

**SIMULATION NUMERIQUE D'ÉCOULEMENTS INSTATIONNAIRES
TRIDIMENSIONNELS A SURFACE LIBRE**

P. FERRANT

SIREHNA SA 2, quai de la Jonelière 44300 Nantes
Tel 40 74 61 71, Fax (ENSM): 40 74 74 06

RESUME

Nous présentons les principales caractéristiques, ainsi que quelques résultats significatifs d'un modèle numérique dédié à la simulation d'écoulements instationnaires tridimensionnels à surface libre, en théorie linéarisée. Le problème est posé en domaine borné, et la méthode de résolution est basée sur une représentation intégrale de la solution, étendue à l'ensemble des limitantes du domaine de calcul. La discrétisation des frontières est effectuée à l'aide d'éléments triangulaires plans supportant des densités de singularités variant linéairement en espace. La marche en temps est menée en intégrant les équations différentielles de surface libre, ainsi éventuellement que les équations de la dynamique d'un flotteur par une méthode de Runge-Kutta du 4^{ème} ordre. Les applications présentées reflètent les potentialités actuelles du code de calcul: génération d'ondes de gravité dans un domaine borné de forme quelconque par mouvement imposé de parois matérielles, propagation et interaction de ces ondes avec un corps fixe ou flottant.

SUMMARY

We report on computations using a numerical model for the simulation of linear threedimensional unsteady free surface flows. The problem is solved in a closed domain, from an integral representation extended to the entire boundary of the computational domain. Boundaries are approximated by triangular plane panels with piecewise linear variation of singularities distributions, and collocation points are placed at panel vertices. The solution is advanced in time by integrating the free-surface differential equations, and, in case, the equations of motion of a floating body by a standard 4th order Runge-Kutta method. We present significant applications of the model: generation of surface waves by forced motion of material boundaries, propagation and interaction of these waves with a fixed or freely floating body.

INTRODUCTION

La modélisation numérique des écoulements instationnaires à surface libre, si l'on se limite aux méthodes basées sur une représentation intégrale de la solution, peut être abordée selon deux approches.

La première consiste à exploiter la fonction de Green du problème instationnaire à surface libre. La représentation intégrale est alors réduite aux parois matérielles, la condition linéarisée de surface libre ainsi que les conditions à l'infini étant satisfaites de manière intrinsèque par la fonction de Green. Cette première approche présente l'avantage de limiter le nombre des inconnues, et permet d'aborder de façon naturelle la simulation d'écoulements en milieu ouvert. En revanche, seules les non-linéarités associées aux déplacements des frontières matérielles peuvent être éventuellement prises en compte (Ferrant 1988-1990, Beck & Magee 1990).

La seconde approche est basée sur une représentation intégrale exploitant les opérateurs élémentaires de Rankine ne satisfaisant que l'équation de Laplace. Le problème est alors naturellement posé dans un domaine borné comprenant la surface libre, le corps, et une surface de fermeture qui peut être soit une paroi matérielle si l'on modélise un bassin de houle, soit une surface fictive sur laquelle on applique des conditions de raccord pour simuler un milieu ouvert. Au prix d'un accroissement du nombre des inconnues, et de difficultés dans le choix des éventuelles conditions de raccord, cette deuxième approche permet de prendre en compte l'ensemble des non-linéarités du problème, en employant la méthode mixte Euler-Lagrange due à Longuet-Higgins & Cockett (1976): à t fixé, on résout un problème à frontières figées avec une condition de Neumann sur les parois matérielles et une condition de Dirichlet sur la surface libre (étape Eulérienne). De t à $t+dt$, la position de marqueurs matériels à la surface libre est actualisée en intégrant en temps les équations différentielles de surface libre (étape Lagrangienne). La méthode MEL a été développée initialement pour l'étude de la cinématique de la houle. De nombreuses applications bidimensionnelles ont suivi, avec le développement de codes de calcul constituant de véritables "bassins numériques" bidimensionnels. Parmi les codes les plus récents, on peut citer en France *Sindbad* (Cointe 1989) et *Canal* (Clément 1991).

Le passage au tridimensionnel *non-linéaire*, sans difficulté apparente sur le plan de la formulation, présente des points durs spécifiques (temps de calcul, systèmes de rang élevé, gestion de la déformation des frontières, etc...) que nous avons choisi d'aborder dans un premier temps sur le problème linéarisé. Nous présentons donc les résultats d'une étude menant à la réalisation d'un "bassin numérique" tridimensionnel *linéarisé*, qui outre son intérêt en temps qu'étape vers le futur modèle 3D non-linéaire, constitue un outil original pour l'étude de la génération et de la propagation de la houle en bassin d'essai.

On modélise donc la génération de la houle par les parois d'un bassin de forme quelconque soumises à des lois de mouvement données, la propagation de cette houle et son interaction éventuelle avec un corps fixe ou flottant présent dans le bassin. La modélisation numérique a été conduite dans l'optique du passage ultérieur au non-linéaire, et correspond à une version linéarisée de la méthode Euler-Lagrange: intégration des équations découplées de surface libre, avec pour inconnues potentiel et élévation par un schéma de Runge-Kutta, mise au point d'un solveur d'équations intégrales élaboré fondé sur une discrétisation du domaine par facettes triangulaires supportant des densités de singularités variant linéairement en espace, inconnues spécifiées aux noeuds du maillage, continuité de la solution sur le domaine.

FORMULATION ET METHODE DE RESOLUTION

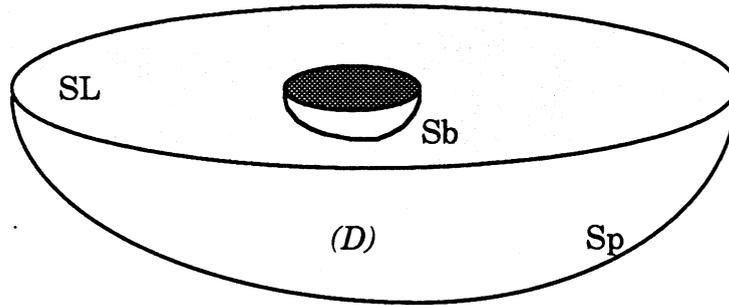


Figure 1: le domaine de calcul

Nous supposons que le fluide est parfait, pesant et incompressible, et que l'écoulement engendré dans le domaine D à partir d'un état initial de repos est irrotationnel. La surface libre SL est soumise à la pression atmosphérique supposée constante et prise comme référence de pression. L'écoulement est donc potentiel, avec:

$$V(M, t) = \text{grad } \Phi(M, t) \quad (1)$$

Le problème aux limites linéarisé pour Φ est le suivant, les grandeurs étant réduites par rapport à une longueur de référence H et à l'accélération de la pesanteur g :

$$\Delta \Phi(M, t) = 0 \quad \text{pour } M \in D \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = V \cdot n \quad \text{pour } M \in Sb \cup Sp \quad (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\eta(t) \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \end{array} \right\} \quad \text{pour } M \in SL \quad (4)$$

où η est l'élévation de surface libre.

