

**CALCUL DES EFFORTS DE DEUXIEME ORDRE
A TRES HAUTE FREQUENCE
SUR DES PLATES-FORMES A LIGNES TENDUES**

Xiaobo CHEN, Bernard MOLIN

Institut Français du Pétrole, BP 311

1 et 4 avenue de Bois Préau, 92506 Rueil-Malmaison, France.

Résumé

Le problème considéré ici est celui de l'évaluation des efforts excitateurs de deuxième ordre (en mode somme, c'est à dire prenant place aux sommes deux à deux des fréquences de houle) sur des plates-formes à lignes tendues. Ces efforts sont tenus pour responsables de comportements résonnants (en roulis, tangage et pilonnement) observés lors d'essais en bassin et pourraient réduire sensiblement la durée de vie en fatigue des tendons.

Des résultats sont tout d'abord présentés pour une structure simplifiée, consistant en 4 cylindres verticaux reposant sur le fond marin. L'intérêt de cette géométrie est que tous les calculs peuvent être menés à terme de façon quasi analytique. Les résultats obtenus permettent d'illustrer le haut degré d'interaction entre les colonnes, et la faible décroissance du potentiel de diffraction de deuxième ordre avec la profondeur.

On présente ensuite des résultats pour une plate-forme réelle, celle de Snorre.

Summary

The problem that we consider here is the calculation of the sum-frequency second-order diffraction loads on tension leg platforms. These loads are considered to be responsible of the springing behavior that has been observed in model tests, and may reduce the fatigue life of the tethers.

Results are first presented for an ideal structure, that consists of four vertical cylinders standing on the sea-floor. The main advantage of this particular geometry is that semi-analytical methods can be used to derive the second-order loading. The obtained results illustrate the high degree of interaction that takes place between the columns, and the low decay of the second-order diffraction potential in the water column.

Some results are presented next for the Snorre TLP, and are obtained through a proper combination of analytical and numerical tools.

I. Introduction

Les plates-formes sur lignes tendues (PLT) sont des structures de type semi-submersible maintenues en excès de flottabilité par un ancrage vertical (les "lignes" tendues consistant en des tubes de forte épaisseur). Les mouvements verticaux (pilonnement, roulis et tangage) sont ainsi, sinon supprimés, du moins fortement réduits, alors que les mouvements dans le plan horizontal des PLT sont comparables à ceux de plates-formes semi-submersibles classiques.

L'intérêt des PLT est de permettre la production du pétrole de la même façon qu'à partir de structures fixes (les têtes de puits peuvent être placées sur le pont), sans restriction apparente sur la profondeur d'eau. Deux PLT sont en opération (Hutton en Mer du Nord et Joliet dans le Golfe du Mexique), une en construction (Snorre en Mer du Nord), et plusieurs à l'étude dont une dans près de 1000 mètres d'eau dans le Golfe du Mexique (Auger).

La conception des PLT pose plusieurs problèmes spécifiques dont le plus préoccupant est la détermination des valeurs maximales acceptables pour les périodes propres de leurs mouvements en pilonnement, roulis et tangage. Pour Snorre par exemple elles sont de l'ordre de 2.5 secondes, ce qui peut sembler suffisamment bas, l'énergie de houle étant très limitée à de telles périodes, mais les essais en bassin effectués ont montré des effets de résonance importants dans des états de mer de période double, donc liés apparemment à des phénomènes de deuxième ordre.

A supposer connus ces efforts de deuxième ordre, un second problème à surmonter pour prédire la réponse à la résonance est celui de l'estimation de tous les mécanismes dissipateurs d'énergie, dont le plus important semble lié à la séparation de l'écoulement sur les angles vifs de la carène.

Aussi en 1988 un projet de recherche a-t-il été monté entre le NTH de Trondheim et l'IFP, avec pour objectifs :

- le calcul des efforts excitateurs de deuxième ordre sur la PLT de Snorre, pour des périodes propres allant de 2.2 à 4.4 secondes ;
- la détermination expérimentale et numérique des amortissements visqueux associés à la séparation de l'écoulement à la base des colonnes.

La présente communication est relative uniquement à la première partie du Projet, réalisée par l'IFP.

La théorie utilisée pour le calcul de ces efforts de deuxième ordre a déjà fait l'objet de deux communications aux Premières et Deuxièmes Journées de l'Hydrodynamique (Molin ^[1], 1987 ; Chen ^[5], 1989). Elle est brièvement rappelée dans la première partie de cette communication. On y montre que les efforts de deuxième ordre se scindent en deux composantes :

- une première composante faisant intervenir des expressions quadratiques du potentiel linéarisé de l'écoulement, accessible donc dès que le problème linéarisé de diffraction radiation a été résolu ;
- une seconde composante faisant intervenir le potentiel de diffraction de deuxième ordre, transformée, via le théorème d'Haskind, en une intégrale sur tout le plan de surface libre dont l'intégrand consiste en le produit de deux termes : le deuxième membre de la condition de surface libre satisfaite par le potentiel de diffraction de deuxième ordre et le potentiel de radiation suivant le degré de liberté considéré et à la pulsation $\omega_1 + \omega_2$, ω_1 et ω_2 étant les pulsations des deux composantes élémentaires de houle considérées.

Cette intégrale de surface libre est connue pour être délicate à calculer et lentement convergente avec la distance radiale. Compte tenu des faibles périodes de houle qui nous intéressent ici, on conçoit que le recours à un modèle purement numérique pose d'importants problèmes de discrétisation, taille mémoire et coût informatique.

Aussi a-t-on préféré, dans un premier temps, idéaliser la PLT en quatre cylindres verticaux reposant sur le fond marin. On s'inspire alors de la méthode de Linton et Evans ^[2] (1989) pour résoudre, de façon quasi analytique, les problèmes linéarisés de diffraction et radiation. Le calcul de l'intégrale de surface libre, et la maîtrise de sa convergence, s'en trouvent grandement facilités. En introduisant des potentiels de radiation appropriés il est par ailleurs possible d'évaluer la répartition verticale de la contribution aux efforts du potentiel de diffraction de deuxième ordre. On retrouve un résultat apparemment paradoxal, à savoir que ce potentiel se fait ressentir à des profondeurs non atteintes par les potentiels (incident et diffracté) de premier ordre.

Il s'ensuit que notre idéalisation n'est pas représentative d'une PLT réelle, même à des périodes de houle telles que les pontons et les bases des colonnes ne soient pas atteintes par les potentiels de premier ordre. Le remède à apporter est d'introduire, dans l'intégrale de surface libre, le potentiel de radiation de la structure réelle. Celui-ci est alors obtenu numériquement, au prix de discrétisations allant jusqu'à 14000 facettes pour la carène complète.

