

## SIMULATION NUMERIQUE D'UN CANAL A HOULE

C. BERTELLE

J. F. LHUISSIER

Laboratoire de Mécanique des Fluides - Université du Havre  
25 rue Ph. Lebon - B.P. 540 - 76058 Le Havre cédex - France

### RESUME

Une technique simple est présentée pour simuler numériquement un écoulement visqueux dans un canal à houle. Les équations de Navier-Stokes, sous une formulation vitesse-pression, sont résolues par un schéma de volumes finis. Un maillage structuré et déformable est utilisé: il permet de suivre le déplacement de la surface libre. Une discrétisation du second ordre en espace et une résolution implicite du problème instationnaire sont utilisées. La validité de la méthode est testée par comparaison avec des valeurs expérimentales obtenues par Vélocimétrie Doppler Laser en canal à houle.

### ABSTRACT

A simple technique is presented for the numerical simulation of viscous flows in wave channel. The Navier-Stokes equations in velocity-pressure formulation are solved by a finite volumes scheme. We use a structured, moving mesh which allows to follow the free surface motion. A second order spatial discretization and an implicit resolution of the transient problem are used. The validity of this method is tested by comparison with Velocimetry Doppler Laser experimental data obtained in a laboratory wave tank.

## 1. INTRODUCTION

De nombreux modèles théoriques de houle, basés sur des développements analytiques, ont été formulés depuis le siècle dernier ([1], [6], [13], [19]). Ces modes de calcul, souvent complexes, sont difficiles à utiliser en pratique, sur des configurations réelles. Pour cette raison, de nombreux codes de calcul basés sur le principe de la théorie potentielle ont vu le jour à la demande des industries navales, portuaires et pétrolières. Sur cette hypothèse, les travaux les plus récents permettent d'étudier les déferlements de vagues (Longuet-Higgins et Cokelet [12]), ainsi que les problèmes de diffraction-radiation (Guével [7], Cointe [4]). Toutefois, de par la nature de ces méthodes, les effets visqueux ne peuvent être pris en compte.

Les écoulements de fluides visqueux à surface libre, gouvernés par les équations de Navier-Stokes, ont été résolus sous des formulations Eulériennes, par des schémas numériques basés sur la méthode "Marker and Cell" (Harlow, Welch [8] ; Nichols, Hirt, Hotchkiss [14]). Dans le cas particulier de la houle, assez peu de ces codes ont été le sujet de communications relatant de comparaisons avec des mesures expérimentales en canal à houle. Parmi les études menées en France, on relèvera le code NSL développé par Daubert et Cahouet [5] du LNH/EDF. Plus récemment, une approche Lagrangienne a été faite par Chagdali [3] en formulation fonction de courant et vorticité.

Notre approche a été motivée par les études spécifiques menées au Laboratoire de Mécanique des Fluides du Havre. Grâce aux mesures qui y sont obtenues par Vélocimétrie Doppler Laser, des écoulements sont décrits de manière précise et font apparaître des phénomènes liés à la viscosité du fluide ([2], [10], [11]). La majorité de ces études sont effectuées dans des conditions de houle telles que les gradients des déformées de surface libre ne soient pas trop importants. Notre méthode de calcul constitue donc un compromis, en n'autorisant pas de déformations importantes de la surface libre (telles que des retournements apparaissant lors des déferlements), mais en traitant en un temps raisonnable le problème complet de l'écoulement en fluide visqueux.

## 2. DESCRIPTION DU PROBLEME PHYSIQUE

La simulation d'un écoulement de houle, généré par un batteur plan dans un canal ouvert est étudiée. Une vue schématique du domaine physique est représentée sur la figure 1.

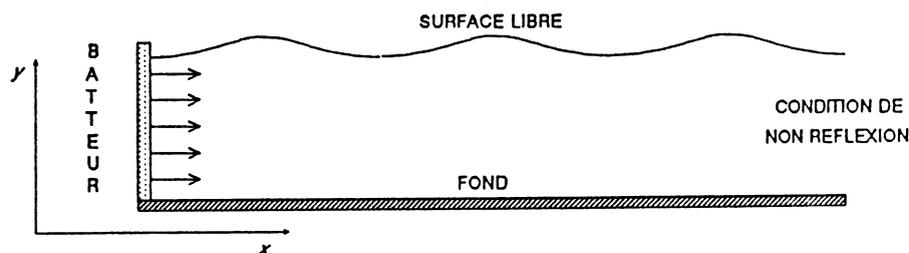


FIGURE 1: DOMAINE D'ETUDE

Le domaine est délimité par trois frontières physiques:

- un batteur piston ou incliné dont le déplacement est périodique

et sinusoïdal en temps.

■ un fond horizontal immobile.

■ Une surface libre qui se déplace avec l'écoulement du fluide.

On suppose que le domaine n'est pas borné sur sa limite latérale droite.