La formule de Green, appliquée dans le domaine D au potentiel des vitesses $\Phi(M, t)$ et à la fonction de Green du milieu infini (source de Rankine) $G(M, M') = -MM'/4\pi$, mène à la représentation intégrale suivante, où Ω est l'angle solide sous lequel le domaine D est vu depuis M :

$$\frac{\Omega(M)}{4\pi} \Phi(M, t) = \iint_S \left\{ \Phi(M', t) \frac{\partial}{\partial n'} G(M, M') - G(M, M') \frac{\partial}{\partial n'} \Phi(M', t) \right\} dS_{M'} \quad \text{pour } M \in S \quad (5)$$

Le principe de résolution est le suivant: à un instant donné t , on suppose connus:

- le potentiel sur la surface libre S_l
- la vitesse normale sur les surfaces matérielles $S_b \cup S_p$

Après prise en compte de ce jeu de conditions aux limites, on obtient à partir de la représentation intégrale (5) des équations intégrales de Fredholm de première ou de seconde espèce suivant que le point de contrôle M est situé sur la surface libre ou sur une paroi matérielle. La résolution de ces équations intégrales est fondée sur une discrétisation des frontières par des panneaux triangulaires plans supportant des densités linéairement variables de sources et de doublets normaux. Les inconnues sont les valeurs nodales des densités de singularités, et les points de contrôles sont eux-même placés aux noeuds du maillage, ce qui conduit à un système linéaire dont le rang est sensiblement égal à la moitié du nombre de facettes. La résolution de ce système linéaire donne accès au potentiel sur les parois matérielles, et à la vitesse normale sur la surface libre. La méthode de discrétisation adoptée assure de façon naturelle la continuité de la solution, linéaire par morceaux sur la frontière du domaine.

Après résolution, les seconds membres des équations linéarisées de surface libre (4) sont connus. Ces équations sont alors intégrées de t à $t + \Delta t$ à l'aide d'un schéma de Runge-Kutta du 4^{ème} ordre, pour obtenir l'élévation de surface libre et le potentiel à la surface libre au pas de temps suivant.

Dans le cas où toutes les parois matérielles sont en mouvement forcé, la condition de Neumann sur ces surfaces est donnée, et le processus peut être réitéré pour avancer la solution en temps. La prise en compte du mouvement libre d'un corps flottant (où d'une paroi matérielle quelconque) nécessite la mise en oeuvre d'une procédure particulière. Dans ce cas en effet, il est nécessaire d'intégrer en temps les équations de la dynamique du flotteur pour actualiser de t à $t + \Delta t$ la condition de Neumann sur la carène. Pour ce faire, il est nécessaire de connaître à l'instant t les efforts appliqués au flotteur, et donc la dérivée temporelle du potentiel des vitesses sur la carène, la pression hydrodynamique linéarisée étant donnée par:

$$p(M,t) = - \frac{\partial \Phi(M,t)}{\partial t} \quad (6)$$

Φ_t étant solution de l'équation de Laplace dans le domaine D , peut recevoir la même représentation intégrale que le potentiel Φ , seules les conditions aux limites diffèrent. On résoud alors à chaque pas de temps un système linéaire pour Φ_t , dont le noyau est identique à celui du système donnant Φ . La pression, et donc les efforts sur le flotteur étant alors connus à l'instant t , les équations de la dynamique du flotteur sont intégrées en utilisant le même schéma que pour les équations de surface libre, pour actualiser vitesse et position du flotteur.

Notons enfin que le problème étant linéarisé, le domaine de calcul est invariant en temps. Le noyau des systèmes linéaires pour Φ et Φ_t est donc lui aussi invariant. Ceci permet d'inverser la matrice noyau une fois pour toutes, les solutions à chaque pas de temps étant réduites à de simples produits matriciels. On procède en fait à une inversion partielle par factorisation LU.

À l'issue de la simulation, on dispose de l'histoire de la vitesse et de la position des limitantes du domaine fluide, ainsi que de la trace du potentiel sur ces surfaces. Un module de post-traitement permet à partir de ces résultats bruts d'obtenir pressions, efforts, bilans de masse et d'énergie, et de procéder aux différentes sorties graphiques.

APPLICATIONS

Nous donnons ici les résultats de quelques applications illustrant les possibilités actuelles du code de calcul:

- Génération d'un train d'ondes instationnaires dans un bassin circulaire
- Génération d'une onde plane sinusoïdale dans ce même bassin
- Mouvement libre d'un flotteur
- Interaction d'ondes instationnaires avec un flotteur

1) Génération d'un train d'ondes instationnaires dans un bassin circulaire

Nous considérons ici le cas d'un bassin circulaire de profondeur $H=1.$, et de rayon $R=2.$ La symétrie par rapport au plan vertical xOz est prise en compte, et le demi-domaine est discrétisé par 1998 facettes triangulaires (1059 inconnues nodales). Le domaine complet reconstitué par symétrie est donné 1. A partir du repos, on impose à la partie de la frontière circulaire verticale du bassin correspondant à $x < -1$ une loi de vitesse normale donnée par $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}(t) = T^4 - 2T^2 + 1$, avec $T = (2t/T_0) - 1$, pour $0 < t < T_0$. La durée de l'excitation est ici $T_0 = 5$.

Un train d'ondes d'énergie finie est ainsi créé et se propage dans le bassin. La simulation a été conduite sur 400 pas de temps de durée uniforme $Dt = 0.05$. Nous donnons figure 2 le bilan de conservation de la masse du fluide au cours de la simulation: la variation de volume fluide due au mouvement de la paroi, le volume balayé par la surface libre, et la somme de ces deux signaux affectée d'un coefficient 10 sont respectivement tracés. L'erreur totale sur le volume est de l'ordre de 10^{-3} . La figure 3 est dédiée au bilan d'énergie mécanique. L'énergie cinétique du fluide, son énergie potentielle, l'énergie mécanique totale du fluide, le travail fourni par la paroi sont donnés, ainsi que la différence de ces deux dernières quantités (théoriquement zéro). Le comportement du code de calcul est excellent, et on observe clairement la conservation de l'énergie après l'arrêt du mouvement d'excitation. Enfin nous donnons, figures 4 à 7, les vues en perspective de la surface libre du bassin pour $T = 5., 10., 15., 20.$