II. Théorie

La théorie utilisée pour l'évaluation de ces efforts est l'extension au deuxième ordre de la théorie linéarisée classique de diffraction-radiation, basée sur les hypothèses de fluide parfait, écoulement irrotationnel, petits mouvements et faible cambrure de la houle incidente. Le potentiel des vitesses est développé en série d'un petit paramètre ε assimilé à la cambrure de la houle.

$$\Phi(M, t) = \varepsilon \Phi^{(1)}(M, t) + \varepsilon^2 \Phi^{(2)}(M, t) + \dots \quad (1)$$

On considère une houle incidente bichromatique, consistant donc en la superposition (au premier ordre d'approximation) de deux houles d'Airy, d'amplitudes (complexes) \mathbf{a}_1 et \mathbf{a}_2 , de pulsations ω_1 et ω_2 , et se propageant toutes deux dans la même direction β par rapport à l'axe ox :

$$\Phi_I^{(1)}(M, t) = \Re \left\{ \phi_{I1}^{(1)}(M) e^{-i\omega_1 t} + \phi_{I2}^{(1)}(M) e^{-i\omega_2 t} \right\} \quad (2)$$

avec : $\phi_{Ij}^{(1)}(x, y, z) = -\frac{\mathbf{a}_j g}{\omega_j} e^{K_j z} e^{iK_j(x \cos \beta + y \sin \beta)}$ (Le système d'axes $oxyz$ utilisé est tel que oxy coïncide avec le plan de surface libre, oz étant vertical ascendant. Voir fig. 1)

On a supposé ici infinie la profondeur d'eau, ce que justifie la petitesse des périodes de houle qui nous concernent (de 4 à 8 secondes). Pour la même raison on peut supposer la plate-forme fixe, ses mouvements horizontaux étant très faibles à de telles périodes. La résolution des problèmes linéarisés de diffraction associés à chacune des deux composantes de houle permet alors de déterminer le potentiel global de l'écoulement, au premier ordre d'approximation :

$$\Phi^{(1)}(M, t) = \Re \left\{ (\phi_{I1}^{(1)} + \phi_{D1}^{(1)}) e^{-i\omega_1 t} + (\phi_{I2}^{(1)} + \phi_{D2}^{(1)}) e^{-i\omega_2 t} \right\} = \Re \left\{ \phi_1^{(1)} e^{-i\omega_1 t} + \phi_2^{(1)} e^{-i\omega_2 t} \right\} \quad (3)$$

Le potentiel de deuxième ordre de l'écoulement vérifie un système aux limites semblable à celui vérifié par le potentiel de premier ordre (Laplacien nul dans le domaine fluide, condition de glissement sur les frontières solides), à la différence importante près que la condition de surface libre devient non homogène, son deuxième membre étant une forme quadratique du potentiel de premier ordre. Il en résulte que ce potentiel prend place aux pulsations somme et différence deux à deux des pulsations constituant le signal houle. Ici seul le mode $\omega_1 + \omega_2$ nous intéresse et on écrit la composante associée du potentiel de deuxième ordre sous la forme :

$$\Phi^{(2)}(M, t) = \Re \left\{ \phi^{(2)}(M) e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} \right\} = \Re \left\{ (\phi_I^{(2)} + \phi_D^{(2)}) e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} \right\} \quad (4)$$

La profondeur d'eau étant "infinie" et les deux composantes de houle se propageant dans la même direction, on démontre que le potentiel incident de deuxième ordre (en mode somme) est nul. Seul subsiste le potentiel de diffraction, qui vérifie la condition de surface libre :

$$g \frac{\partial \phi_D^{(2)}}{\partial z} - (\omega_1 + \omega_2)^2 \phi_D^{(2)} = \alpha_D \quad (5)$$

avec :

$$\alpha_D = i(\omega_1 + \omega_2) \left(\nabla \phi_1^{(1)} \nabla \phi_{D2}^{(1)} + \nabla \phi_{D1}^{(1)} \nabla \phi_{I2}^{(1)} \right) \quad (6)$$

$$- \frac{i\omega_1}{2g} \phi_1^{(1)} \left(-\omega_2^2 \frac{\partial}{\partial z} + g \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi_{D2}^{(1)} - \frac{i\omega_2}{2g} \phi_2^{(1)} \left(-\omega_1^2 \frac{\partial}{\partial z} + g \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi_{D1}^{(1)}$$

On démontre en outre [6] que le potentiel de diffraction de deuxième ordre, aux grandes distances radiales R , consiste en la superposition d'ondes dites "liées" (accompagnant le système d'ondes de premier ordre) et d'ondes libres :

$$\phi_D^{(2)}(R, \theta, z) = \phi_{DL1}^{(2)}(R, \theta, z) + \phi_{DL2}^{(2)}(R, \theta, z) + \phi_{DF}^{(2)}(R, \theta, z) \quad (7)$$

avec :

$$\phi_{DL1}^{(2)} \simeq a_1 a_2 \frac{A_{L1}(\theta)}{\sqrt{K_1 R}} e^{i(K_1 + K_2 \cos(\theta - \beta))R} \operatorname{ch} \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + 2K_1 K_2 \cos(\theta - \beta)}(z + H) \quad (8)$$

$$\phi_{DL2}^{(2)} \simeq a_1 a_2 \frac{A_{L2}(\theta)}{\sqrt{K_2 R}} e^{i(K_2 + K_1 \cos(\theta - \beta))R} \operatorname{ch} \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + 2K_1 K_2 \cos(\theta - \beta)}(z + H) \quad (9)$$

$$\phi_{DF}^{(2)} \simeq a_1 a_2 \frac{A_F(\theta)}{\sqrt{K_{12} R}} e^{K_{12} z} e^{iK_{12} R} \quad (10)$$

les deux premiers termes représentant les ondes dites "liées" et le dernier la composante "libre" de nombre d'onde K_{12} vérifiant la relation de dispersion :

$$(\omega_1 + \omega_2)^2 = gK_{12}$$

A noter que dans les potentiels des ondes liées on a écrit la dépendance en z sous la forme d'un $\operatorname{ch} \lambda(z + H)$, H étant la profondeur. Pour $K_1 \simeq K_2$ et $\theta = \beta + \pi$ en effet la décroissance en z du potentiel des ondes liées est très lente. Ce phénomène est à rapprocher du cas bien connu de la houle stationnaire, pour lequel on met en évidence une pression dynamique de deuxième ordre indépendante des variables d'espace. Il suggère que dans le secteur exposé à la houle ($\theta \simeq \beta + \pi$) les pressions de deuxième ordre peuvent solliciter la structure à des profondeurs non atteintes par les pressions de premier ordre.

Soit $F_j^{(2)}$ la j -ème composante des efforts de diffraction de deuxième ordre à la pulsation $\omega_1 + \omega_2$. $F_j^{(2)}$ se scinde en deux composantes :

$$F_j^{(2)} = \Re \left\{ (f_{1j}^{(2)} + f_{2j}^{(2)}) e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} \right\} \quad (11)$$

La première, ne dépendant que du potentiel de premier ordre, s'écrit :

$$f_{1j}^{(2)} = \frac{\rho}{2} \iint_{S_c} \nabla \phi_1^{(1)} \nabla \phi_2^{(1)} N_j dS + \frac{\rho \omega_1 \omega_2}{2g} \int_{\Gamma_0} \phi_1^{(1)} \phi_2^{(1)} N_j d\Gamma \quad (12)$$

(N_j étant la normale généralisée)

Et la seconde, qui ne dépend que du potentiel du second-ordre :

$$f_{2j}^{(2)} = i(\omega_1 + \omega_2) \rho \iint_{S_c} \phi_D^{(2)} N_j dS \quad (13)$$

Introduisant alors comme potentiel auxiliaire le potentiel de radiation φ_j suivant le degré de liberté j et à la pulsation $\omega_1 + \omega_2$ on montre (Molin, 1979) qu'on peut écrire $f_{2j}^{(2)}$ sous la forme :

$$f_{2j} = i(\omega_1 + \omega_2) \frac{\rho}{g} \iint_{z=0} \alpha_D \cdot \varphi_j dS \quad (14)$$

Il est ainsi possible d'avoir accès aux efforts de diffraction de deuxième ordre sans résoudre explicitement le problème de diffraction de deuxième ordre. Pour autant le calcul numérique de cette intégrale n'est pas aisé, α_D et φ_j étant de caractère oscillant et faiblement décroissant avec la distance radiale. De plus α_D fait intervenir des dérivées secondes du potentiel des vitesses, qui sont difficiles à évaluer avec une bonne précision numérique, particulièrement au voisinage de la carène [5].