### 3. EQUATIONS FONDAMENTALES ET CONDITIONS AUX LIMITES

On suppose que l'écoulement instationnaire de fluide visqueux est incompressible et bidimensionnel et qu'il est régi par les équations de Navier-Stokes :

■ Equation de conservation de la masse:

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (1)$$

■ Equation d'évolution de la quantité de mouvement:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -g \vec{\text{rad}} (P/\rho) + \nu \Delta \vec{u} + \vec{F} \quad (2)$$

où  $\vec{F}$  représente la somme des forces massiques externes, qui est, dans notre cas, l'accélération de la pesanteur.

#### 1) CONDITIONS AUX LIMITES SUR LE FOND DU CANAL

En raison de la viscosité du fluide,  $u = v = 0$ .

Une équation pour la pression est obtenue grâce à la projection verticale de l'équation d'évolution de la quantité de mouvement, ainsi qu'à la condition d'adhérence:

$$\frac{\partial}{\partial y} (P/\rho) = -g + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (3)$$

#### 2) CONDITIONS AUX LIMITES SUR LE BATTEUR

La composante horizontale de la vitesse est donnée par la cinématique du batteur dont le déplacement est plan ou incliné.

Une condition de glissement:  $\partial v / \partial x = 0$  est choisie.

Une équation pour la pression est obtenue grâce à la projection horizontale de l'équation d'évolution de la quantité de mouvement:

$$\frac{\partial}{\partial x} (P/\rho) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Gamma_w - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4)$$

où  $\Gamma_w$  est l'accélération horizontale du batteur.

#### 3) CONDITIONS AUX LIMITES SUR LA SURFACE LIBRE

La pression est supposée constante et est prise égale à zéro.

Par ailleurs, les contraintes tangentielles sont négligées. Ainsi les composantes de vitesse vérifient:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad (5)$$

où  $n$  est la direction de la normale extérieur à la surface libre.

#### 4) CONDITIONS AUX LIMITES SUR LA LIMITE LATÉRALE DROITE

Pour résoudre le problème, le domaine doit être borné sur sa limite droite. A cet endroit, on suppose que l'onde générée quitte le domaine sans créer de réflexions. Nous utilisons une condition de radiation

de Sommerfeld [15].: chaque variable de calcul vérifie alors l'équation d'onde:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -c \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (6)$$

La célérité de l'onde est alors calculée de la manière suivante: On détecte les positions des extrema de la surface libre générés. La longueur de l'onde à proximité de la sortie du domaine en est déduite. La célérité s'obtient par la relation d'onde liant la longueur d'onde à la période du batteur.

#### 4. ALGORITHME DE LA PROCEDURE DE CALCUL

Les équations de Navier-Stokes sont écrites sous forme conservative et sont résolues par un schéma itératif qui permet de traiter les non linéarités du problème instationnaire.

Le schéma général de l'algorithme est le suivant:

Itération en temps:

Itération de linéarisation:

1) La composante horizontale de la vitesse  $u$  est calculée par:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u^2 - \nu \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (uv - \nu \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial x} (\frac{P}{\rho}) = 0 \quad (7)$$

2) La composante verticale de la vitesse  $v$  est calculée par:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial u}{\partial x} \quad (8)$$

3) L'élévation d'eau  $H$  est calculée grâce à la condition cinématique:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = v - u \frac{\partial H}{\partial x} \quad (9)$$

4) La pression  $P$  se calcule grâce à l'équation de Poisson:

$$\Delta(P/\rho) = 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (10)$$

Fin de l'itération de linéarisation, dépendant de la convergence simultanée en  $u, v, P$  et  $H$ .

Fin de l'itération en temps.

On remarque que la résolution de l'équation permettant de calculer  $v$ , la composante verticale de la vitesse, ne nécessite pas de conditions aux limites supérieures. Cette condition, qui n'apparaît pas explicitement lors du calcul de  $v$  est en fait directement liée à la condition cinématique

utilisée en (9). A la convergence de l'ensemble du système d'équations, cette condition est correctement approchée. La hauteur d'eau qui en est déduite intervient directement dans le domaine d'intégration de l'équation de continuité dont résulte les valeurs de  $v$ . Remarquons qu'un procédé analogue a également été utilisé par Sarraf [20].

## 5. DISCRETISATION DU DOMAINE ET DES EQUATIONS

### 1) INTEGRATION SUR LE MAILLAGE DE CALCUL DEFORMABLE

Le domaine de calcul est initialement orthogonal et couvert de cellules qui se déforment verticalement de façon à pouvoir suivre le déplacement de la surface libre. Un maillage décalé, pour les composantes de vitesses et de pression, est utilisé comme cela se rencontre fréquemment lors des résolutions Eulériennes, dans les méthodes de volumes finis.