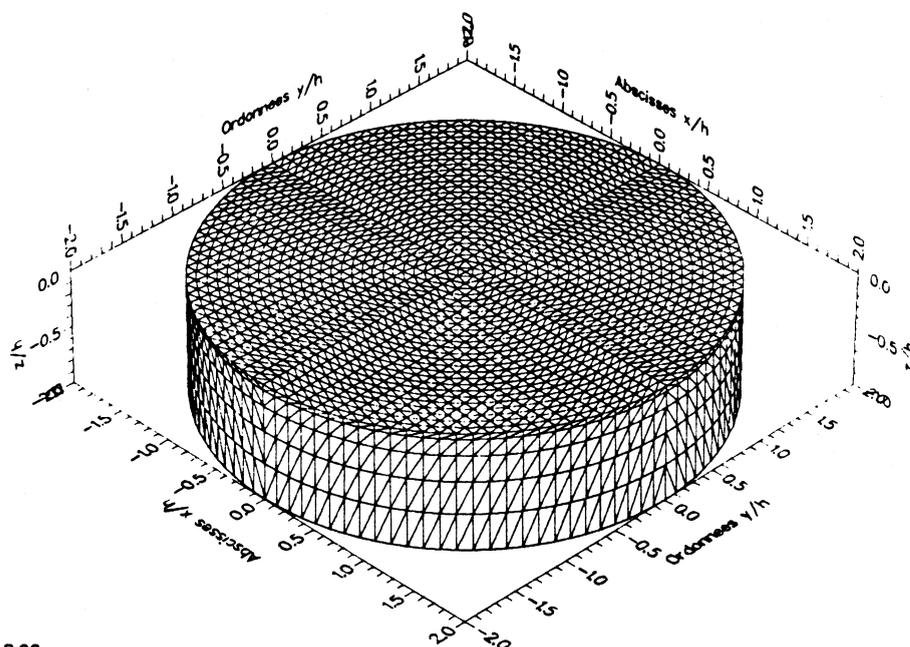


Figure 1

Xcoil=8.00
Ycoil=-8.00
Zcoil=8.00

$t = \sqrt{g/H} = 0.00$

Facettes: 1998 Points: 1114

Inconnues: 1059

CUVE CYLINDRIQUE SANS CORPS R=2. H=1.
DT=0.05 - RUNGE-KUTTA

Figure 2

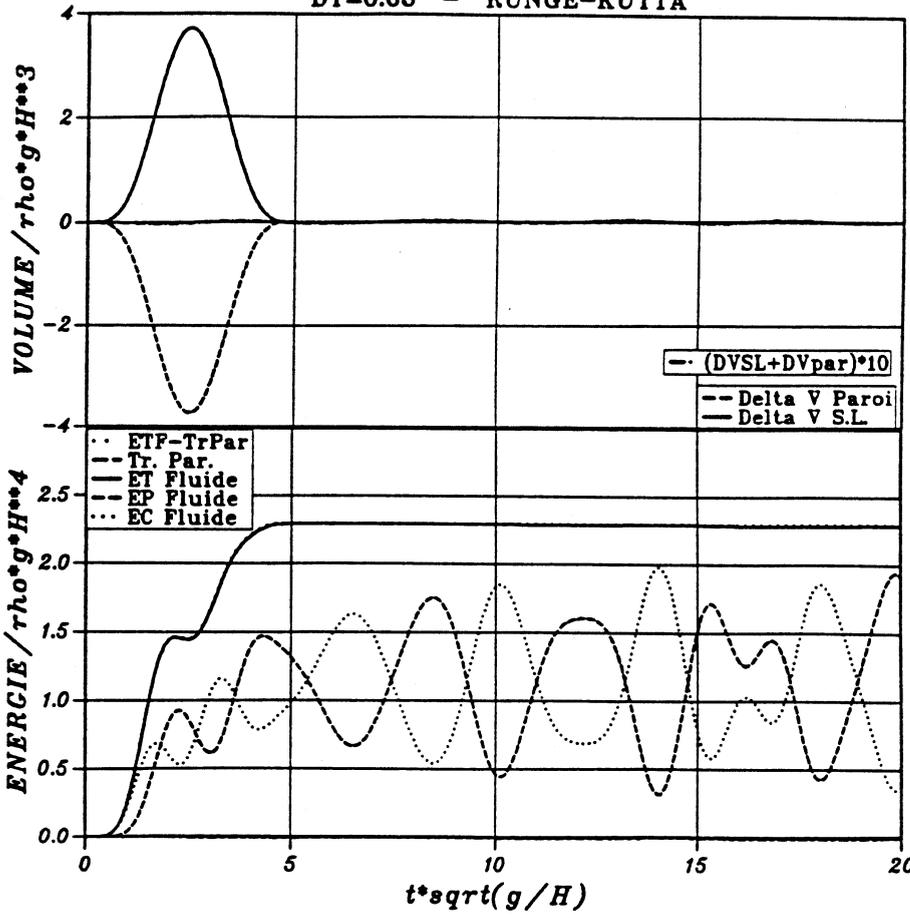


Figure 3

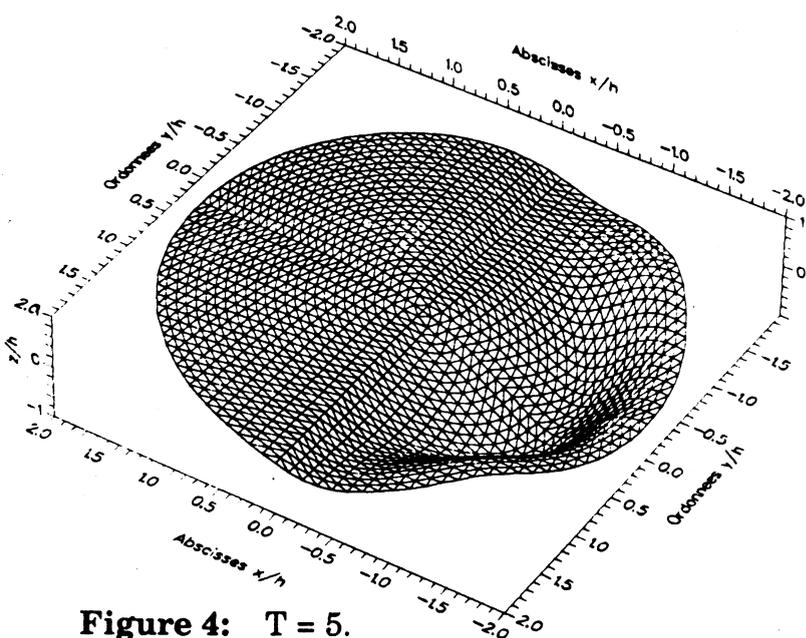


Figure 4: T = 5.

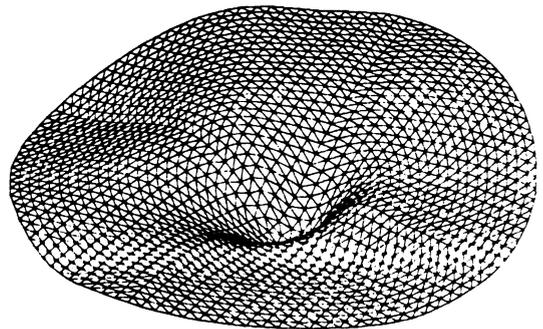


Figure 5: T = 10.

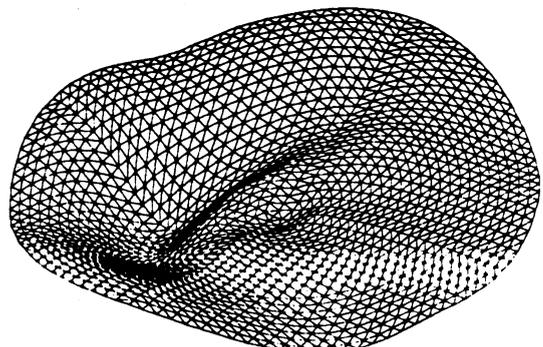


Figure 6: T = 15.