La technique numérique habituellement utilisée consiste à diviser le plan de surface libre en deux domaines, limités par un cercle de rayon R_T . Dans le domaine intérieur l'intégrale est évaluée par quadrature numérique. Dans le domaine extérieur, on utilise les expansions asymptotiques des potentiels $\phi_1^{(1)}$, $\phi_2^{(1)}$, φ_j pour l'exprimer à l'aide des intégrales de Fresnel [6].

III. Diffraction radiation pour un ensemble de cylindres

Dans ce paragraphe on considère une PLT idéalisée sous la forme de N_C cylindres verticaux reposant sur le fond marin. Une méthode exacte de résolution du problème linéarisé de diffraction a été proposée par Linton et Evans (1989). Elle consiste à écrire le potentiel de diffraction sous la forme :

$$\phi_D^{(1)} = -\frac{ag \operatorname{ch}K(z+H)}{\omega \operatorname{ch}KH} \sum_{j=1}^{N_C} I_{jj} \sum_{n=-N}^N D_n^j e^{in(\pi/2+\beta)} \frac{J'_n(KR_j)}{H'_n(KR_j)} \mathbf{H}_n(Kr_j) e^{-in\theta_j} \quad (15)$$

Ici (r_j, θ_j) sont les coordonnées du sous-système dont l'origine est le centre (x_{oj}, y_{oj}) du j -ème cylindre de rayon R_j (voir figure 2). J_n est la fonction de Bessel du premier espèce et $\mathbf{H}_n = J_n + iY_n$ la fonction de Hankel. Le théorème d'addition de Graf permet d'exprimer la condition de glissement sur chacun des cylindres sous la forme :

$$D_n^j + \sum_{k=1, k \neq j}^{N_C} I_{kj} \sum_{m=-N}^N D_m^k \frac{J'_m(KR_k)}{H'_m(KR_k)} \mathbf{H}_{m-n}(KR_{kj}) e^{i(m-n)(\pi/2+\beta-\alpha_{kj})} = -1 \quad (16)$$

Dans ces équations I_{jj} et I_{kj} représentent des déphasages et s'écrivent :

$$I_{jj} = e^{iK(x_{oj} \cos \beta + y_{oj} \sin \beta)} \quad I_{kj} = e^{iK[(x_{ok} - x_{oj}) \cos \beta + (y_{ok} - y_{oj}) \sin \beta]} \quad (17)$$

L'ordre de troncature N étant déterminé de façon que l'erreur, estimée comme $|J'_N(KR_j)/H'_N(KR_j)|$ soit inférieure à une précision demandée, la résolution du système d'équation (16) permet de déterminer les coefficients D_n^j et donc d'avoir accès, sous forme analytique, au potentiel des vitesses dans tout le domaine fluide.

En particulier la première composante $f_{1j}^{(2)}$ des efforts de deuxième ordre et le second membre α_D de l'équation de surface libre peuvent être évalués économiquement et avec une excellente précision.

Il est aisé d'étendre la méthode de Linton et Evans à la résolution des problèmes de radiation en cavement et tangage. Les développements correspondants sont donnés en annexe. L'intégrale de surface libre peut alors être évaluée sans difficulté.

Une variante (également décrite en annexe) consiste à introduire des potentiels de radiation auxiliaires tels que seule la partie supérieure (définie par $0 \geq z \geq z_i$) des cylindres verticaux bouge, la partie inférieure demeurant fixe. L'intégrale de surface libre correspondante nous donne alors la partie des efforts de deuxième ordre (dus à $\phi_D^{(2)}$) qui s'applique sur la partie supérieure des cylindres. Par répétition de cette opération pour différentes cotes z_i et par différentiation, on a accès à la distribution verticale de ces efforts.

A titre d'illustration on traite le cas de 4 cylindres verticaux, de 25 mètres de diamètre, et de 76 mètres d'entre-axes, par 130 mètres de profondeur d'eau, soumis à une houle régulière de pulsation 1.4 rd/s, et d'incidence 0 degré. Soient $f_{21}^{(2)}(z_i)$ et $f_{25}^{(2)}(z_i)$ les contributions de $\phi_D^{(2)}$ aux efforts de deuxième ordre (donc à la pulsation 2.8 rd/s) en cavement et tangage. On présente sur la figure 3 les quantités :

$$\frac{f_{21}^{(2)}(z_{i+1}) - f_{21}^{(2)}(z_i)}{z_i - z_{i+1}} \quad \frac{f_{25}^{(2)}(z_{i+1}) - f_{25}^{(2)}(z_i)}{z_i - z_{i+1}} \quad (18)$$

en fonction de z_{i+1} , et normalisées par leur valeur sur la première tranche (de $z = 0$ à $z = -25$ mètres).

On observe que le premier rapport tend vers zéro (grossièrement) comme z_{i+1}^{-1} et que le second vaut à peu près 1. On retrouve un résultat établi par Newman [3] (1990), à savoir que le potentiel de diffraction de deuxième ordre décroît en z^{-1} (ce résultat n'étant valable qu'en houle régulière, et de façon asymptotique, à grande profondeur et petite distance radiale).

IV. Résolution numérique du problème de radiation

De ce qui précède il ressort que notre idéalisation de la PLT en 4 cylindres verticaux est correcte, paradoxalement, pour le problème de diffraction de premier ordre, mais pas pour celui de deuxième ordre. Si l'on veut calculer les efforts de deuxième ordre sur une plate-forme réelle, il n'est d'autre recours que d'introduire, dans l'intégrale de surface libre, les potentiels de radiation correspondant à la structure réelle. Par contre, pourvu que le tirant d'eau soit suffisant, notre idéalisation tient pour la première composante des efforts de deuxième ordre ($f_{1j}^{(2)}$) et surtout pour le deuxième membre de la condition de surface libre α_D .

Un modèle numérique de résolution du problème linéarisé de diffraction-radiation (Bolang) a donc été utilisé, basé sur une distribution de sources de Kelvin sur la carène. Pour des précisions sur le modèle on renvoie à Chen (1988). Les critères habituels de finesse de discrétisation (6 à 8 facettes par longueur d'onde) ont été appliqués, ce qui a conduit à 3 472 facettes sur le quart de la carène dans le cas $\omega_1 + \omega_2 = 2.8$ rd/s (figure 4). Pour la résolution du système linéaire, l'application de la méthode d'élimination de Gauss conduit à un coût prohibitif, aussi une méthode itérative (gradient bi-conjugué) a été appliquée. Plus que le coût de résolution du système linéaire (367 secondes sur CRAY2), celui de la récupération des potentiels de radiation sur le plan de surface libre (en un nombre de points allant jusqu'à 11 827 sur le huitième du domaine - voir figure 5) est impressionnant : 2408 secondes (toujours sur CRAY2).

Convergence de l'intégrale de surface libre

On a indiqué ci-dessus que la technique utilisée pour le calcul de cette intégrale consiste à diviser le plan de surface libre en un domaine intérieur où elle est évaluée par quadrature numérique et un domaine extérieur où on met à profit les expressions de champs lointains des potentiels. La distance radiale jusqu'où s'étend le domaine intérieur doit donc être telle que les composantes évanescentes des potentiels aient disparu. Le problème est que, particulièrement pour le potentiel de radiation en pilonnement, ces composantes évanescentes se font ressentir à de grandes distances radiales (le champ lointain étant, lui, quasi nul !). Par ailleurs il est nécessaire de mailler finement le domaine intérieur afin de bien prendre en compte les oscillations rapides de l'intégrand.