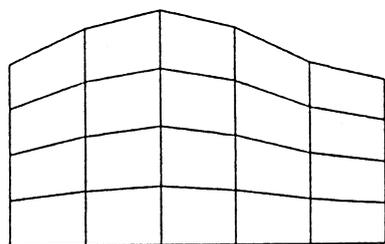


FIGURE 2: MAILLAGE DEFORMABLE

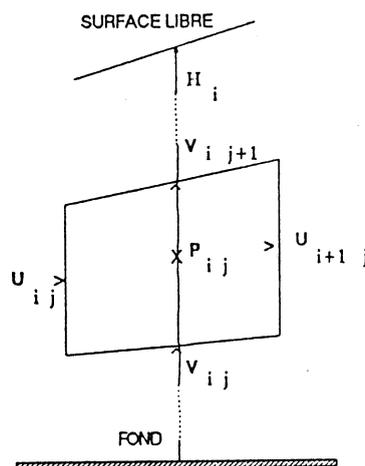


FIGURE 3: GRILLE DECALLEE

Les équations décrites au paragraphe précédent sont intégrées sur chaque cellule du maillage que l'on centre sur les positions de calcul de la variable traitée.

En raison de la déformation du maillage, la discrétisation des termes des équations se fait différemment suivant la direction de dérivation.

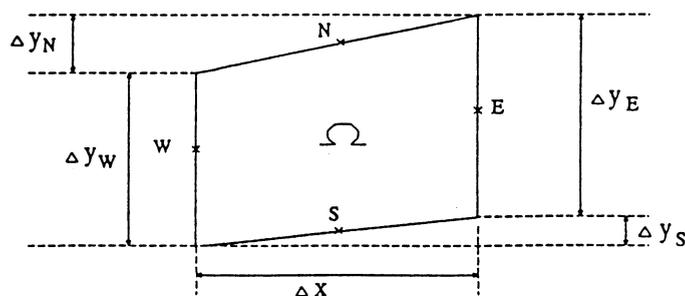


FIGURE 4: GEOMETRIE D'UNE CELLULE

Dans la direction verticale, on obtient une discrétisation du type:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \gamma}{\partial y} d\Omega = \Delta x (\gamma_n - \gamma_s) \quad (11)$$

où  $\Delta x$  est la longueur de la cellule  
 $\gamma_n$  et  $\gamma_s$  sont les valeurs de  $\gamma$  au centre des faces Nord et Sud de la cellule.

Dans la direction horizontale, on obtient une discrétisation du type:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \beta}{\partial x} d\Omega = \beta_e \Delta y_e - \beta_w \Delta y_w + \beta_s \Delta y_s - \beta_n \Delta y_n \quad (12)$$

où  $\Delta y_e$ ,  $\Delta y_w$ ,  $\Delta y_s$ ,  $\Delta y_n$  sont les hauteurs des différentes faces de la cellule et  $\beta_e$ ,  $\beta_w$ ,  $\beta_s$ ,  $\beta_n$  sont les valeurs de  $\beta$  sur le centre des faces de la cellule.

Puisque les cellules se déforment dans le temps, l'intégration des termes dérivés en temps est faite grâce au théorème de transport:

$$\int_{\Omega(t)} \frac{\partial \alpha}{\partial t} d\Omega = \frac{D}{Dt} \int_{\Omega(t)} \alpha d\Omega - \int_{\partial\Omega(t)} \alpha \vec{V}_F \cdot \vec{n} ds \quad (13)$$

où  $\partial\Omega(t)$  est la frontière de la cellule  $\Omega(t)$ ,  $\vec{V}_F$  et  $\vec{n}$  sont respectivement la vitesse et la normale des faces de la cellule.

Le premier terme du membre droit de l'égalité (11) est approché par le produit de la surface de la cellule par la variation en temps de la valeur de  $\alpha$  au centre de la cellule. Le second terme du membre droit de l'égalité ne concerne que les faces de la cellule qui évoluent en temps.  $\alpha$  est alors approché, pour chacune de ces faces, par sa valeur centrale.

En conclusion, l'utilisation des formules précédentes revient à écrire des équations d'équilibre de flux à travers les faces des cellules et ainsi contribue à donner de bonnes propriétés de conservation au schéma de résolution.

## 2) DISCRETISATION DE L'EQUATION (7) DONNANT U

La discrétisation du terme d'évolution est obtenu grâce à (13).

La discrétisation du terme source :  $\partial(P/\rho)/\partial x$  est obtenu grâce à (12).