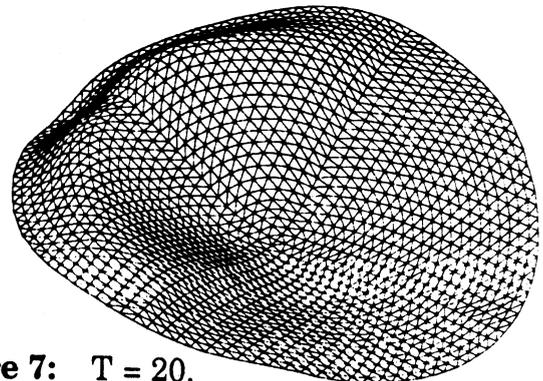


Figure 7: T = 20.

CUVE CYLINDRIQUE SANS CORPS R=2. H=1.
 GENERATION HOULE PLANE OMEGA=2.
 LOI DE VITESSE EN HAUT DU BATTEUR

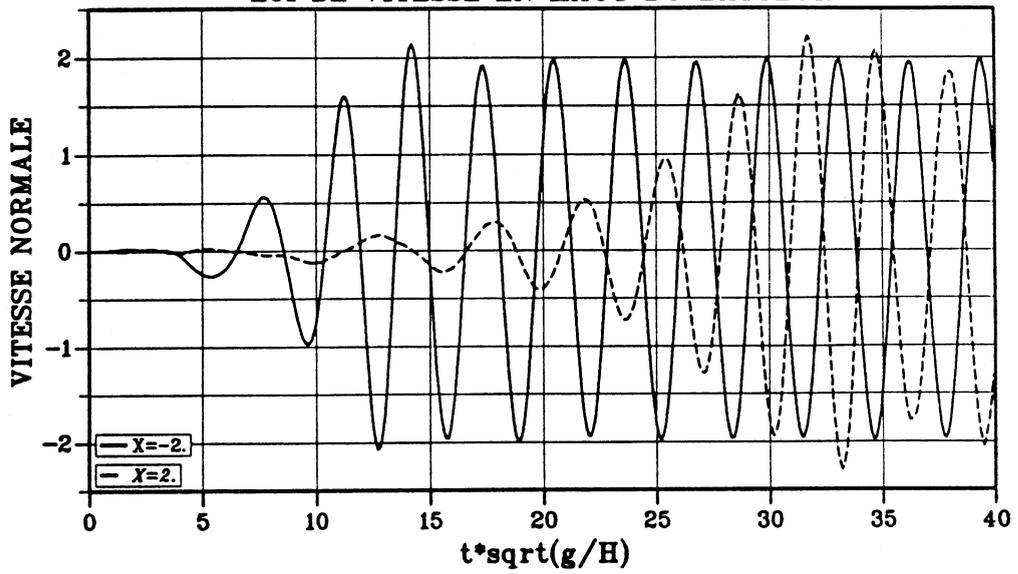


Figure 8

CUVE CYLINDRIQUE SANS CORPS R=2. H=1.
 GENERATION DE HOULE PLANE OMEGA=2.
 DT=0.10 - RUNGE-KUTTA

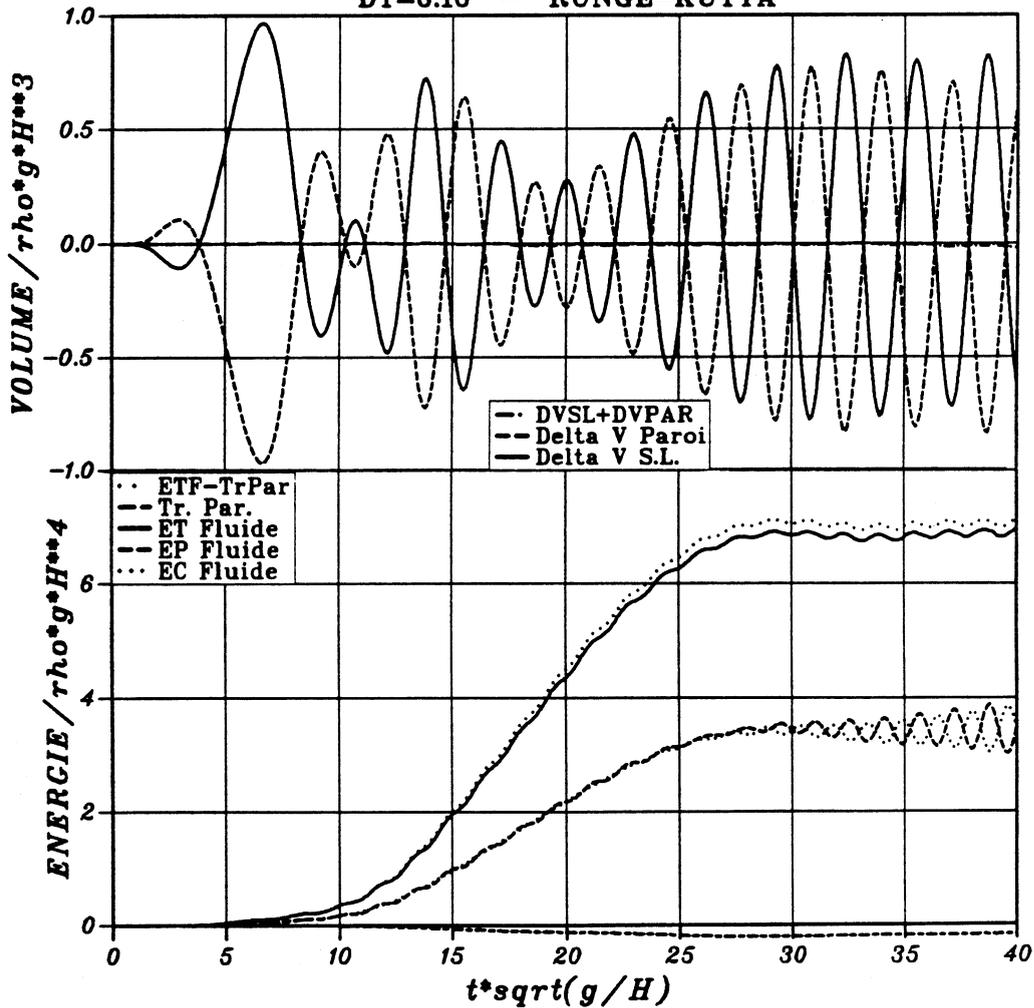


Figure 9

Figure 10

2) Génération d'une onde sinusoidale plane

En conservant la géométrie du bassin et sa discrétisation, nous simulons à présent la génération et la propagation d'une onde plane sinusoidale de pulsation $\omega \cdot \sqrt{g/H} = 2.0$, à partir d'un état initial de repos dans le bassin. La paroi circulaire verticale est utilisée comme générateur de houle pour la partie correspondant à $x < 0$, et comme absorbeur pour la partie restante. Le mouvement imposé à ces frontières (dont on exploite ici tous les degrés de liberté) est déduit explicitement d'une solution analytique pour le problème bidimensionnel linéarisé de la génération d'ondes dans un domaine semi-infini (Kennard 1949), et correspond à une onde plane générée par un batteur piston plan fictif situé en $x = -4$. La simulation a été conduite sur 400 pas de temps de durée uniforme $Dt=0.10$.