Après quelques tests préliminaires il a été décidé de situer la frontière du domaine intérieur à une distance radiale égale au maximum des deux valeurs :

- 15 fois la longueur d'onde L_{12} associée à $\omega_1 + \omega_2$ ($2\pi/K_{12}$)

- 20 fois le rayon des colonnes (distance "maximale" jusqu'à laquelle se font ressentir les ondes évanescentes).

Le pas du maillage intérieur varie lui de 0.05 L_{12} au voisinage immédiat des colonnes à 0.1 L_{12} à la frontière du domaine intérieur (figure 5).

Les figures 6 et 7 présentent deux exemples de calcul de l'intégrale de surface libre. En abscisse figure la distance radiale R rapportée au rayon R_0 des colonnes. Les valeurs correspondant à cette abscisse consistent en :

1. L'intégration numérique dans le sous-domaine intérieur limité par le cercle de rayon R .
2. Cette même valeur à laquelle on rajoute la contribution asymptotique de R à l'infini.
3. Un lissage local de la première valeur (les fréquences spatiales d'oscillation étant connues).

On constate sur ces deux cas que la convergence à $R = R_T$ n'est pas parfaite, mais apparaît acceptable. On a en général retenu la valeur "lissée" comme valeur finale.

V. Résultats

La PLT considérée est celle de Snorre. Elle est formée de 4 colonnes de 25 mètres de diamètre et 76 mètres d'entre-axes, reliées à leurs bases par 4 pontons de section 11.3×11.3 mètres. Le tirant d'eau est de 37.5 mètres et le déplacement d'environ 110 000 tonnes.

La figure 8 présente, pour la pulsation de houle 1.2 rad/s, les parties réelles et imaginaires du potentiel de diffraction sur l'axe $y = z = 0$, obtenues d'une part par la méthode de Linton et Evans et d'autre part par un modèle de diffraction-radiation (Bolang). On constate que l'accord est excellent. L'utilisation de la valeur semi-analytique du deuxième membre α_D de l'équation de surface libre est donc justifiée.

Un autre point qui demande validation est le calcul numérique des potentiels de radiation pour la PLT complète. Pour cela on présente sur la figure 9 les coefficients d'amortissement en cavalemt obtenus par le modèle numérique et par la méthode semi-analytique. On constate un bon accord même à la pulsation la plus élevée (2.8 rd/s).

Enfin on présente quelques résultats pour les efforts de deuxième ordre. Il s'agit donc d'une part des efforts s'appliquant sur la plate-forme réelle, en profondeur infinie, et d'autre part des efforts s'appliquant sur la moitié supérieure d'un ensemble de 4 cylindres verticaux dans 130 mètres d'eau (sensés modéliser une autre PLT, celle d'Heidrun, de 65 mètres de tirant d'eau).

On considère tout d'abord le cas d'une houle régulière d'incidence 0 degré. La figure 10 présente les efforts de deuxième ordre obtenus pour la PLT de Snorre (symboles), et pour la partie supérieure des 4 cylindres. Outre le module de l'effort global, sont également présentés les modules de ses deux composantes, celle dépendant du potentiel de premier ordre ($f_{1j}^{(2)}$) et celle obtenue par l'intégrale de surface libre ($f_{2j}^{(2)}$). Enfin la dernière courbe correspond à 4 fois l'effort de deuxième ordre s'appliquant sur une colonne de 37.5 m de tirant d'eau.

On constate tout d'abord, bien qu'il ne s'agisse pas de la même structure, un bon accord entre les valeurs relatives à Snorre et celles relatives aux quatre moitiés de piles (il en va évidemment autrement pour les efforts en tangage). On note que la contribution du potentiel de deuxième ordre est prépondérante. Celle due au potentiel de premier ordre est généralement de signe opposé, aussi le module de la somme est-il à peu près égal à la différence des modules. Enfin les effets d'interaction entre les colonnes sont très importants, et peuvent conduire à une annulation complète des efforts ou au contraire à des valeurs équivalant à 6 ou 7 colonnes isolées.

On passe maintenant à des cas de houles bichromatiques, telles que la somme de leurs pulsations soit égale à 2.65 rd/s (ce qui correspond à peu près aux périodes propres de Snorre), et toujours d'incidence 0 degré. Les figures 11, 12 et 13 présentent les modules des efforts de deuxième ordre obtenus en cavalemt, tangage et pilonnement, en fonction de la différence $\omega_1 - \omega_2$ des deux pulsations. Pour les efforts horizontaux (figure 11) on observe à nouveau un bon accord entre les deux structures. Pour le moment en tangage (exprimé par rapport à l'axe oy) l'accord n'est bon que lorsque les deux pulsations diffèrent fortement. Si l'on se réfère au champ lointain du potentiel de diffraction de deuxième ordre (éq. 7 à 10) on comprend que sa pénétration verticale décroisse lorsque $|\omega_1 - \omega_2|$ augmente. Seules les parties supérieures des colonnes sont alors affectées et on obtient des résultats identiques pour les deux structures. A l'inverse, aux faibles valeurs de $|\omega_1 - \omega_2|$ les parties profondément immergées se trouvent également affectées et on observe des différences sensibles. Cette pénétration variable du potentiel de diffraction de deuxième ordre se traduit également par une forte variation des efforts verticaux (figure 13) avec $|\omega_1 - \omega_2|$.

On n'a jusqu'à maintenant présenté des résultats que pour des houles d'incidence nulle. Aux faibles périodes de houle qui nous intéressent on peut s'attendre à une forte sensibilité de ces efforts avec l'incidence et c'est effectivement le cas. La figure 14 présente la variation des efforts de deuxième ordre en cavalemt avec l'incidence, dans le cas $\omega_1 = \omega_2 = 1.4$ rd/s. Six degrés suffisent à passer du maximum au minimum ! On est en droit de se demander ce qu'on obtiendrait en supposant que les deux composantes de houle sont de directions différentes (ce qu'il faudrait faire, en toute rigueur, pour étendre les résultats au cas d'une houle multidirectionnelle).

Enfin on présente, sur la figure 15, les efforts de dérive agissant sur notre ensemble de 4 colonnes pour 0, 22.5 et 45 degrés d'incidence, en fonction de la pulsation. Pour une colonne isolée on atteint rapidement un régime asymptotique (égal à 4/3 avec les conventions et l'adimensionalisation utilisées). Pour 4 colonnes il ne semble pas y avoir de régime asymptotique, en raison des réflexions multiples entre les colonnes.

Conclusion

Les résultats présentés montrent qu'il n'existe pas de façon simple de prédire les efforts de diffraction de deuxième ordre agissant sur des structures comme les plates-formes à lignes tendues : la contribution du potentiel de diffraction de deuxième ordre ne peut être négligée et on ne peut déduire ces efforts de ceux agissant sur des structures plus simples, comme une colonne isolée ou un ensemble de colonnes. De plus les réflexions multiples entre les colonnes conduisent à de très rapides variations de ces efforts avec les fréquences et incidences de houle. Pour le concepteur le bilan est quelque peu décourageant.

Une étape indispensable est maintenant la validation expérimentale de ces calculs. Si un accord semble s'être enfin fait, dans la communauté scientifique internationale, sur la théorie, celle-ci ne dit rien quant au domaine de validité des résultats obtenus. Seules des mesures expérimentales peuvent dire jusqu'à quelles cambrures la loi quadratique (reliant les efforts de deuxième ordre à l'amplitude de houle) est vérifiée. De tels essais devraient avoir lieu prochainement à Marintek.