La discrétisation des deux termes de convection-diffusion est obtenu grâce à un schéma hybride (décrit dans PATANKAR [17]). On obtient, par exemple, pour le troisième terme de l'équation (7):

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} \left( uv - \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Omega =$$

$$\Delta x \left[ \left( uv - \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_n - \left( uv - \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_s \right] =$$

$$\Delta x \left[ v_n u_{1j} + B_n (u_{1j+1} - u_{1j}) - v_s u_{1j} + A_s (u_{1j-1} - u_{1j}) \right] \quad (14)$$

où

$$\begin{aligned} \blacksquare B_n &= \frac{\nu}{\Delta y} \inf( P_{e_n} ; 1/2 P_{e_n} - 1 ; 0 ) \\ &\text{avec } P_{e_n} = \frac{v_n \Delta y}{\nu} \quad (\text{nombre de Peclet}) \\ \blacksquare A_s &= \frac{\nu}{\Delta y} \inf( P_{e_s} ; 1/2 P_{e_s} - 1 ; 0 ) - v_s \\ &\text{avec } P_{e_s} = \frac{v_s \Delta y}{\nu} \\ \blacksquare v_n &= ( v_{i-1j+1} + v_{ij+1} )/2 \quad \text{et} \quad v_s = ( v_{i-1j} + v_{ij} )/2 \end{aligned}$$

La signification des indices de valeurs discrètes sont données dans la figure 5:

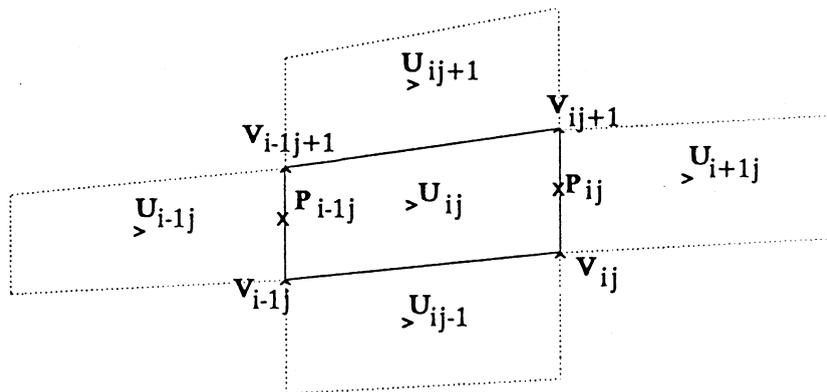


FIGURE 5 : CELLULE DE CONTROLE DE U

La discrétisation du second terme de l'équation (7) est obtenue grâce à un schéma similaire, utilisant la formule (12). La discrétisation complète de l'équation (7) conduit finalement à un système linéaire pentadiagonal.

### 3) DISCRETISATION DE L'EQUATION (8) DONNANT V

Elle est intégrée sur les cellules représentées sur la figure 3. Avec les notations données sur la figure 4, on obtient:

$$v_{ij+1} = v_{ij} + u_{ij} \frac{\Delta y_w}{\Delta x} - u_{i+1j} \frac{\Delta y_e}{\Delta x} + u_n \frac{\Delta y_n}{\Delta x} - u_s \frac{\Delta y_s}{\Delta x} \quad (15)$$

Cette expression conduit à une évaluation directe de v: ses valeurs sont calculées sur chaque colonne de cellules, depuis le fond du canal (où v=0) jusqu'à la surface libre.

### 4) DISCRETISATION DE L'EQUATION (9) DONNANT H

On utilise un schéma explicite centré en temps:

$$\frac{H_i^n - H_i^{n-1}}{\Delta t} = \tilde{v}^{n-1/2} - \left( \tilde{u} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \right)^{n-1/2} \quad (16)$$

Les valeurs tildées sont évaluées avec un schéma d'interpolation centré en espace qui permet de suivre une particule dans son mouvement pendant un demi pas de temps d'intégration.

Ensuite, on actualise la géométrie du maillage qui doit suivre le

déplacement de la surface libre déduit de H.

### 5) DISCRETISATION DE L'EQUATION (10) DONNANT $P/\rho$

Pour discrétiser l'intégrale du terme source de l'équation (10), on a besoin d'évaluer les dérivées partielles de  $u$  et  $v$  au centre des cellules de contrôle. Une discrétisation spatiale du second-ordre, prenant en compte la déformation de la cellule, est alors utilisée pour les approcher ainsi que pour discrétiser le Laplacien de pression qui s'écrit:

$$\int_{\Omega} \Delta P \, d\Omega = \left( \frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\delta y^2}{\Delta x \Delta y} \right) \left( P_N + P_S - 2 P_P \right) + \frac{\Delta y}{\Delta x} \left( P_E + P_W - 2 P_P \right) + \frac{\delta y}{2\Delta x} \left( P_{SE} + P_{NW} - P_{NE} - P_{SW} \right) \quad (17)$$

où  $\Delta x$  and  $\Delta y$  sont les longueur et hauteur des cellules.

$\delta y$  est la déformation verticale de la cellule.

$P_N, P_S, P_E, P_W, P_{SE}, P_{NW}, P_{NE}, P_{SW}$  sont les valeurs voisines de  $P_p$  (valeur de  $P$  au centre de la cellule), suivant l'orientation géographique habituelle.

