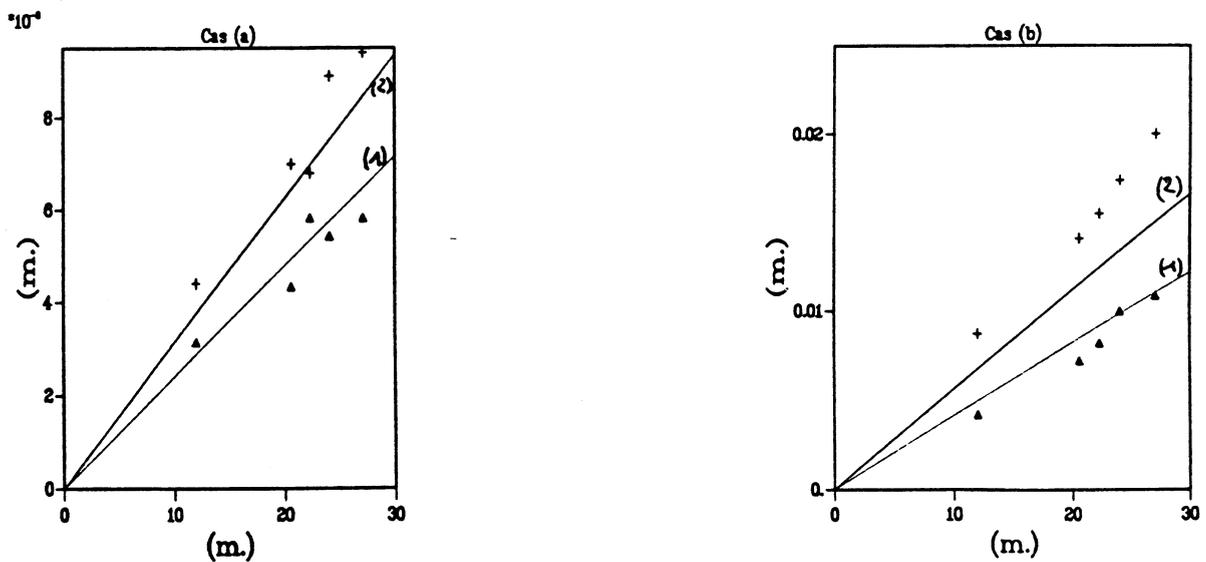


Figure 11: Evolution longitudinale des instabilités, tests expérimentaux (a) et (b)

Expérimental : \triangle : $2\omega_1 - \omega_2$, $+$: $2\omega_2 - \omega_1$

Modèle : ..(1) : $2\omega_1 - \omega_2$, ..(2) : $2\omega_2 - \omega_1$