Enfin les actions en cours, en Norvège, sur les mécanismes dissipateurs d'énergie, montrent que les choses ne sont pas simples non plus de ce côté là.

Remerciements

Cette étude a été soutenue, en partie, par la Fondation Franco-Norvégienne. Le logiciel de visualisation du maillage et le solveur itératif ont été fournis aimablement par le Laboratoire d'Hydrodynamique Navale de l'ENSM.

Bibliographie

- [1] **B. Molin** 1979 "Second-order diffraction loads upon three-dimensional bodies" Applied Ocean Research. Vol:1 No:4 pp197-202.
- [2] **C.M. Linton and D.V. Evans** 1989 "Scattering of waves by vertical cylinders" The Fifth International Workshop on Water Waves and Floating Bodies. pp133-137.
- [3] **J.N. Newman** 1990 "Second-harmonic wave diffraction at large depths" Journal of Fluid Mechanics. Vol:213 pp59-70.
- [4] **B. Molin** 1987 "Quelques réflexions sur la résolution du problème de diffraction de deuxième ordre" Actes des Premières Journées de l'Hydrodynamique. Nantes. pp85-103.
- [5] **X.B. Chen** 1989 "Evaluation des efforts de basse fréquence sur une structure soumise à une houle irrégulière - comparaison de différentes approximations" Actes des Deuxièmes Journées de l'Hydrodynamique. Nantes. pp141-156.
- [6] **X.B. Chen** 1988 "Etude des réponses du second-ordre d'une structure soumise à une houle aléatoire" Thèse de Doctorat, E.N.S.M. Université de Nantes.

Annexe : Radiation par un groupe de cylindres

La solution du problème de radiation peut être évaluée par une approche similaire à celle de diffraction. Nous supposons maintenant que le potentiel de radiation s'écrit de la façon suivante :

$$\phi_R^{(1)} = \sum_{n=-N}^N \left[f_0(z) \sum_{j=1}^{N_c} D_{0n}^j \frac{\mathbf{H}_n(Kr_j)}{\mathbf{H}'_n(KR_j)} + \sum_{m=1}^M f_m(z) \sum_{j=1}^{N_c} D_{mn}^j \frac{\mathbf{K}_n(K_m r_j)}{\mathbf{K}'_n(K_m R_j)} \right] e^{-in\theta_j} \quad (A.1)$$

Dans cette expression K_m sont les nombres d'onde des modes évanescents et les coefficients D_{mn}^j sont déterminés par les équations :

$$D_{0\ell}^j + \sum_{k=1, k \neq j}^{N_c} \sum_{n=-N}^N D_{0n}^k \frac{\mathbf{J}'_n(KR_j)}{\mathbf{H}'_n(KR_j)} \mathbf{H}_{n-\ell}(K_0 R_{kj}) e^{-i(n-\ell)\alpha_{kj}} = S_\ell \quad (A.2)$$

$$D_{m\ell}^j + \sum_{k=1, k \neq j}^{N_c} \sum_{n=-N}^N D_{mn}^k \frac{\mathbf{I}'_n(K_m R_j)}{\mathbf{K}'_n(K_m R_j)} \mathbf{K}_{n-\ell}(K_m R_{kj}) e^{-i(n-\ell)\alpha_{kj}} = S_\ell$$

Les seconds membres S_ℓ de ces équations sont définis par :

$$S_\ell = \begin{cases} 1/2 & \text{pour } \ell = -1, 1 ; \\ 0 & \text{pour les autres } \ell. \end{cases} \quad (A.3)$$

pour le cavement et le tangage et :

$$S_\ell = \begin{cases} -i/2 & \text{pour } \ell = -1 ; \\ i/2 & \text{pour } \ell = 1 ; \\ 0 & \text{pour les autres } \ell. \end{cases} \quad (A.4)$$

pour l'embarde et le roulis.

Les fonctions $f_0(z)$, $f_m(z)$ sont écrites sous la forme suivante :

$$f_0(z) = C_0 \frac{\text{ch}K(z+H)}{\text{ch}KH} \quad f_m(z) = C_m \frac{\cos K_m(z+H)}{\cos K_m H} \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (A.5)$$

Les constantes $C_0, C_m, (m = 1, 2, \dots, M)$ sont déterminées par la satisfaction de la condition de glissement sur la génératrice des cylindres :

$$f_0(z) + \sum_{m=1}^M f_m(z) = \begin{cases} 1 & \text{pour } z_i \leq z \leq 0 \text{ (cavement et embarde)}; \\ z & \text{pour } z_i \leq z \leq 0 \text{ (roulis et tangage)}; \\ 0 & \text{pour } -H \leq z < z_i. \end{cases} \quad (A.6)$$

En utilisant l'orthogonalité des fonctions $\text{ch}K_0(z+H)$ et $\cos K_m(z+H)$ sur $(-H, 0)$, on obtient :

$$C_0 = \frac{4\text{ch}K_0 H [\text{sh}K_0 H - \text{sh}K_0(H+z_i)]}{2K_0 H + \text{sh}2K_0 H} \quad C_m = \frac{4 \cos K_m H [\sin K_m H - \sin K_m(H+z_i)]}{2K_m H + \sin 2K_m H} \quad (A.7)$$

pour le cavement et l'embarde. Et:

$$C_0 = \frac{4\text{ch}KH [-Kz_i \text{sh}K(H+z_i) + \text{ch}K(H+z_i) - \text{ch}KH]}{K(2KH + \text{sh}2KH)} \quad (A.7)$$

$$C_m = \frac{4 \cos K_m H [-K_m z_i \sin K_m(H+z_i) - \cos K_m(H+z_i) + \cos K_m H]}{K_m(2K_m H + \sin 2K_m H)} \quad (A.8)$$

pour le roulis et le tangage.

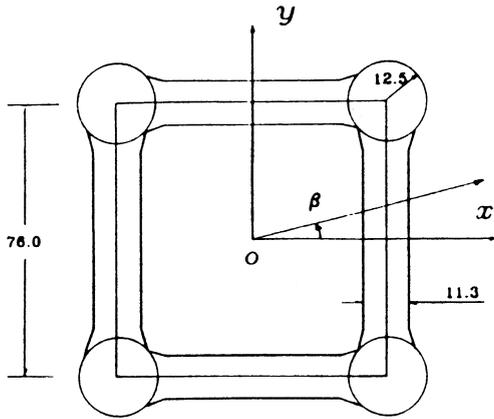


Figure 1 (↑) Système de référence — Le système d'axes est un trièdre fixe (o, xyz) dont l'origine se situe au centre de la plateforme, le plan xoy coïncide avec celui de la surface libre au repos et l'axe oz est vertical ascendant. La direction de houle est représentée par l'angle β entre celle-ci et l'axe ox .

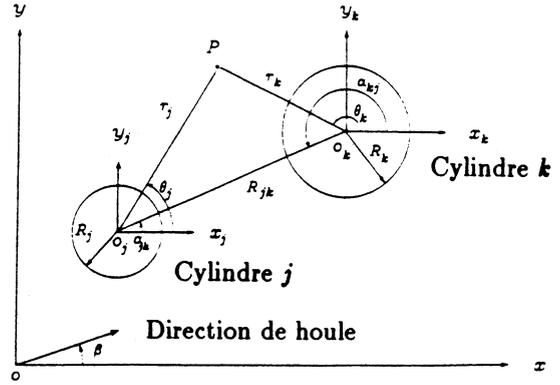


Figure 2 (↑) Repères pour un ensemble de cylindres — Les repères locaux sont au centre de chaque cylindre. Les relations entre les repères sont déterminées par les constantes α_{jk}, R_{jk} (j, k étant les numéros des cylindres).