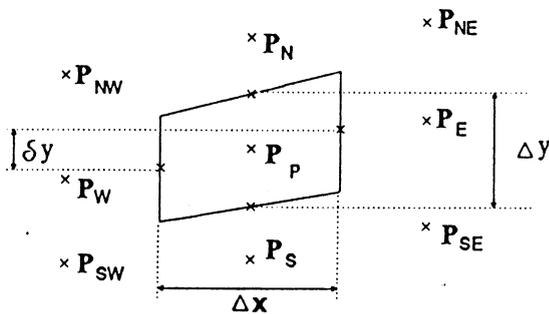


FIGURE 6 : CELLULE DE CONTROLE DE P

en utilisant des valeurs explicites pour  $P_{SE}, P_{NW}, P_{NE}$  et  $P_{SW}$ , on aboutit à un système pentadiagonal.

### 6) ALGORITHMES NUMERIQUES

Les systèmes pentadiagonaux permettant de calculer  $u$  et  $p$  sont résolus par séparation suivant la direction d'espace. On effectue ainsi des balayages horizontaux et verticaux grâce à des résolutions de systèmes tridiagonaux. Ces schémas implicites confèrent des propriétés intéressantes de stabilité à l'ensemble du système: une méthode d'ajustement du pas de temps en fonction des vitesses de convergence peut ainsi être mis en oeuvre.

## 6. EXEMPLES DE CALCUL ET VALIDATIONS EXPERIMENTALES

Sur la figure 7, on représente les champs cinématiques obtenus par le code de calcul pour une période de batteur (de type piston) de 1,03 seconde et une profondeur d'eau de 0,27 mètre.

On a représenté sur la figure 8, des trajectoires de particules d'eau situées au centre du canal. Les positions verticales initiales de ces particules sont : 0,05 m, 0,12 m et 0,25 m.