Nous donnons tout d'abord, figure 8, les lois de vitesse normale imposées à deux points particuliers de la paroi du bassin: en haut du batteur en ($x=-2.$, $y=0.$, $z=0.$), et en haut de l'absorbeur en ($x=2.$, $y=0.$, $z=0.$). Les bilans de masse et d'énergie sont donnés par les figures 9 et 10. Après $t = 30.$, on obtient un régime quasiment périodique en espace et en temps dans le bassin, et l'énergie moyennée en temps du fluide est pratiquement constante. La figure 11 donne l'élévation de surface libre au centre du bassin au cours de la simulation. On observe un signal quasi-périodique entre $t = 27.$ et $t = 35.$ Les vues en perspective de la surface libre du bassin pour $t = 10.$, $15.$,..... $40.$ sont données par les figures 12 à 18. Sur les deux dernières vues, on observe l'effet de réflexions indésirables sur l'absorbeur. Ces réflexions sont dues à l'effet accumulé des différences entre le modèle continu dont sont déduites les conditions de Neumann sur la paroi verticale, et notre modèle numérique tridimensionnel.

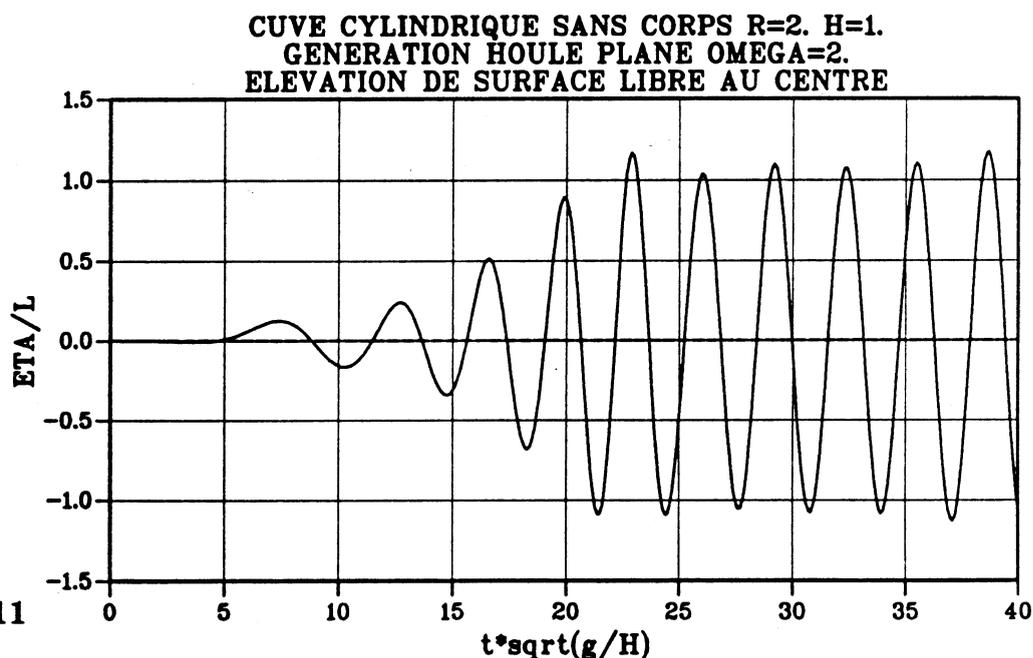
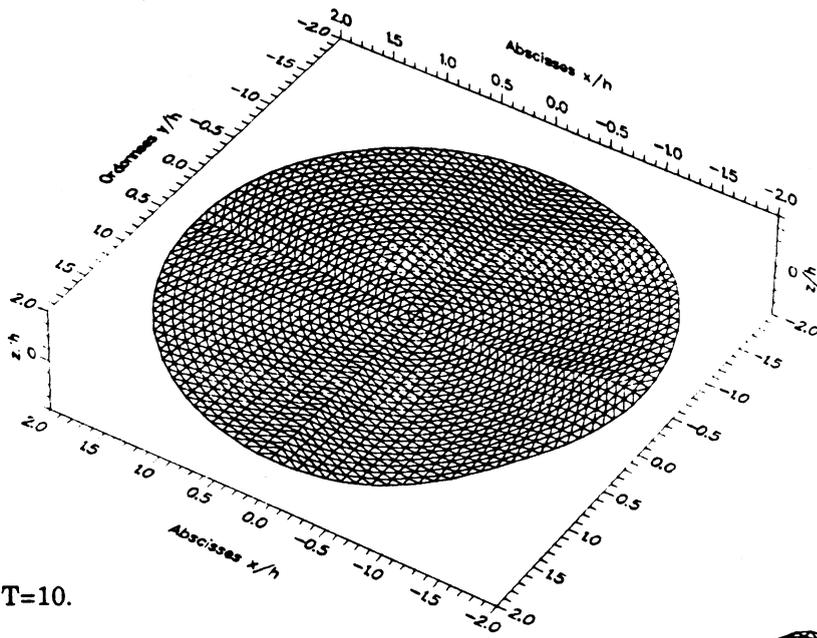
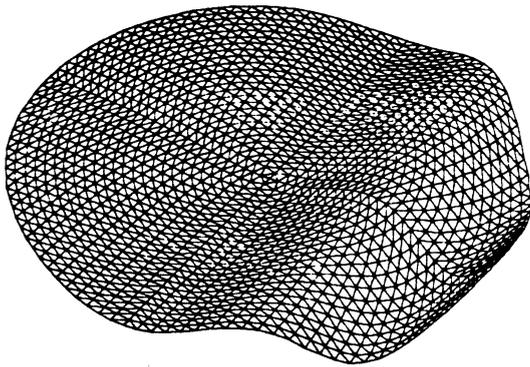
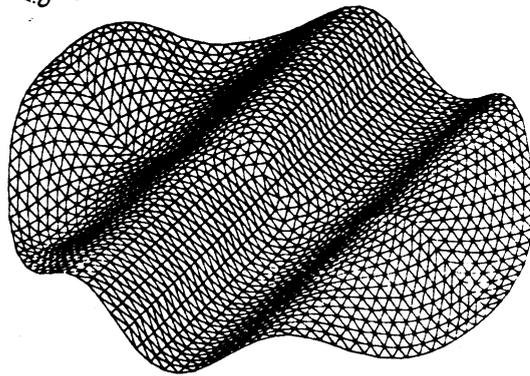
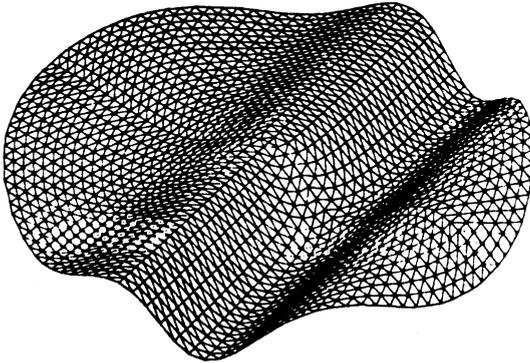
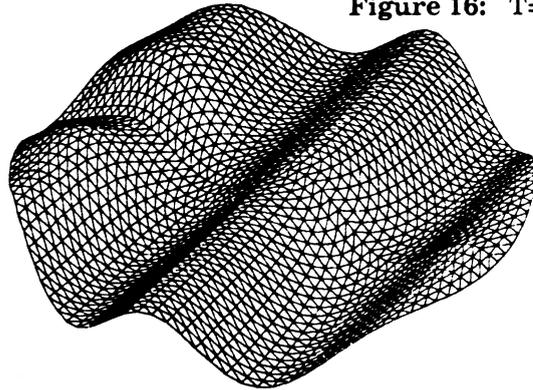
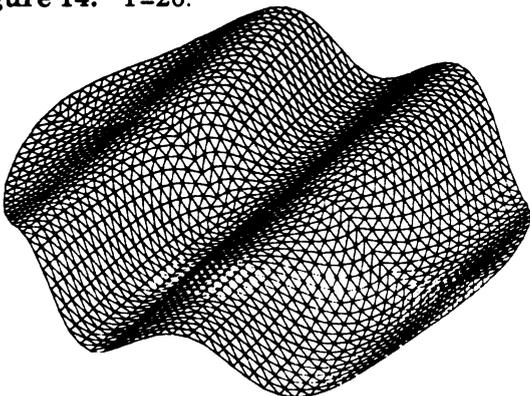
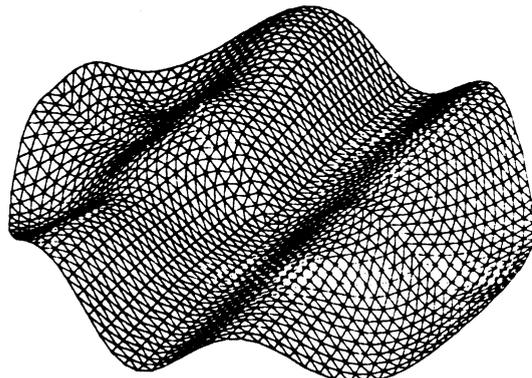