Figure 3 (→) Facteur d'atténuation des efforts du deuxième ordre — Le symbole \square représente le facteur d'atténuation des efforts du deuxième ordre en cavement et \odot celui des efforts en tangage. Les lignes — sont une approximation de ces résultats.

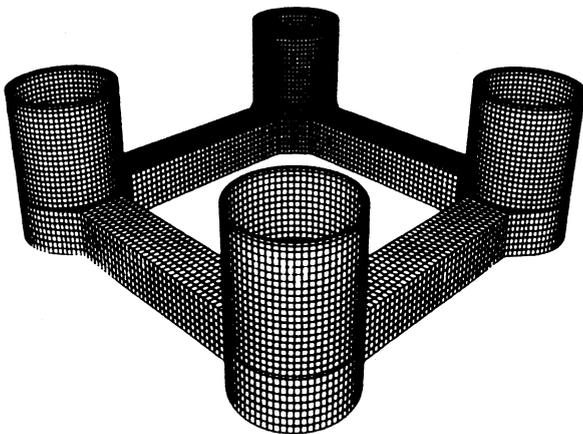
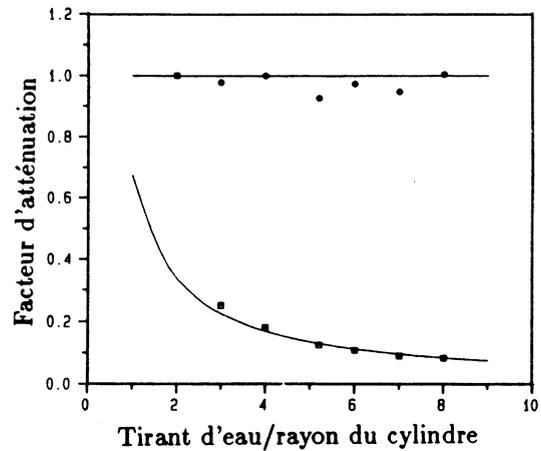


Figure 4 (←) Maillage de la carène pour $\omega_1 + \omega_2 = 2.8 \text{ rd/s}$ — Le quart de la carène est discrétisé en 3 472 facettes (au total: 13 888 facettes).

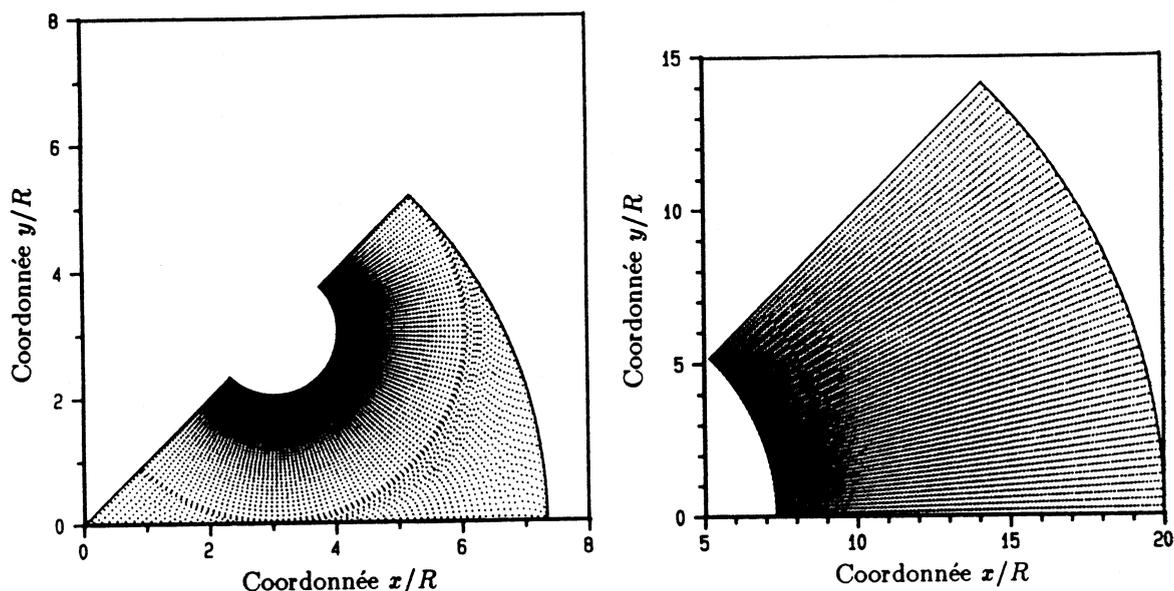


Figure 5 (↑ + ↗) Discrétisation de la surface libre — Le rayon du domaine est égale à 20 fois celui des colonnes. Le pas du maillage intérieur varie de $0.05L_{12}$ (ici $L_{12} = 2\pi g/(\omega_1 + \omega_2)^2$) au voisinage immédiat des colonnes à $0.10L_{12}$ à la frontière du domaine. Le nombre des points sur le huitième du domaine est de 11 827 (pour $\omega_1 + \omega_2 = 2.8$ rd/s).

Figure 6 (↓) Convergence de $f_{21}^{(2)}$ — Intégrale sur le plan de surface libre en fonction du rayon de troncature : - - - - valeur numérique, - · - · - valeur numérique + terme asymptotique, — valeur lissée. Le cas ici est de $\omega_1 = 0.8$ rd/s et $\omega_2 = 0.6$ rd/s, la composante des efforts en cavement est adimensionalisée par $(\rho g R a_1 a_2)$: 1 — partie réelle et 2 — partie imaginaire.

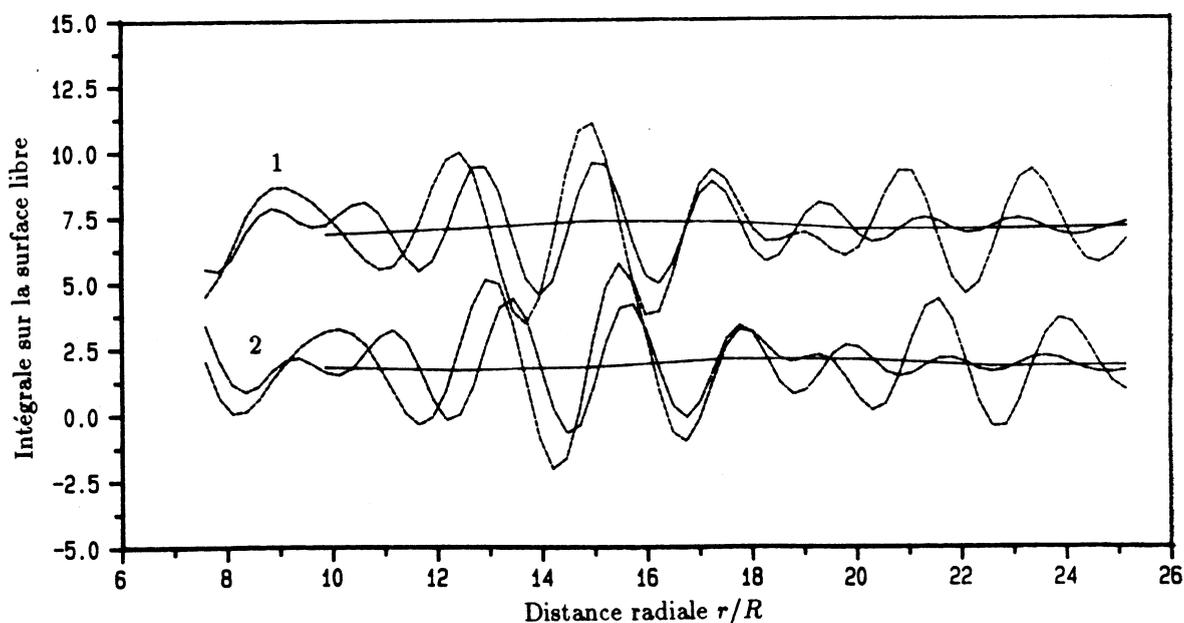


Figure 7 (↓) Convergence de $f_{23}^{(2)}$ — Intégrale sur la surface libre en fonction du rayon de troncature : - - - valeur numérique, — valeur lissée. Le cas ici est de $\omega_1 = \omega_2 = 1.4$ rad./sec., la composante des efforts en pilonnement est adimensionalisée par $(\rho g R a_1 a_2)$: 1 — partie réelle et 2 — partie imaginaire.