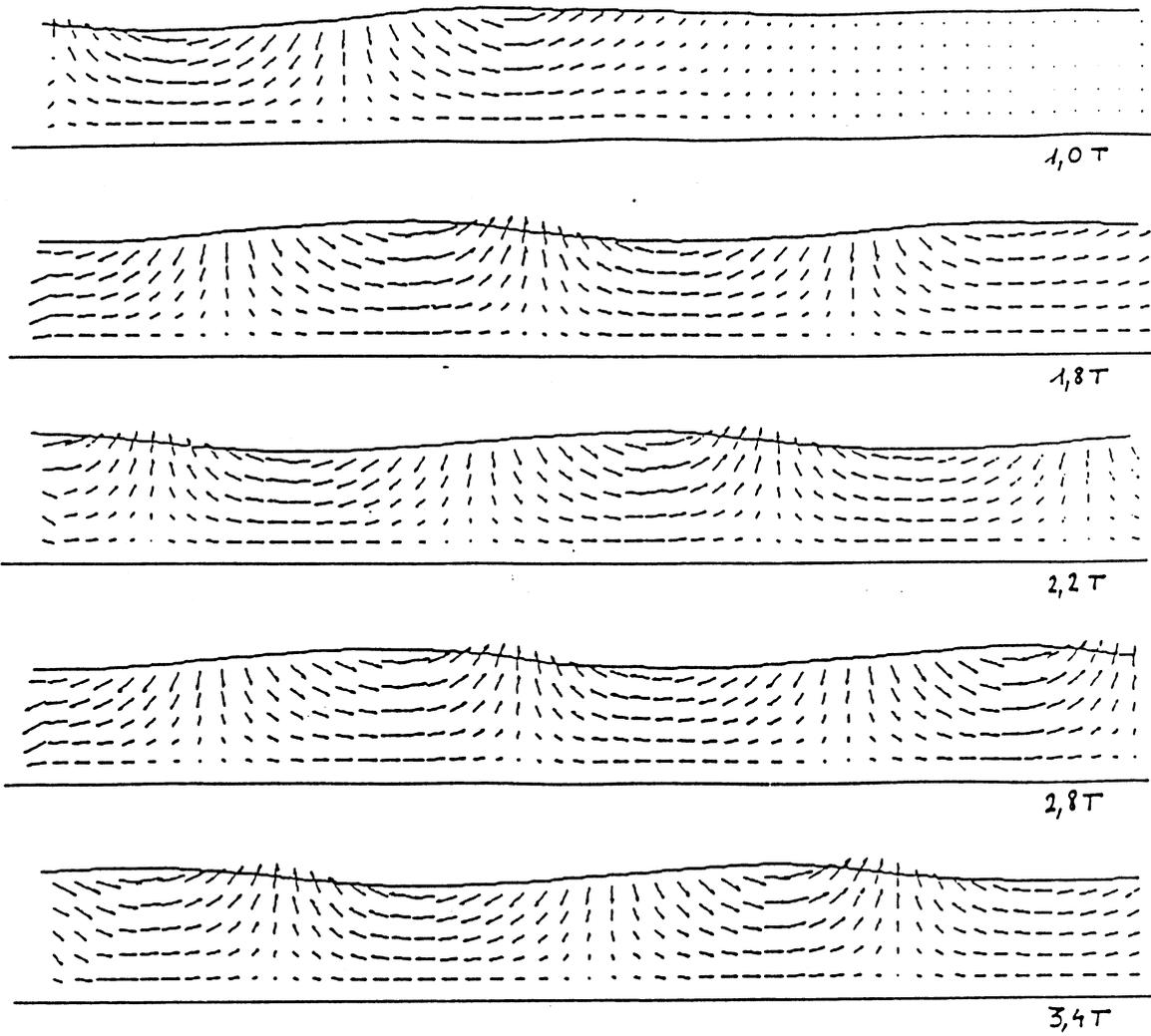


FIGURE 7: ETABLISSEMENT D'UNE HOULE PROGRESSIVE

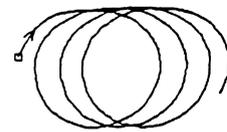


FIGURE 8: TRAJECTOIRES DE PARTICULES D'EAU, AU CENTRE DU CANAL

Sur la figure 9, on représente les champs cinématiques obtenus par le code de calcul, lorsque l'on remplace la condition de radiation sur la frontière latérale droite du domaine par un mur sur lequel les vitesses s'annulent par adhérence du fluide réel. On peut alors observer la formation d'un clapotis qui s'établit progressivement.