Figure 11

3) Mouvement libre d'un flotteur

La géométrie du bassin est conservée, mais nous prenons en compte ici la présence d'une demi-sphère de rayon $R_s = 0.5$, flottant au centre du bassin. Le maillage du domaine complet est donné figure 19. Au repos, le flotteur est déplacé verticalement de sa position d'équilibre, puis lâché. La sphère est alors en mouvement libre de pilonnement, les parois du bassin étant maintenues fixes. Nous donnons tout d'abord figure 20 les signaux de déplacement, vitesse et accélération verticaux du flotteur, puis figures 21 et 22 les bilans de masse et

Figure 12: $T=10$.Figure 13: $T=15$.Figure 16: $T=30$.Figure 14: $T=20$.Figure 17: $T=35$.Figure 15: $T=25$.Figure 18: $T=40$.

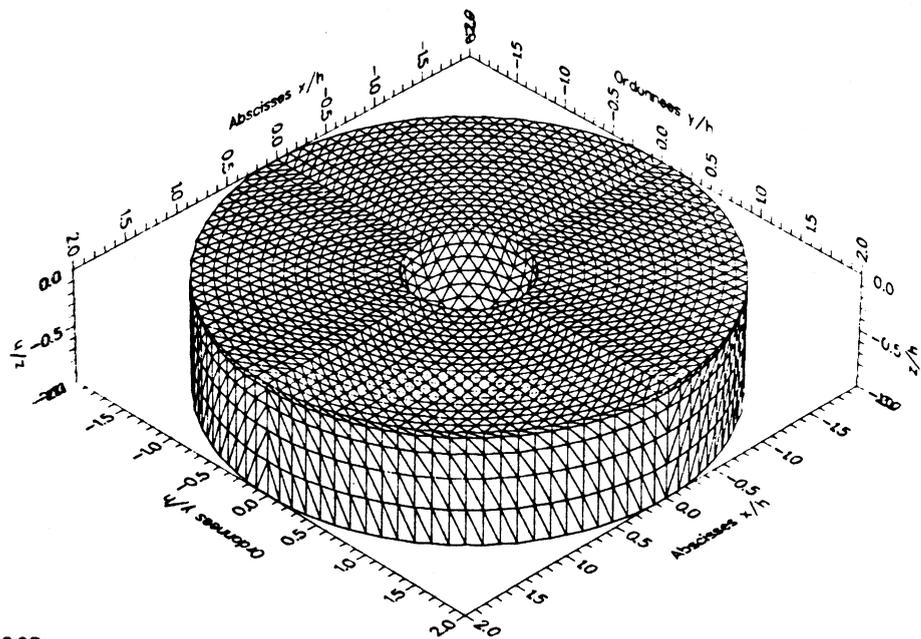


Figure 19

Xoeil=8.00
Yoeil=8.00
Zoeil=8.00

$t = \sqrt{g/H} = 0.00$

Facettes: 1872 Points: 1064

Inconnues: 994

d'énergie. Après environ deux cycles de mouvement oscillant amorti, le corps est remis en mouvement par les ondes rayonnées par lui-même, puis réfléchies par les parois. Le flotteur reprend alors une amplitude proche de son déplacement initial, vers $T = 18.$, puis le cycle d'échange d'énergie entre le fluide et flotteur reprend. Le bilan de masse est excellent, et seule une très légère variation ($O(10^{-2})$) de l'énergie totale est observée.

4) Interaction d'ondes instationnaires avec un flotteur

Nous conservons ici la configuration géométrique bassin+flotteur précédemment étudiée, mais nous imposons aux parois la loi de mouvement correspondant à la génération d'une houle plane dans le bassin sans corps, utilisée pour le deuxième cas d'application. Le flotteur, initialement à l'équilibre, est mis en mouvement de pilonnement par les ondes générées par la paroi du bassin, les autres degrés de liberté du flotteur étant bloqués. Déplacement, vitesse et accélération verticaux du flotteur sont donnés figure 23, puis les bilans de masse et d'énergie figures 24 et 25. Contrairement à la situation du paragraphe 2 (bassin sans flotteur), on n'observe pas de régime établi, en raison du retour rapide sur le flotteur des ondes diffractées et rayonnées par le flotteur, puis réfléchies par la paroi extérieure. Le bilan de masse est correct, mais le bilan d'énergie est moins satisfaisant que dans les cas précédemment étudiés, avec une dérive sensible du bilan: *énergie fluide + énergie flotteur - travail du batteur*. La dynamique de l'écoulement étudié ici nécessite de toute évidence des discrétisations en temps et en espace plus fines.

CONCLUSION

Nous avons présenté les principales caractéristiques, et quatre applications significatives d'un modèle numérique dédié aux écoulements instationnaires linéarisés à surface libre en domaine borné. Ce modèle permet de simuler la génération d'ondes de gravité par mouvement forcé des parois d'un bassin tridimensionnel de forme quelconque, leur propagation et leur interaction avec un corps fixe ou flottant, le couplage fluide-structure étant pris en compte.