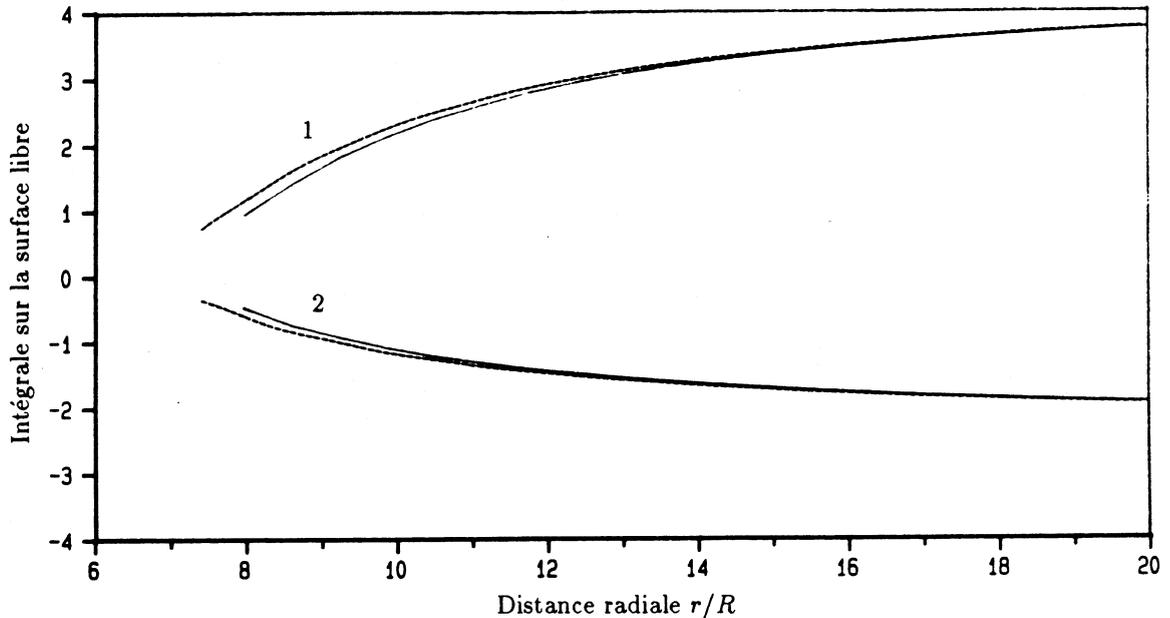
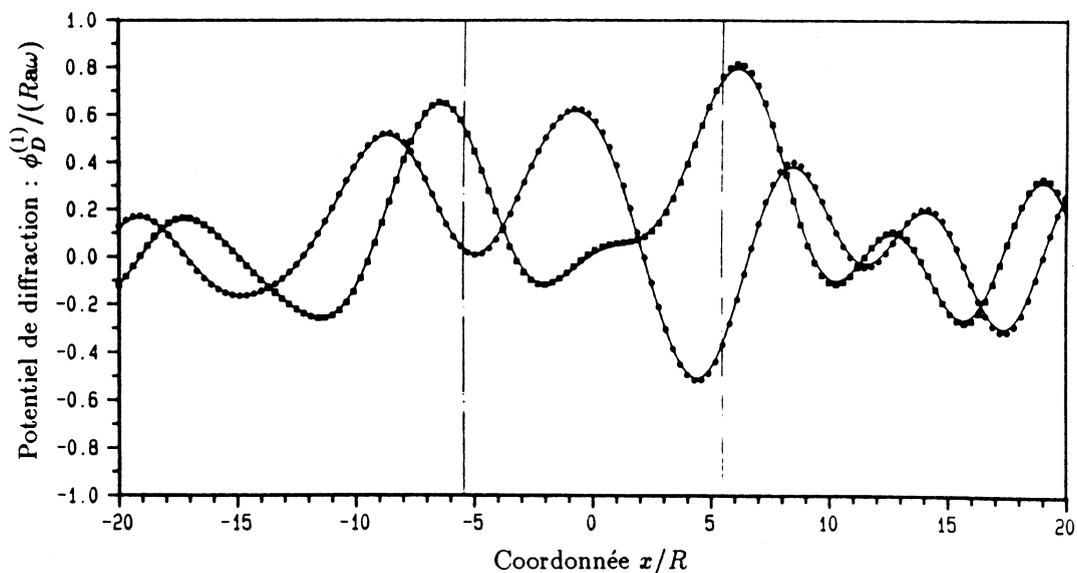


Figure 8 (↓) Potentiel de diffraction sur la surface libre pour $\omega = 1.2$ rd/s — Les symboles \square et \odot représentent les parties réelles et imaginaires de $\phi_D^{(1)}$ (sur l'axe ox) obtenues par le modèle numérique (Bolang) pour la plate-forme complète. Les lignes représentent les résultats obtenus par la méthode semi-analytique de Linton et Evans. (Les traits verticaux indiquent la position des colonnes).



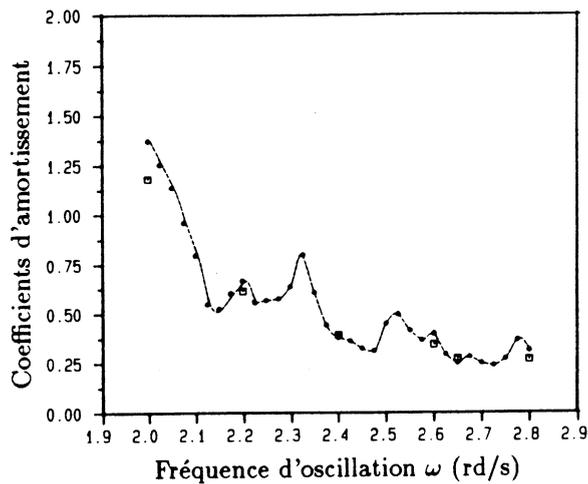


Figure 9 (←) Coefficients d'amortissement — Les symboles \square représentent les coefficients d'amortissement en cavalemt Ca11 / $(\rho R^3 \omega)$ obtenus par le modèle numérique (Bolang) pour la plate-forme complète. Les symboles \odot (reliés par les pointillés) représentent les résultats obtenus avec le modèle semi-analytique.

Figure 10 (→) Efforts de deuxième ordre en cavalemt — Les symboles \square , \odot et \triangle représentent les modules de la première et de la deuxième composantes des efforts de deuxième ordre, et de leur somme, obtenus par Bolang. Les courbes - - - -, - . - . - et — sont obtenues par le modèle semi-analytique pour une structure composée de 4 colonnes. La courbe ——— représente 4 fois les résultats d'un cylindre isolé.