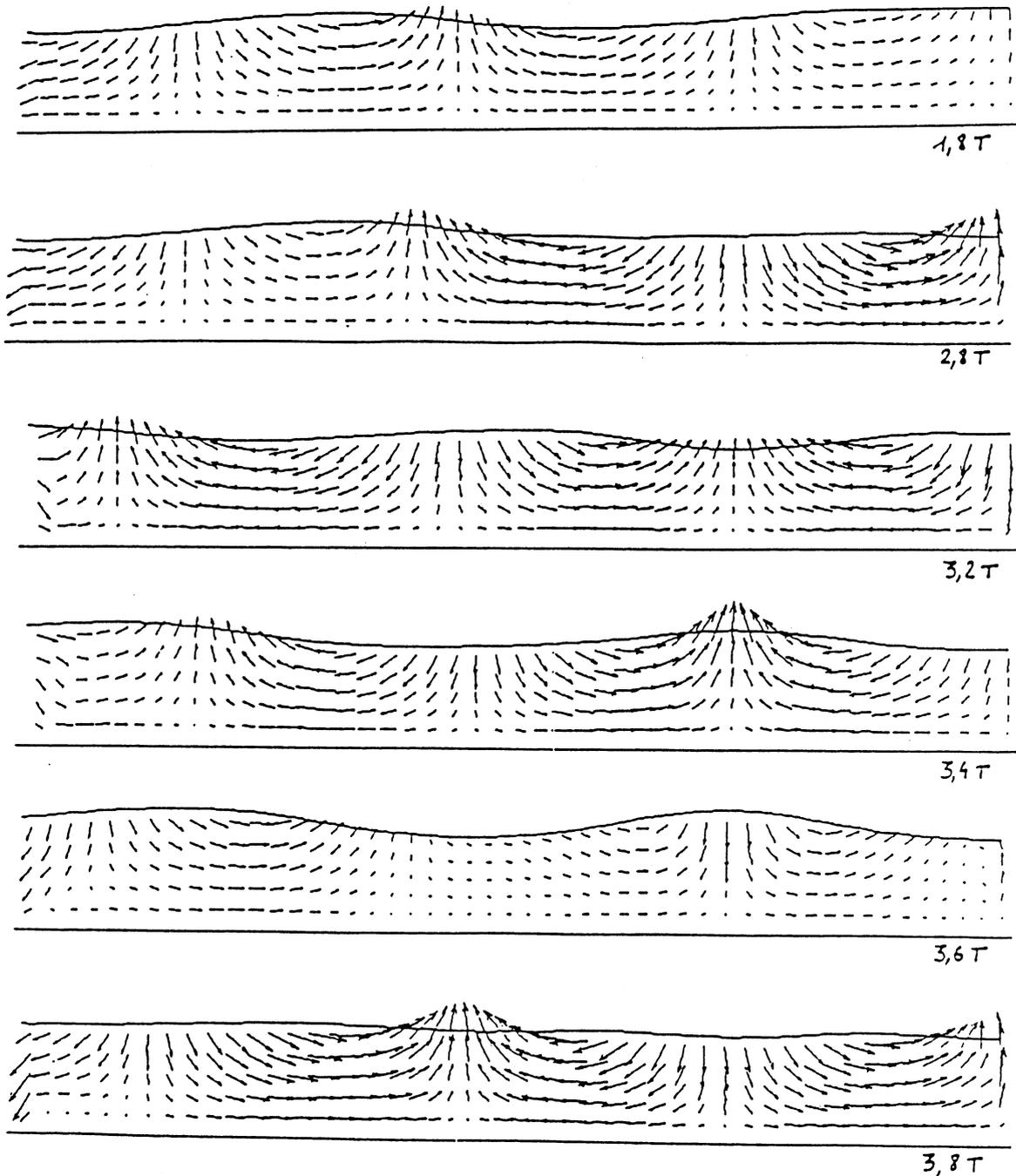


FIGURE 9 : ECOULEMENT AVEC REFLEXION TOTALE SUR LA FRONTIERE LATÉRALE DROITE

La figure 10 permet de comparer des résultats de calcul avec des mesures effectuées au Vélocimètre Doppler Laser par Jarno [9]. Le canal à houle expérimental mesure 9 mètres. Le niveau d'eau au repos et la période du batteur sont les mêmes que sur les figures précédentes. Les profils de la composante horizontale de la vitesse ont été tracés à différentes phases de la houle (indiquée en degré en haut de chaque courbe). Les points de mesure et de calcul sont situés approximativement au centre du canal.

Les résultats sont, pour l'essentiel, en accord avec les théories de Miche [10] sur les houles en eau peu profonde. Des différences par rapport à cette théorie se retrouvent à la fois sur les calculs et sur les données expérimentales:

- Le gradient de vitesse (en valeur absolue) sur la surface libre augmente au sommet de la vague et diminue au creux;
- Les vitesses au fond sont plus grandes au sommet qu'au creux.
- Le changement d'inclinaison des profils vers le sens décroissant s'effectue bien avant l'annulation des vitesses sur le fond (entre 40° et 50°).