Les discrétisations en temps et en espace adoptées correspondent aux limites raisonnables d'utilisation (temps Cpu, mémoire) du Vax 8700 sur lequel l'ensemble des calculs a été effectué. Dans ces conditions, le modèle est validé par

CUVE CYLINDRIQUE - DEMI SPHERE
 RC=2. RS=5 - LACHER DU CORPS
 PAROIS FIXES - DT=0.10 RUNGE-KUTTA

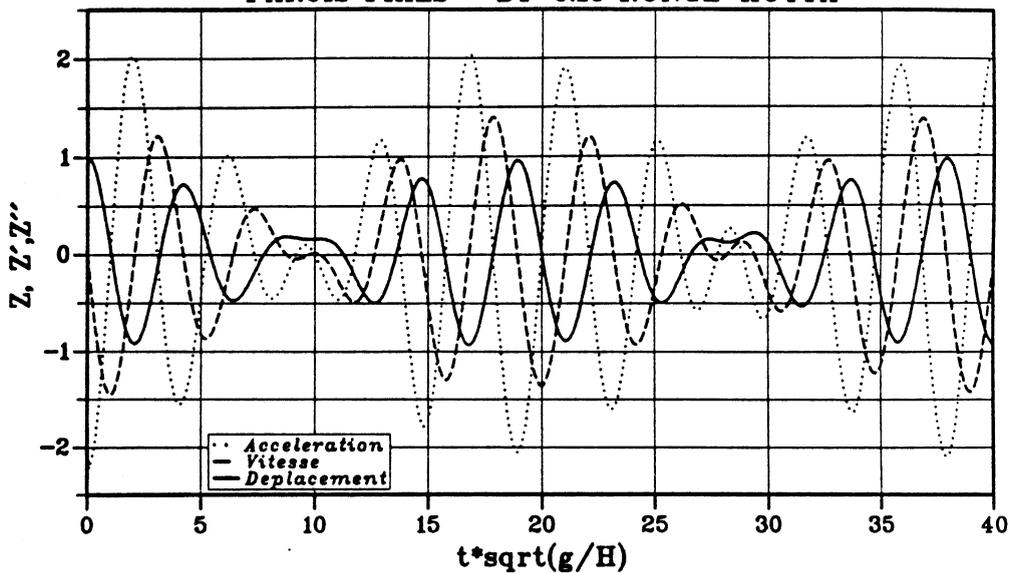


Figure 20

CUVE CYLINDRIQUE + DEMI-SPHERE
 RC=2.0 RS=0.5 - LACHER DU CORPS
 DT=0.10 - RUNGE-KUTTA

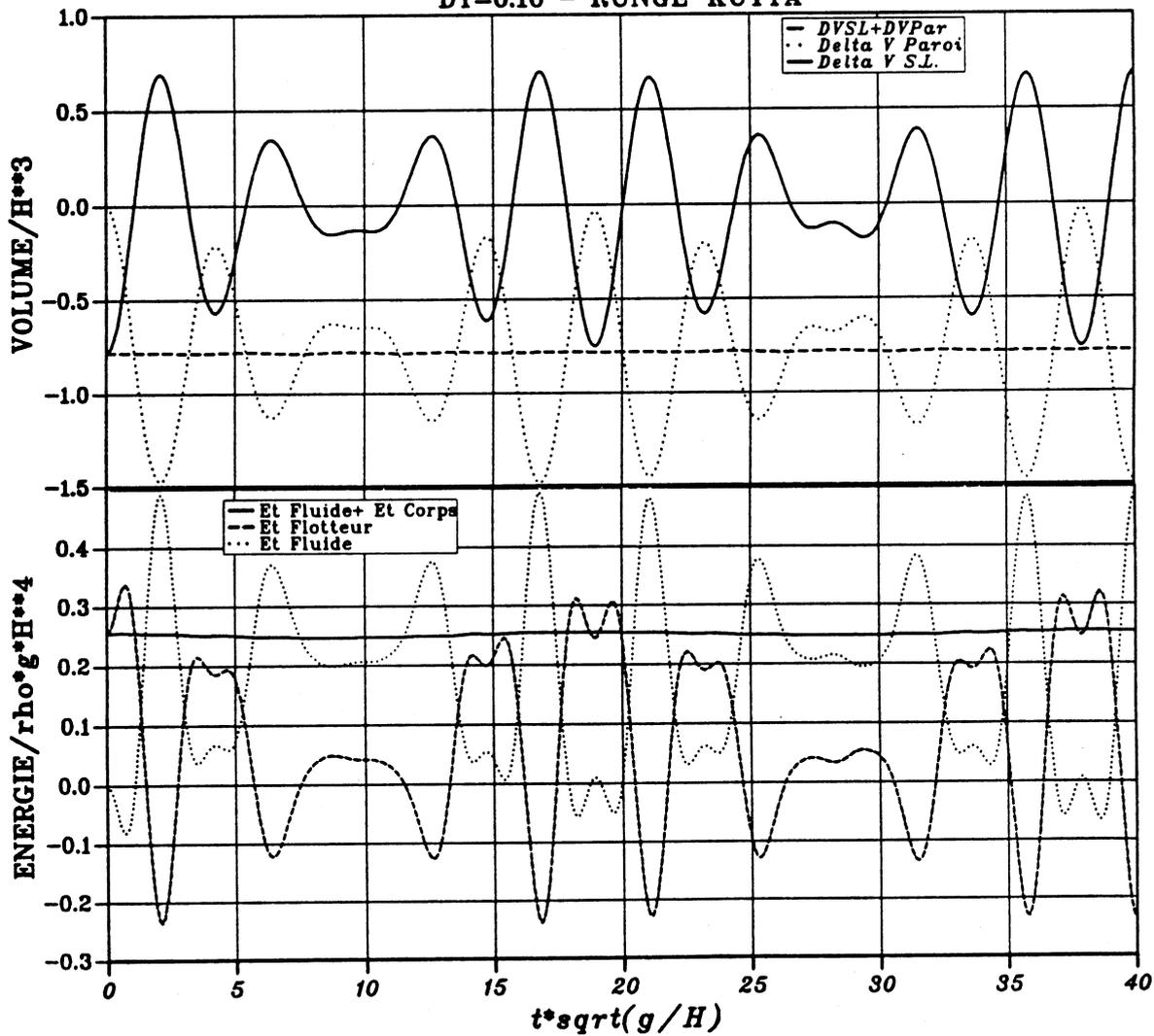


Figure 21

Figure 22

CUVE CYLINDRIQUE + DEMI-SPHERE (PIL.)
 RC=2.0 RS=0.5 - GEN. HOULE OM=2.0
 DT=0.10 - RUNGE-KUTTA

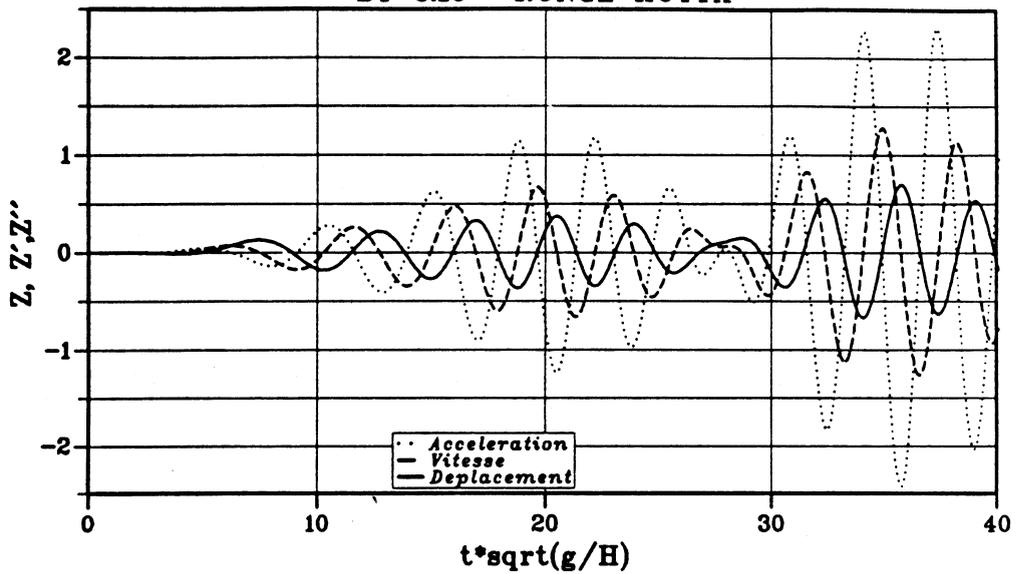


Figure 23

CUVE CYLINDRIQUE + DEMI-SPHERE (PIL.)
 RC=2.0 RS=0.5 - GEN. HOULE OM=2.0
 DT=0.10 - RUNGE-KUTTA

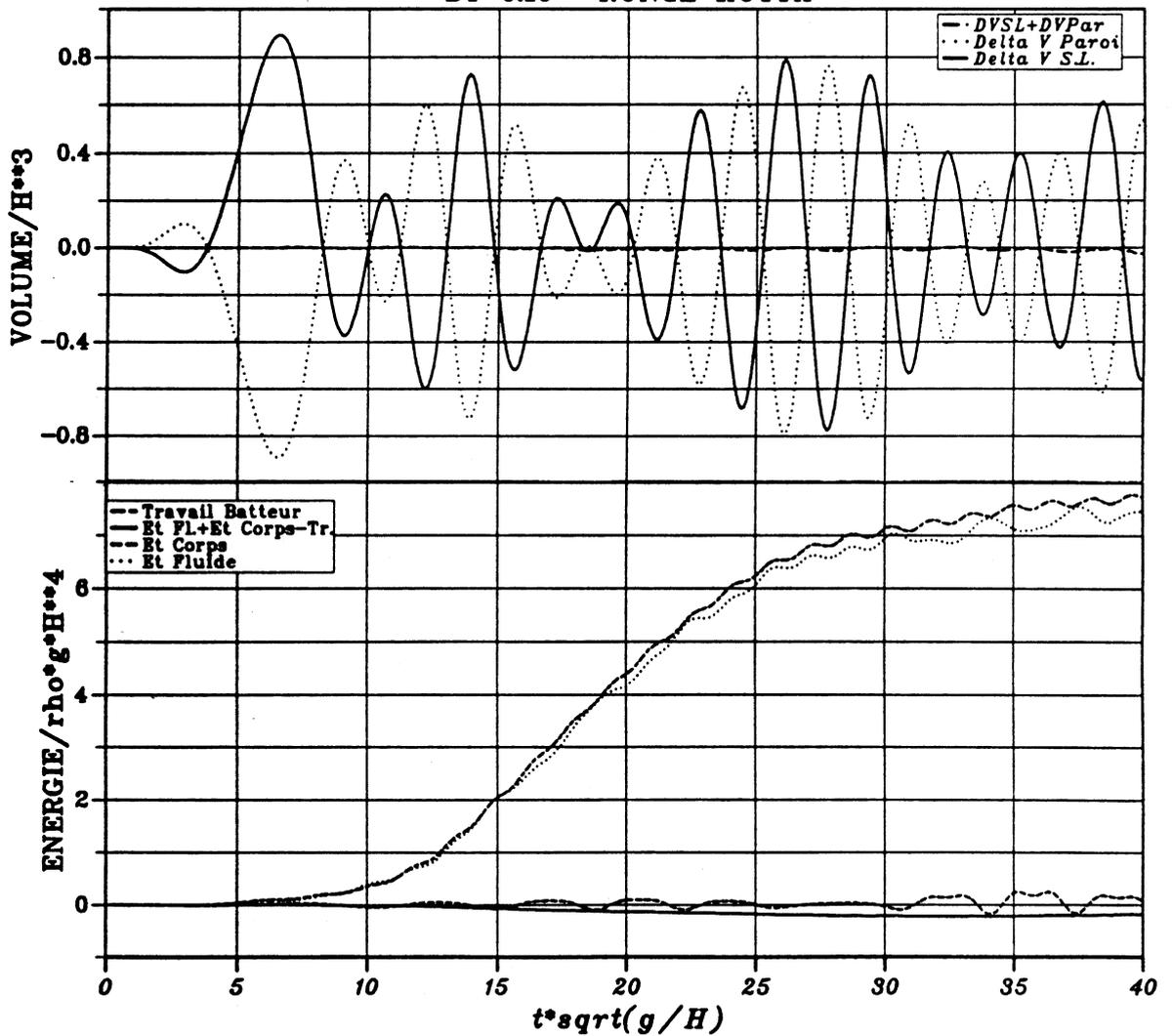


Figure 24

Figure 25

les excellents bilans de masse et d'énergie obtenus lorsque les résolutions en temps et en espace sont suffisantes, comme c'est le cas pour les premières applications présentées.

La prochaine étape du développement du code de calcul concerne la modélisation d'écoulements en milieu ouvert par introduction d'une condition de raccord sur la frontière extérieure du domaine de calcul. Ce travail est en cours de réalisation. Enfin, le modèle que nous avons développé constitue une bonne base pour aborder à plus long terme la simulation d'écoulements tridimensionnels non linéaires.