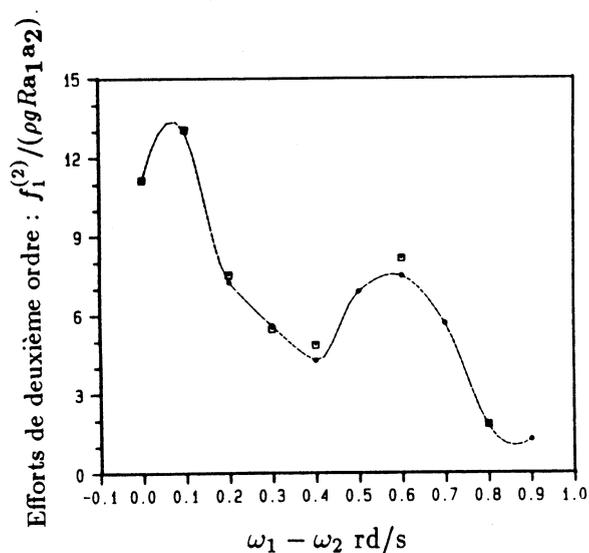
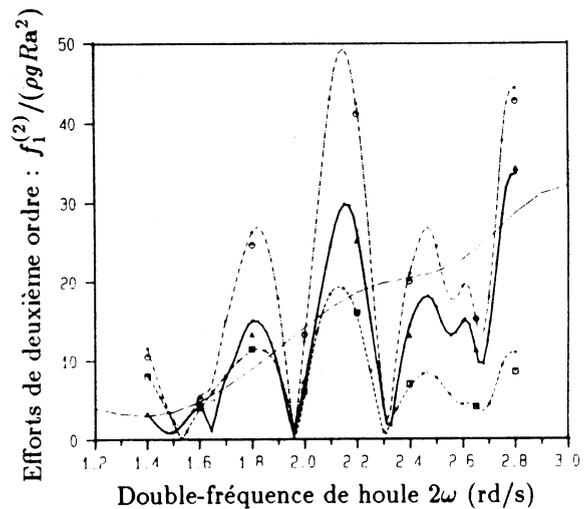


Figure 11 (←) Efforts de deuxième ordre en cavalemt pour $\omega_1 + \omega_2 = 2.65$ rd/s, en fonction de $\omega_1 - \omega_2$ — Les symboles \square représentent les résultats obtenus par le modèle numérique (Bolang) et les symboles \odot (reliés par les pointillés) représentent les résultats obtenus par le modèle semi-analytique.

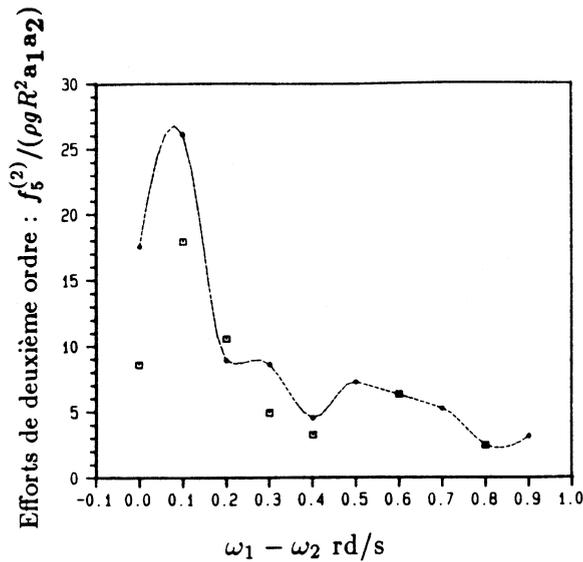


Figure 12 (\uparrow) Efforts de deuxième ordre en tangage pour $\omega_1 + \omega_2 = 2.65$ rd/s, en fonction de $\omega_1 - \omega_2$ — Les symboles \square représentent les résultats obtenus par le modèle numérique (Bolang) et les symboles \odot (reliés par les pointillés) représentent les résultats obtenus par le modèle semi-analytique.

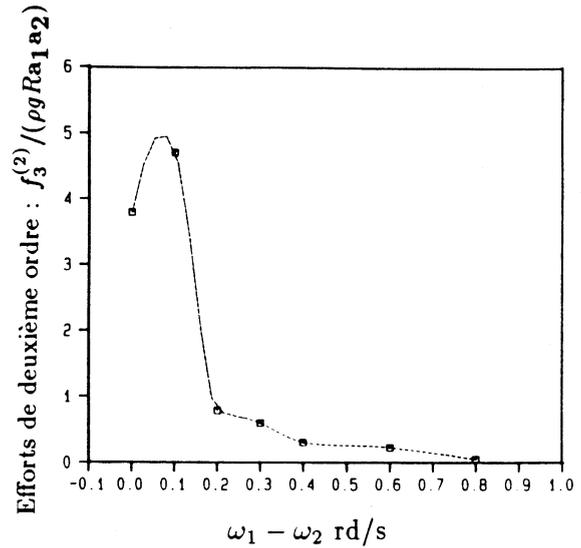


Figure 13 (\uparrow) Efforts de deuxième ordre en pilonnement pour $\omega_1 + \omega_2 = 2.65$ rd/s, en fonction de $\omega_1 - \omega_2$ — Les symboles \square (reliés par les pointillés) représentent les résultats obtenus par le modèle numérique (Bolang).

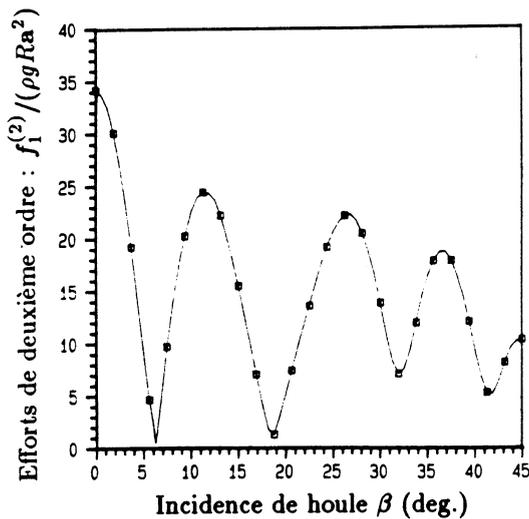


Figure 14 (\uparrow) Efforts de deuxième ordre en fonction des incidences de houle — Efforts en cavalement obtenus par le modèle numérique (Bolang) pour la plate-forme complète dans le cas $\omega_1 = \omega_2 = 1.4$ rd/s.

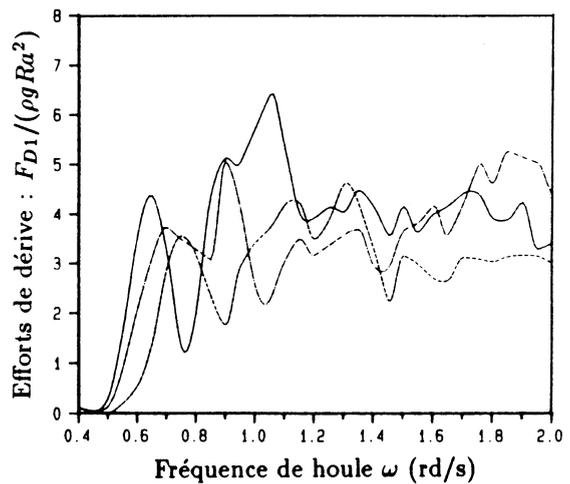


Figure 15 (\uparrow) Efforts de dérive en cavalement — Résultats obtenus par le modèle semi-analytique pour 4 colonnes verticales : — $\beta = 0.0$ deg., - - - $\beta = 22.5$ deg. et - - - $\beta = 45.0$ deg.