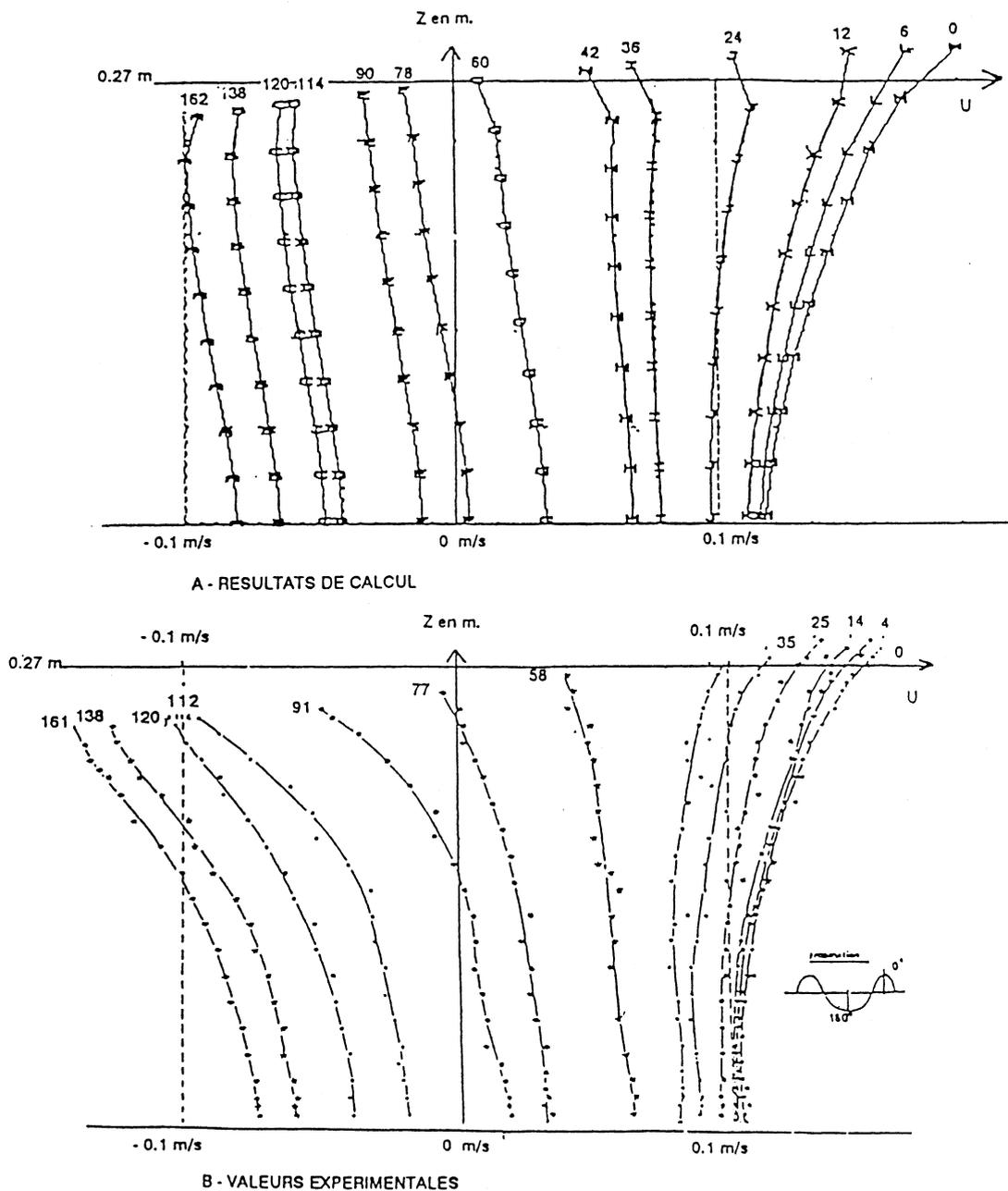


FIGURE 10: COMPARAISON DES PROFILS DE VITESSES HORIZONTALES EN EAU PEU PROFONDE

Remarquons, par ailleurs, que les profils des vitesses au passage du creux de la vague sont moins inclinés dans les résultats de calcul par rapport aux valeurs expérimentales. On peut supposer que cela provient du fait que, dans le canal physique, il existe une faible réflexion à l'extrémité opposée au batteur, évaluée à 5%.

## 7. CONCLUSION

Le code de calcul présenté ici permet de simuler des écoulements de houle comparables à ceux obtenus expérimentalement dans un canal. Les validations obtenues sur les comparaisons des champs cinématiques permettent d'envisager d'utiliser dans l'avenir, cet outil numérique de façon complémentaire à des études expérimentales existantes. Un traitement additionnel portant sur la condition de radiation à l'extrémité opposée au batteur (une analyse spectrale, par exemple) permettrait d'étendre l'utilisation de ce code pour simuler des houles irrégulières ou perturbées.

## 8. REFERENCES

- [1] BONNEFILLE : cours d'hydraulique maritime, Masson 1980
- [2] BROSSARD : "Contribution à l'étude de la turbulence à travers l'analyse d'un écoulement généré par la houle entre deux plaques", Thèse de 3ème cycle - Rouen 1986
- [3] CHAGDALI : "Simulation numérique d'écoulement à surface libre d'un fluide visqueux incompressible", Thèse d'Etat - Casablanca 1990.
- [4] COINTE : "Quelques aspects de la simulation numérique d'un canal à houle", Thèse de l'école nationale des Ponts et Chaussées - 1989.
- [5] DAUBERT, CAHOUE : "Approche numérique de la houle par les équations de Navier Stokes", Annales des Ponts et Chaussées - 1984
- [6] FONTANET : "Théorie de la génération de la houle cylindrique par un batteur plan", Thèse de 3ème cycle - Grenoble 1961
- [7] GUEVEL, LANDEL, BOUCHET, MANZONE : "Le phénomène d'un mur d'eau oscillant et son application pour protéger un site côtier soumis à l'action de la houle", P.I.A.N.C. - A.I.P.C.N. - n° 52, 1986.
- [8] HARLOW, WELCH : "Numerical calculation of time dependant viscous incompressible flow of fluid with free surface", Physics of Fluids, vol 8, n° 12, p. 2182-2189, 1965.
- [9] JARNO : "Analyse de la cinématique de la houle en eau peu profonde", Rapport de DEA - Le Havre 1986
- [10] JARNO, BERTELLE, BELORGEY : "Dynamic influence of waves on a horizontal cylinder beneath waves", Proc. Int. Congress on Computer Modelling in Ocean Eng., Schrefler and Zienkiewicz (eds), Balkema, 1988, p. 609-615.
- [11] LEBAS : "Etude de la couche limite générée par les vagues sur le fond d'un canal à houle", Thèse d'Etat - Le Havre 1986
- [12] LONGUET-HIGGINS, COKELET : "The deformation of steep surface waves on water. 1. A numerical method of computation", Proc. R. Soc. London, Vol. A 364, p. 1-26, 1976.
- [13] MICHE : Mouvements ondulatoires de la mer en profondeur croissante ou décroissante. Annales des Ponts et Chaussée - Paris 1944.

[14] NICHOLS, HIRT, HOTCHKISS : "SOLA-VOLF : A solution algorithm for transient fluid flow with multiple free boundaries" Los Alamos Scientific Laboratory report. LA-8355 - August 1980.

[15] ORLANSKI : "A simple boundary conditions for unbounded hyperbolic flows", J. of Computational Physics, 21, p. 251-269, 1976.

[16] PATANKAR, SPALDING : "A calculational procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows", Int. J. Heat Mass Transfer, 15, p. 1787-1805, 1972.

[17] PATANKAR : Numerical Heat Transfer and Fluid Flow - Hemisphere pub. corp. - Mc Graw-Hill book Company - New York 1980

[18] PRATAP, SPALDING : "Numerical computation of the flow in curved ducts", Aeronaut. Q., vol 26, p.219, 1975.

[19] SUSBIELLES, BRATU : vagues et ouvrages pétroliers en mer, éditions TECHNIP 1981.

[20] SARRAF : "three dimensional surface water modelling using a mesh adaptive technique", Int. J. for Num. meth. in Fluids, vol 7, p. 465-488, 1987.