Cette étude a bénéficié du soutien de la DRET, marché DRET-Sirehna 89/316

Références:

P. Ferrant: "Radiation d'ondes de gravité par les mouvements de grande amplitude d'un corps immergé: Comparaison des approches fréquentielle et instationnaire". thèse de Doctorat de l'Université de Nantes. 1988.

P. Ferrant: "A coupled time & frequency approach for nonlinear wave radiation". 18th ONR Symposium on Ship Hydrodynamics. Ann Arbor, Michigan. 1990.

R.F. Beck, A.R. Magee: "Time domain analysis of ship motions in waves". IUTAM Symposium London. 1990.

M.S. Longuet-Higgins, E.D. Cokelet: The deformation of steep surface waves on water: 1- A numerical method of computation. Proc. Roy. Soc. London. A350. 1976

R. Cointe: "Quelques aspects de la simulation numérique d'un canal à houle". thèse de l'ENPC. 1989.

A. Clément: "Exemples de simulation d'écoulements instationnaires non-linéaires par la méthode mixte Euler-Lagrange". Troisièmes Journées de l'Hydrodynamique. Grenoble, France. 1991.

E.H. Kennard: "Generation of surface waves by a moving partition". Quart. Appl. Math., vol. 7, pp 303-312, 1949.

J.N. Newman: "The numerical Towing Tank: Fact or Fiction ?". 1989. à paraître dans Schiffstechnik.